

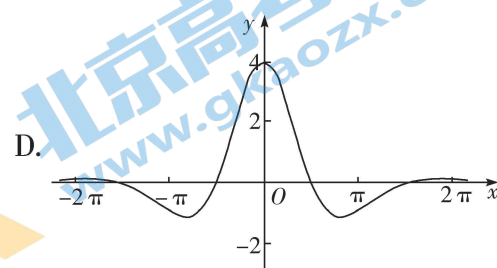
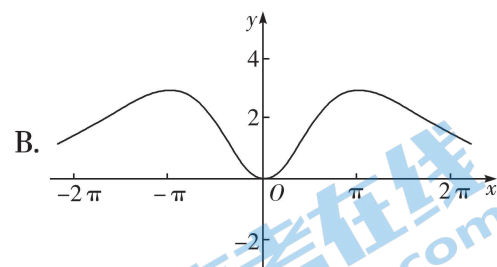
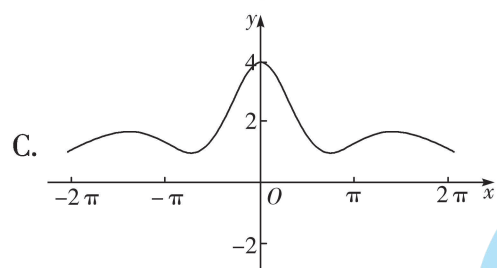
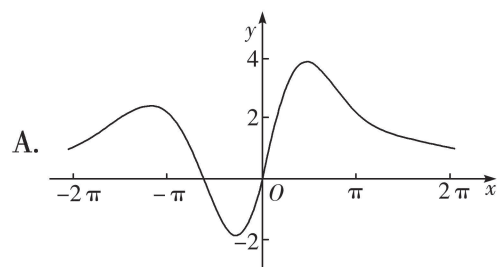
数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = |x - 1| - 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | \log_3 x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
 A. $\{x | x \geq -1\}$ B. $\{x | x < 3\}$
 C. $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 3\}$
2. 已知 O 为坐标原点，复数 $z = \frac{2(3+4i)}{1-i}$ 在复平面内所对应的点为 Z ，则直线 OZ 的方程为
 A. $y = -7x$ B. $y = 7x$ C. $y = -\frac{1}{7}x$ D. $y = \frac{1}{7}x$
3. 已知函数 $f(x) = ax^3 - x + b$ ，若 $f'(1) = 2$ ($f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数) 且 $f(1) = 5$ ，则 $b =$
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
4. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 4\cos x}{2^{x-1} + 2^{-x-1}}$ 的部分图象大致是



5. “ $a \leq 2$ ”是“ $\sin^2 x - a \sin x + 1 > 0$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 山西大同的辽金时代建筑华严寺的大雄宝殿共有 9 间，左右对称分布，最中间的是明间，宽度最大，然后向两边均依次是次间、次间、梢间、尽间。每间宽度从明间开始向左右两边均按相同的比例逐步递减，且明间与相邻的次间的宽度比为 $8:7$ 。若设明间的宽度为 a ，则该大殿 9 间的总宽度为

- A. $\left(\frac{7}{8}\right)^4 a$ B. $15a - 14a\left(\frac{7}{8}\right)^5$
 C. $14a\left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^4\right]$ D. $15a - 14a\left(\frac{7}{8}\right)^4$

7. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 不等式 $\frac{2b(a+c)}{a^2+4b^2+c^2} \leq \cos \theta$ 恒成立，则 θ 的取值范围是

- A. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ D. $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

8. 已知 $\ln 3 < 1$, $1, a = 3(2 - \ln 3)e^{-2}$, $b = 3(3 - \ln 3)e^{-3}$, $c = \ln \sqrt[3]{3}$, 则

- A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($\omega \in \mathbf{N}$) 在区间 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 2π B. $g(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$
 C. $g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{7\pi}{12}, 1\right)$ D. $g(x) = \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1$

10. 已知 S_n 为等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $3b_2 = b_5$, $b_3 = 5b_2 - 10$ ，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = b_n$, $b_1 = a_1 + 1$ ，则

- A. $b_{32} = 63$
 B. $S_n - 5b_n$ 的最小值为 -25
 C. $\{a_n\}$ 为等差数列
 D. $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 100 项中的公共项的和为 2 000

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的实数 x ，都有 $f(2-x) = 2 - f(x)$ ，且当 $x \in [1, +\infty)$ 时， $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ ，则

- A. $f(-\sqrt{2}) = 2$
 B. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增
 C. 方程 $[f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = 0$ 有 5 个不同的实根
 D. 函数 $y = f(x) - \frac{x}{x-1}$ 的零点之和为 4

12. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $AB = AC$, 其高 $AD = 3$, E 为线段 BD 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿 AD 折成大小为 θ ($\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的二面角, 连接 BC , 形成四面体 $A-BCD$, 动点 P 在 $\triangle ACD$ 内 (含边界), 且 $PE \parallel$ 平面 ABC , 则在 θ 变化的过程中
- A. $AD \perp BC$
- B. E 点到平面 ADC 的距离的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- C. 点 P 在 $\triangle ADC$ 内 (含边界) 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$
- D. 当 $BP \perp AC$ 时, BP 与平面 ADC 所成角的正切值的取值范围为 $[2\sqrt{2}, +\infty)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 0)$, $|\mathbf{a} + t\mathbf{b}| = \sqrt{5}$ ($t \neq 0$), 则实数 $t =$ _____.
14. 某人从山的一侧 A 点看山顶的仰角为 60° , 然后沿从 A 到山顶的直线小道行走 $200\sqrt{3}$ m 到达山顶, 然后从山顶沿下山的直线小道行走 400 m 到达另一侧的山脚 B 处 (A, B 在同一水平面内, 山顶宽度忽略不计), 则其从 B 点看山顶的仰角的正弦值为 _____, AB 的最大值为 _____ m. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)
15. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 若 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{13}\right) = 3\cos 2\alpha \sin \frac{17\pi}{52}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.
16. 已知点 O 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球球心, P 为球面上一点, $AB = AD = 2$, 若 BC_1 与 CD_1 所成的角为 60° , 则四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积的最大值为 _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a^2 + c^2 - b^2 = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$.

- (I) 求 $\tan B$ 的值;
- (II) 若 D 为边 AC 的中点且 $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

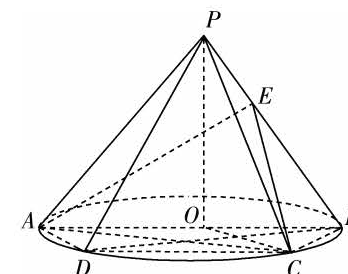
已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \geq 0, \\ 2^{a-x}, & x < 0 \end{cases}$ 满足 $f(1-a) = f(a-1)$, 设 $h(x) = a^x$.

- (I) 求函数 $y = h(2x) - h(x) + 1$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的值域;
- (II) 若函数 $y = |h(x) + m|$ 和 $y = |h(-x) + m|$ 在区间 $[1, 2023]$ 上的单调性相同, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分)

如图, 圆锥 PO 的高为 3, AB 是底面圆 O 的直径, PC, PD 为圆锥的母线, 四边形 $ABCD$ 是底面圆 O 的内接等腰梯形, 且 $AB = 2CD = 2$, 点 E 在母线 PB 上, 且 $BE = 2EP$.

- (I) 证明: 平面 $PBD \perp$ 平面 POC ;
- (II) 求平面 AEC 与平面 PAB 的夹角的余弦值.



20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+2} = \lambda a_{n+1} - 2a_n$ ($\lambda \neq 1$).

- (I) 求实数 λ 的值及 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (II) 当 $n \in [a_k, a_{k+1})$ 时, $b_n = k$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2^n 项和.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{(k-1)(x^2-1)}{x}$, $k \in \mathbf{R}$.

- (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (II) 证明: $\ln(n+1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{n+2}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

22. (12 分)

若存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 \neq x_2, m > 1$ 使 $|g(x_1) - g(x_2)| > m|f(x_1) - f(x_2)|$ 成立, 则在区间 $[a, b]$ 上, 称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的“ m 倍扩张函数”. 设 $f(x) = e^x, g(x) = -x^2 + x$, 若在区间 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 上 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的“ m 倍扩张函数”.

- (I) 求实数 m 的取值范围;
- (II) 证明: $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象存在两条公切线.

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 由题意,可得集合 $A = \{y | y \geq -1\}$, $B = \{x | x \geq 3\}$, 可得 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < 3\}$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | -1 \leq x < 3\}$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查复数的运算及几何意义.

解析 $z = \frac{2(3+4i)}{1-i} = \frac{2(3+4i)(1+i)}{2} = -1+7i$, 因此点 Z 的坐标为 $(-1, 7)$, 故直线 OZ 的方程为 $y = -7x$.

3. 答案 A

命题意图 本题考查导数的运算.

解析 $f'(x) = 3ax^2 - 1$, 由 $f'(1) = 2$ 可得 $a = 1$, 所以 $f(x) = x^3 - x + b$, 又 $f(1) = 5$, 所以 $b = 5$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 函数 $f(x)$ 为偶函数, 排除 A; $f(0) = 4$, 排除 B; $f(\pi) > 0$, 排除 D, 故选 C.

5. 答案 B

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 因为 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin^2 x - a \sin x + 1 > 0$, 所以 $a < \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x} = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, 设 $t = \sin x \in (0, 1]$, 因为 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数, 所以 $y \in [2, +\infty)$, 所以 $a < 2$, 故选 B.

6. 答案 D

命题意图 本题考查数学文化及等比数列的性质.

解析 根据题意, 从中间依次向左右两边的宽度均构成公比为 $\frac{7}{8}$ 的等比数列, 故总宽度为 $2 \times \frac{\frac{7}{8}a \left[1 - \left(\frac{7}{8} \right)^4 \right]}{1 - \frac{7}{8}} +$

$$a = 15a - 14a \left(\frac{7}{8} \right)^4.$$

7. 答案 C

命题意图 本题考查基本不等式的应用及三角函数的性质.

解析 $\frac{2b(a+c)}{a^2+4b^2+c^2} = \frac{2ab+2bc}{a^2+2b^2+2b^2+c^2} \leq \frac{2ab+2bc}{2\sqrt{2}ab+2\sqrt{2}bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (当且仅当 $a = \sqrt{2}b = c$ 时取等号), $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \theta$, 又

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \therefore \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

8. 答案 D

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

命题意图 本题考查导数的应用.

解析 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $a = f\left(\frac{e^2}{3}\right) = \frac{\ln \frac{e^2}{3}}{\frac{e^2}{3}}, b = f\left(\frac{e^3}{3}\right) = \frac{\ln \frac{e^3}{3}}{\frac{e^3}{3}}, c = f(3) = \frac{\ln 3}{3}$. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时

$f(x)$ 单调递增, 当 $x > e$ 时 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$. 因为 $e < 3 < \frac{e^3}{3}$, 所以 $f\left(\frac{e^3}{3}\right) < f(3) < f(e)$,

所以 $b < c$. 若 $t = \frac{\ln x}{x}, t \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 有两个解 x_1, x_2 , 则 $1 < x_1 < e < x_2$, 且 $t = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}, x_1 + x_2 = \frac{\ln x_1 x_2}{t}$. 令 $g(x) =$

$\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, 则当 $x > 1$ 时, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(1) = 0$,

即在 $(1, +\infty)$ 上, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, 若 $x = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} > \frac{2}{x_2 + x_1}$, 故 $t > \frac{2t}{\ln x_1 x_2}$, 有 $x_1 x_2 > e^2$, 当 $x_2 = 3$ 时, $e >$

$x_1 > \frac{e^2}{3}$, 故 $f\left(\frac{e^2}{3}\right) < f(x_1) = f(3)$, 即 $a < c$. $a - b = 3(2 - \ln 3)e^{-2} - 3(3 - \ln 3)e^{-3} = 3e^{-3}[e(2 - \ln 3) - 3 + \ln 3] =$

$3e^{-3}[(e-1)(2 - \ln 3) - 1] > 3e^{-3}[(2.7-1)(2-1.1) - 1] > 0$, 故 $a > b$. 综上 $c > a > b$.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 答案 BC

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 因为 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $\begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} \omega \geq \frac{4}{3} + 8k, k \in \mathbf{Z}, \\ \omega \leq \frac{8}{3} + 4k, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$ 因为 $\frac{8}{3} + 4k \geq \frac{4}{3} + 8k, k \in \mathbf{Z}$, $\omega \in \mathbf{N}$, 所以 $k = 0, \omega = 2$, 故 $g(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 A 错

误; $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$, 所以 $g(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + 1 = \sin\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right) + 1 = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$, 所以 B

正确, D 错误; 令 $2x + \frac{7\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $x = -\frac{7\pi}{12}$, 所以 C 正确.

10. 答案 AC

命题意图 本题考查等差数列与等比数列的性质.

解析 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由 $3b_2 = b_5, b_3 = 5b_2 - 10$, 可得 $b_1 = 1, d = 2$, 故 $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, $b_{32} = 63$, 故 A 正确; 易知 $S_n = n^2$, 所以 $S_n - 5b_n = n^2 - 10n + 5$, 当 $n = 5$ 时, $S_n - 5b_n$ 取得最小值, 且最小值为 -20 , 故 B 错误; 因为 $a_n + a_{n+1} = 2n-1$, 所以 $a_{n+1} + a_{n+2} = 2(n+1)-1 = 2n+1$, 两式相减得 $a_{n+2} - a_n = 2$, 由题可知 $a_1 = 0$, 所以 $a_2 = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 $a_1 = 0$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 偶数项是以 $a_2 = 1$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $\{a_n\}$ 为 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, 即 $a_n = n-1, \{a_n\}$ 为等差数列, 故 C 正确; $\{a_n\}$ 的前 100 项为 $0, 1, 2, \dots, 99$, $\{b_n\}$ 的前 100 项为 $1, 3, 5, \dots, 199$, 公共项为 $1, 3, 5, \dots, 99$, 共 50 项, 其和为 2 500, 故 D 错误.

11. 答案 ACD

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 由 $f(2-x) = 2 - f(x)$, 得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, 设 $x < 1$, 则 $2-x > 1$, 所以 $f(2-x) = -(2-x)$ 进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

$x)^2 + 4(2-x) - 2 = -x^2 + 2$, 又 $f(2-x) = 2 - f(x)$, 所以 $f(x) = x^2$, 故 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1, \end{cases}$ 其大致图象

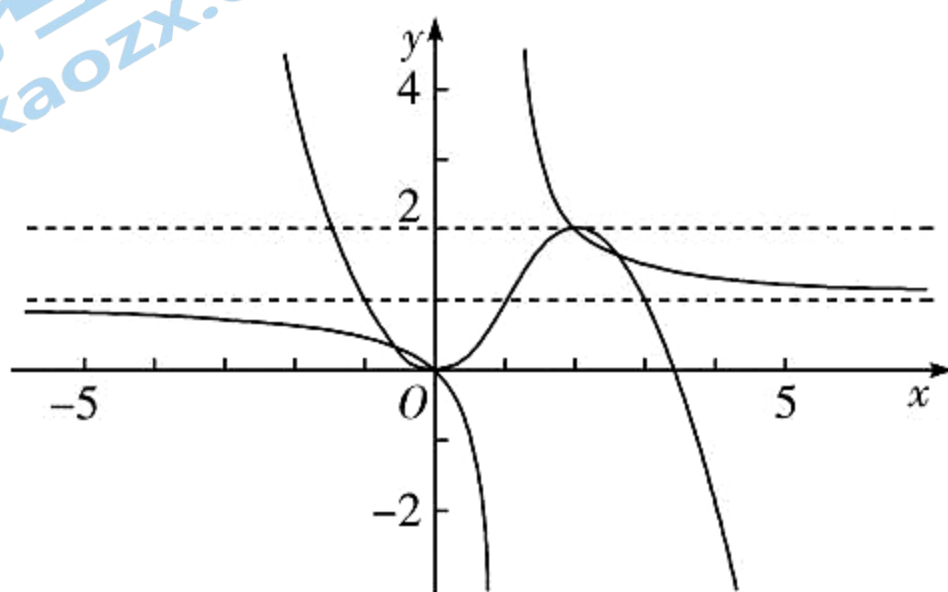
如图所示, 易知 A 正确, B 错误; 因为 $[f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = 0$, 所以 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = 2$, 当 $f(x) = 1$ 时, 有 3 个不同的实根, 当 $f(x) = 2$ 时, 有 2 个不同的实根, 故方程 $[f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = 0$ 有 5 个不同的实根, C 正确; 函

数 $y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称. 当 $x > 1$ 时, 令 $h(x) = f(x) - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)(-x^2+4x-2)-x}{x-1} = \frac{-x^3+5x^2-7x+2}{x-1}$, 设 $\varphi(x) = -x^3+5x^2-7x+2$, 则 $\varphi'(x) = -3x^2+10x-7 = -(3x-7)(x-1)$, 当 $1 < x < \frac{7}{3}$

时, $\varphi(x)$ 单调递增, 当 $x > \frac{7}{3}$ 时, $\varphi(x)$ 单调递减, 又 $\varphi(\frac{7}{3}) > 0$, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\varphi(x) \rightarrow -1$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \rightarrow$

$-\infty$, 所以当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x)$ 有 2 个零点, 即 $h(x)$ 有 2 个零点, 故函数 $y = f(x) - \frac{x}{x-1}$ 有 4 个零点, 且关

于 $x = 1$ 对称, 故零点之和为 4, 故 D 正确.



12. 答案 AD

命题意图 本题考查线面位置关系的判定与性质及线面角的求解.

解析 由题意可知 $AD \perp$ 底面 BCD , 则 $AD \perp BC$, 故 A 正确;

由题可知, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $BD \perp$ 平面 ACD , 此时 E 点到平面 ADC 的距离最大, 最大值为 $\frac{3}{2}$, 故 B 错误;

因为 $PE \parallel$ 平面 ABC , 所以 P 点在过点 E 且和平面 ABC 平行的平面上, 如图所示, 设 CD 的中点为 F, AD 的中点为 G, 连接 EF, FG, EG, 则平面 $EFG \parallel$ 平面 ABC , 则点 P 在 $\triangle ADC$ 内(含边界)的轨迹即中位线 GF, 易知 $GF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 C 错误;

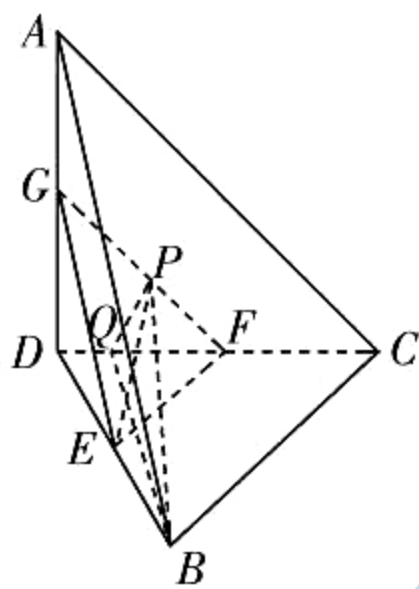
由题可知平面 $ACD \perp$ 平面 BCD , $\angle BDC = \theta$. 过点 B 作 $BQ \perp CD$, 垂足为 Q, 连接 PQ, 则 $BQ \perp$ 平面 ACD , 所以 $BQ \perp GF$, 因为 $BP \perp AC$, 所以 $BP \perp GF$, 又 $BP \cap BQ = B$, 所以 $GF \perp$ 平面 BPQ . 设 BP 与平面 ADC 所成角为 α , 则

$$\tan \alpha = \frac{BQ}{PQ} = \frac{BD \sin \theta}{PQ} = \frac{3 \sin \theta}{PQ}, \text{ 由题可知 } PQ = (DF - DQ) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{3}{2} - 3 \cos \theta}{\sqrt{2}}, \text{ 设 } \varphi(\theta) = \frac{3 \sin \theta}{PQ} = \frac{3 \sin \theta}{\frac{\frac{3}{2} - 3 \cos \theta}{\sqrt{2}}} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\frac{1}{2} - \cos \theta}, \text{ 则 } \varphi'(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos \theta - 2}{\left(\frac{1}{2} - \cos \theta\right)^2} < 0, \varphi(\theta) \text{ 单调递减, 所以 } \varphi(\theta)_{\min} = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}, \text{ 再结合图可}$$

知 $\tan \alpha$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2}, +\infty)$, 故 D 正确.

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案 -2

命题意图 本题考查向量的坐标运算.

解析 因为 $\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (t+1, 2)$, 所以 $(t+1)^2 + 4 = 5$, 所以 $t = -2$.

14. 答案 $\frac{3}{4}; 100(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

命题意图 本题考查解三角形.

解析 设山顶为 C , C 在 A, B 所在水平面内的射影为 D , 可得 $CD = 200\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 300$, 故从 B 点看山顶的仰角的正弦值为 $\frac{CD}{CB} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$. 当平面 ACD 与平面 BCD 在同一平面内时, AB 最大, $AB_{\max} = AD + BD = 200\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 400 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 100(\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

15. 答案 $\frac{1}{3}$

命题意图 本题考查三角恒等变换.

解析 因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{13}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{13}\right) = 3\cos 2\alpha \sin \frac{17\pi}{52}$, 所以 $\sin \alpha \cos \frac{\pi}{13} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{13} + \cos \alpha \cos \frac{\pi}{13} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{13} = 3\cos 2\alpha \sin \frac{17\pi}{52}$, 即 $\sin \alpha \left(\sin \frac{\pi}{13} + \cos \frac{\pi}{13}\right) + \cos \alpha \left(\sin \frac{\pi}{13} + \cos \frac{\pi}{13}\right) = 3\cos 2\alpha \sin \frac{17\pi}{52}$, 即 $2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{17\pi}{52} = 3\cos 2\alpha \sin \frac{17\pi}{52}$, 所以 $2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos 2\alpha = 3\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 6\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

16. 答案 $\frac{4}{3}(\sqrt{3} + 1)$

命题意图 本题考查几何体体积的计算.

解析 根据题意, 可知 O 也是长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的中心. 因为 $CD_1 \parallel BA_1$, 所以 $\angle A_1BC_1$ 为 BC_1 与 CD_1 所成的角(或其补角), 所以 $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$ 或 120° . 设 $AA_1 = a$, 当 $\angle A_1BC_1 = 120^\circ$ 时, $A_1C_1^2 = BA_1^2 + BC_1^2 - 2BA_1 \cdot BC_1 \cos 120^\circ$, 即 $8 = a^2 + 4 + a^2 + 4 - 2(a^2 + 4)\left(-\frac{1}{2}\right)$, 该方程无实数解. 当 $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$ 时, $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形, 所以 $AA_1 = 2$, 故长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为正方体. 当 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 且 P 到平面 $ABCD$ 的距离小于 P 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离时, P 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离最大, 此时四棱锥 $P - A_1B_1C_1D_1$ 的体积也最大. 因为外接球的直径为 $2\sqrt{3}$, 故 P 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离最大值为 $\sqrt{3} + 1$. 又 $S_{\text{四边形}A_1B_1C_1D_1} = 4$, 故四棱锥

$P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积最大值为 $\frac{4}{3}(\sqrt{3}+1)$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查解三角形.

解析 (I) 由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, (1 分)

又 $a^2 + c^2 - b^2 = 2$, 整理得 $ac \cos B = 1$ (2 分)

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \sqrt{2}$, 所以 $\tan B = 2\sqrt{2}$ (4 分)

(II) 由 (I) 的过程可知 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{ac}$, $\cos B = \frac{1}{ac}$,

所以 $\frac{8}{(ac)^2} + \frac{1}{(ac)^2} = 1$, 解得 $ac = 3$ (6 分)

因为 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, 所以 $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})$ (7 分)

因为 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, 所以 $\overrightarrow{CA}^2 = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,

所以 $4\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{CA}^2 = 2(\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2)$,

即 $4 \times 4 + b^2 = 2(a^2 + c^2) = 2(b^2 + 2)$, 解得 $b = 2\sqrt{3}$ (8 分)

故 $a^2 + c^2 = b^2 + 2 = 14$, 所以 $(a + c)^2 = 14 + 2ac = 20$,

即 $a + c = 2\sqrt{5}$ (9 分)

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ (10 分)

18. 命题意图 本题考查函数的性质及函数值域的求解.

解析 (I) 当 $0 < a < 1$ 时, $4^{1-a} = 2^1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$;

当 $a > 1$ 时, $2^{a-(1-a)} = 4^{a-1}$, 无解, 故 a 的值为 $\frac{1}{2}$ (1 分)

故 $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = h(2x) - h(x) + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ (2 分)

因为 $x \in [-2, 2]$, 所以令 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $t \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$,

故 $y = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ (3 分)

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = \frac{3}{4}$, 当 $t = 4$ 时, $y_{\max} = 13$.

故函数 $y = h(2x) - h(x) + 1$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{4}, 13\right]$ (4 分)

(II) 由题意, 函数 $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 函数 $h(-x) = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. (5 分)

由题可知函数 $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x + m\right|$ 与函数 $y = |2^x + m|$ 在区间 $[1, 2023]$ 上同增或者同减.

①若两函数在区间 $[1, 2023]$ 上均单调递增,

则 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \leq 0, \\ 2^x + m \geq 0 \end{cases}$ 在区间 $[1, 2023]$ 上恒成立, (6 分)

故 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^1 + m \leq 0, \\ 2^1 + m \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ (8分)

②若两函数在区间 $[1, 2^{0.23}]$ 上均单调递减,

则 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + m \geq 0, \\ 2^x + m \leq 0 \end{cases}$ 在区间 $[1, 2^{0.23}]$ 上恒成立, (10分)

故 $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{0.23}} + m \geq 0, \\ 2^{2^{0.23}} + m \leq 0, \end{cases}$ 该不等式组无解.

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ (12分)

19. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明及面面夹角的余弦值的求解.

解析 (I) 连接 OD .

由题意, 可知 $CD \parallel BO$, 且 $CD = BO = OD = 1$, 所以四边形 $DCBO$ 为菱形, 故 $BD \perp OC$ (1分)

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PO \perp BD$ (3分)

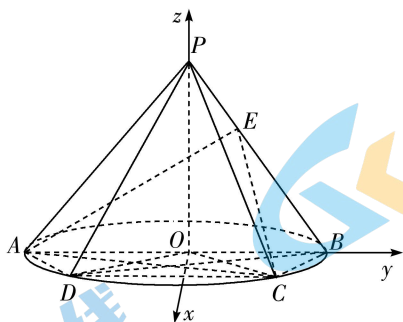
因为 $PO \cap OC = O$, $PO, OC \subset$ 平面 POC , 故 $BD \perp$ 平面 POC .

又 $BD \subset$ 平面 PBD , 故平面 $PBD \perp$ 平面 POC (5分)

(II) 以 O 为原点, CD 的中垂线为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $P(0, 0, 3)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $E\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$,

所以 $\overrightarrow{AE} = \left(0, \frac{4}{3}, 2\right)$, $\overrightarrow{CE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{6}, 2\right)$ (7分)



设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.

因为 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} \frac{4}{3}y + 2z = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{6}y + 2z = 0. \end{cases}$ 令 $y = 1$, 则 $\mathbf{n} = \left(-\sqrt{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$ (9分)

因为 x 轴垂直于平面 PAB , 所以 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$ 为平面 PAB 的一个法向量. (10分)

设平面 AEC 与平面 PAB 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1+\frac{4}{9}}} = \frac{3\sqrt{30}}{20},$

即平面 AEC 与平面 PAB 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{30}}{20}$ (12 分)

20. 命题意图 本题考查等比数列的性质及数列求和.

解析 (I) 设 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 的公比为 q .

$$\therefore a_{n+2} = \lambda a_{n+1} - 2a_n,$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = \lambda a_{n+1} - 2a_n - a_{n+1} = (\lambda - 1)a_{n+1} - 2a_n = (\lambda - 1)\left(a_{n+1} - \frac{2}{\lambda - 1}a_n\right) = q(a_{n+1} - a_n). \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{2}{\lambda - 1} = 1, \text{ 解得 } \lambda = 3, \therefore q = 2. \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } a_2 - a_1 = 1, \therefore a_{n+1} - a_n = 2^{n-1}. \quad \dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\therefore a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{n-2} = 1 + \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} = 2^{n-1},$$

$$\text{即 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^{n-1}. \quad \dots\dots (6 \text{ 分})$$

(II) 当 $b_m = k = 1$ 时, $m \in [1, 2)$, 共 $2 - 1 = 1$ 项,

当 $b_m = k = 2$ 时, $m \in [2, 4)$, 共 $4 - 2 = 2$ 项,

当 $b_m = k = 3$ 时, $m \in [4, 8)$, 共 $8 - 4 = 4$ 项,

.....

当 $b_m = k = n$ 时, $m \in [2^{n-1}, 2^n)$, 共 $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ 项, (8 分)

$$\text{又 } b_{2^n} = n + 1,$$

$$\therefore \{b_n\} \text{ 的前 } 2^n \text{ 项和为 } 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} + n + 1. \quad \dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{记 } S_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{则 } 2S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n,$$

$$\text{作差可得 } -S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n \cdot 2^n = (1 - n)2^n - 1,$$

$$\therefore S_n = (n - 1)2^n + 1. \quad \dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{因此, 数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } 2^n \text{ 项和为 } S_n + n + 1 = (n - 1)2^n + n + 2. \quad \dots\dots (12 \text{ 分})$$

21. 命题意图 本题考查导数的综合应用.

$$\text{解析 (I) 由题意 } f'(x) = \frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2} (x > 0). \quad \dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } k \leq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{k(x^2+1) - (x-1)^2}{x^2} \leq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减.} \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } 0 < k < 1 \text{ 时, 令 } f'(x) = \frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2} = 0,$$

$$\text{得 } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k-1}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k-1}.$$

$$\text{因为 } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k-1} > x_2 = \frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k-1} > 0,$$

$$\text{所以当 } x \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k-1}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减,}$$

当 $x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}, \frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1} \right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}, +\infty \right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. (4 分)

当 $k \geq 1$ 时, $f'(x) = \frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (5 分)

综上: 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $0 < k < 1$ 时, 在 $\left(0, \frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k - 1} \right)$ 上 $f(x)$ 单调递增,

在 $\left(\frac{-1 + \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}, \frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1} \right)$ 上 $f(x)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{-1 - \sqrt{2k - k^2}}{k - 1}, +\infty \right)$ 上 $f(x)$ 单调递增;

当 $k \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. (6 分)

(II) 由 (I) 可知, 当 $k = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $f(1) = 0$, 所以当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq 0$, 即 $2\ln x - \frac{x^2-1}{x} \leq 0$, 即 $\ln x \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ (7 分)

令 $x = 1 + \frac{1}{n}$, 则 $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ (8 分)

所以 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$,

$\ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$,

$\ln(n-1) - \ln(n-2) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \right)$,

.....

$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$,

$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$.

同向不等式相加可得, $\ln(n+1) - \ln 1 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ (10 分)

所以 $\ln(n+1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{n+2}{2(n+1)}$, 得证. (12 分)

22. 命题意图 本题考查函数的新定义及导数的综合应用.

解析 (I) 因为 $f(x) = e^x$, $g(x) = -x^2 + x$ 在区间 $\left[-2, \frac{1}{2} \right]$ 上单调递增,

不妨设 $-2 \leq x_2 < x_1 \leq \frac{1}{2}$, 由 $|g(x_1) - g(x_2)| > m|f(x_1) - f(x_2)|$ 得 $g(x_1) - mf(x_1) > g(x_2) - mf(x_2)$.

令 $h(x) = g(x) - mf(x) = -x^2 + x - me^x$, 则 $h(x_1) > h(x_2)$ (2 分)

所以 $h(x)$ 在 $\left[-2, \frac{1}{2} \right]$ 上存在单调递增区间,

即 $h'(x) = -2x + 1 - me^x > 0$ 在 $\left[-2, \frac{1}{2} \right]$ 上有解,

即 $m < \frac{1-2x}{e^x}$ 在 $\left[-2, \frac{1}{2} \right]$ 上有解. (4 分)

当 $x \in \left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 时, 设 $p(x) = \frac{1-2x}{e^x}$, 则 $p'(x) = \frac{2x-3}{e^x} < 0$, 即 $p(x)$ 在 $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减,

故 $p(x)_{\max} = p(-2) = 5e^2$, 则 $m < 5e^2$.

故实数 m 的取值范围为 $(1, 5e^2)$ (6 分)

(II) 因为 $f(x) = e^x, g(x) = -x^2 + x$, 所以 $f'(x) = e^x, g'(x) = -2x + 1$.

设直线 l 分别与函数 $f(x), g(x)$ 的图象相切于点 $A(x_1, e^{x_1}), B(x_2, -x_2^2 + x_2)$, 易知直线 l 的斜率存在,

则 $f'(x_1) = g'(x_2) = k_{AB}$, 即 $e^{x_1} = -2x_2 + 1 = \frac{e^{x_1} + x_2^2 - x_2}{x_1 - x_2}$ (7 分)

由 $e^{x_1} = -2x_2 + 1$, 得 $x_2 = \frac{1 - e^{x_1}}{2}$,

代入 $e^{x_1}(x_1 - x_2) = e^{x_1} + x_2^2 - x_2$ 中, 得 $x_1 e^{x_1} - \frac{3e^{x_1}}{2} + \frac{e^{2x_1}}{4} + \frac{1}{4} = 0$,

令 $F(x) = x e^x - \frac{3e^x}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{4}$,

则 $F'(x) = (x+1)e^x - \frac{3e^x}{2} + \frac{e^{2x}}{2} = \frac{e^x}{2}(e^x + 2x - 1)$ (8 分)

令 $\varphi(x) = e^x + 2x - 1$, 则 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $\varphi(0) = 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(0) = -1 < 0$,

又 $F(1) = e - \frac{3e}{2} + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 2e + 1}{4} > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上仅有一个零点. (10 分)

因为 $F(-100) = \frac{-100}{e^{100}} + \frac{1}{4 \cdot e^{200}} - \frac{6}{4 \cdot e^{100}} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} - \frac{100}{e^{100}} - \frac{6}{4 \cdot e^{100}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{400}{e^{100}} - \frac{6}{e^{100}}\right) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上仅有一个零点. (11 分)

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点,

故函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象存在两条公切线. (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯