2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2023 年全国高中数学联合竞赛
一试（B 卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 函数 $y=\log_{2023}(x^2-9x-10)$ 的定义域为__________.

2. 若实数 m 满足 $2^{2^m}=4^{4^m}$，则 m 的值为__________.

3. 若双曲线 $\Gamma_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 的离心率为 3，则双曲线 $\Gamma_2:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 的离心率为__________.

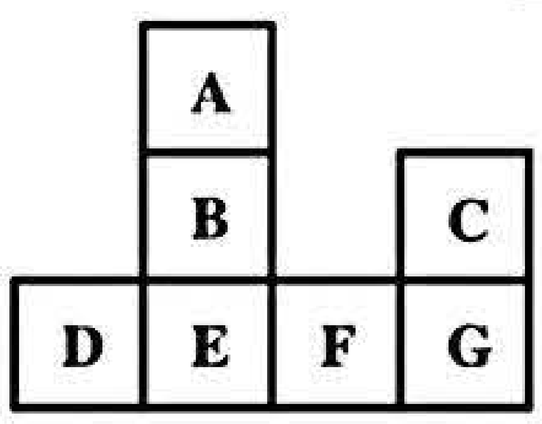
4. 设 n 为正整数. 从 $1,2,\cdots,n$ 中随机选出一个数 a，若事件“$2<\sqrt{a}\le 4$”发生的概率为 $\frac{2}{3}$，则 n 的所有可能的值为__________.

5. 平面上五点 A,B,C,D,E 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=4$，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=5$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=8$，则 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的值为__________.

6. 将所有非完全平方的正奇数与所有正偶数的立方从小到大排成一列（前若干项依次为$3,5,7,8,11,13,\cdots$），则该数列的第2023项的值为__________.

7. 设$P-ABCD$与$Q-ABCD$为两个正四棱锥，且$\angle PAQ=90^\circ$，点M在线段AC上，且$CM=3AM$．将异面直线PM,QB所成的角记为θ，则$\cos\theta$的最大可能值为__________.

8. 七张标有A,B,C,D,E,F,G的正方形卡片构成下图．现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按D,A,B,E,C,F,G的次序取走卡片，但不可按D,B,A,E,C,F,G的次序取走卡片），则取走这七张卡片的不同次序的数目为__________.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）将方程 $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的所有正实数解从小到大依次记为 $x_1, x_2, x_3, \cdots$．求 $x_1+x_2+\cdots+x_{20}$ 的值．

10.（本题满分 20 分）平面直角坐标系中，圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切，与椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 有唯一的公共点 $A(8,9)$，且 Ω 的圆心位于 Γ 内．试比较 Ω 的直径与 Γ 的焦距的大小．

11.（本题满分 20 分）求出所有满足下面要求的不小于 -1 的实数 t：对任意 $a\in[-2,t]$，总存在 $b,c\in[-2,t]$，使得 $ab+c=1$．

2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨2023年全国高中数学联合竞赛
一试（B卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1. 函数 $y=\log_{2023}(x^2-9x-10)$ 的定义域为__________.

答案： $(-\infty,-1)\cup(10,+\infty)$.

解： 由 $x^2-9x-10=(x+1)(x-10)>0$，解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(10,+\infty)$.

2. 若实数 m 满足 $2^{2^m}=4^{4^m}$，则 m 的值为__________.

答案： -1.

解： 由于 $2^{2^m}=4^{4^m}=2^{2\times4^m}$，故 $2^m=2\times4^m$，两边约去 $2^m(\neq0)$ 得 $1=2^{m+1}$.
所以 $m=-1$.

3. 若双曲线 $\Gamma_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$ 的离心率为3，则双曲线 $\Gamma_2:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 的离心率为__________.

答案： $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

解： 设 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，则 Γ_1 的离心率 $e_1=\frac{c}{a}$，Γ_2 的离心率 $e_2=\frac{c}{b}$.

因此 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$. 由 $e_1=3$ 知 $\frac{1}{e_2^2}=\frac{8}{9}$，得 $e_2=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

4. 设 n 为正整数. 从 $1,2,\cdots,n$ 中随机选出一个数 a，若事件"$2<\sqrt{a}\le4$"发生的概率为 $\frac{2}{3}$，则 n 的所有可能的值为__________.

答案： 12和18.

解： 注意到 $2<\sqrt{a}\le4$，a 为正整数，即 $a\in\{5,6,\cdots,16\}$.
根据条件，显然 $n\ge5$.

当 $5\le n\le16$ 时，有 $\frac{n-4}{n}=\frac{2}{3}$，得 $n=12$.

当 $n\ge17$ 时，有 $\frac{12}{n}=\frac{2}{3}$，得 $n=18$.

综上，n 的所有可能的值为12和18.

5. 平面上五点 A,B,C,D,E 满足 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=4$，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=5$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=8$，则 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的值为__________.

答案：3．

解：记$\overrightarrow{EB}=\vec{b},\ \overrightarrow{EC}=\vec{c}$．由条件知$\overrightarrow{EA}=2\vec{b}-\vec{c},\ \overrightarrow{ED}=2\vec{c}-\vec{b}$，于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}&=(2\vec{b}-\vec{c})\cdot(2\vec{c}-\vec{b})=5\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2\\&=3\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot(2\vec{b}-\vec{c})-\vec{c}\cdot(2\vec{c}-\vec{b})\\&=3\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}\\&=3\times5-4-8=3.\end{aligned}$$

6. 将所有非完全平方的正奇数与所有正偶数的立方从小到大排成一列（前若干项依次为$3,5,7,8,11,13,\cdots$），则该数列的第2023项的值为__________.

答案：4095．

解：用$\{a_n\}$表示题述数列．前2023个正奇数依次为$1,3,5,\cdots,4045$，其中恰有$1^2,3^2,\cdots,63^2$这32个完全平方数，而在小于4045的正整数中恰有$2^3,4^3,\cdots,14^3$这7个偶立方数．因此4045是$\{a_n\}$的第$2023-32+7=1998$项．

进而$a_{2023}=a_{1998}+2\times25=4095$（注意$65^2>4095$且$16^3>4095$）．

7. 设$P-ABCD$与$Q-ABCD$为两个正四棱锥，且$\angle PAQ=90°$，点M在线段AC上，且$CM=3AM$．将异面直线PM,QB所成的角记为θ，则$\cos\theta$的最大可能值为__________.

答案：$\dfrac{2}{3}$．

解：设正方形$ABCD$的中心为O，由条件知PQ垂直平面$ABCD$于点O，又$\angle PAQ=90°$，由射影定理知$OP\cdot OQ=OA^2$．显然O在P,Q之间．

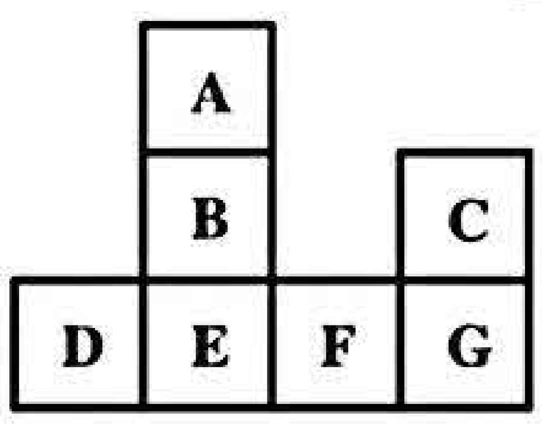
以O为原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$方向为$x,y,z$轴的正方向，建立空间直角坐标系，不妨设$A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ P(0,0,a),\ Q\left(0,0,-\dfrac{1}{a}\right)(a>0)$．

易知$M\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$，因此$\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{1}{2},0,-a\right),\ \overrightarrow{QB}=\left(0,1,\dfrac{1}{a}\right)$．

所以$\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QB}\right|}{\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QB}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}+a^2\right)\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)}}\le\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}$．

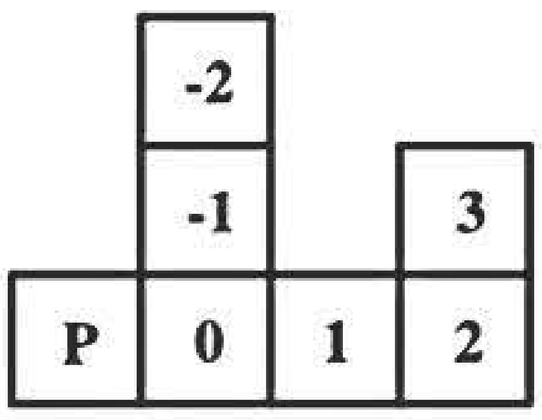
当$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\cos\theta$取到最大可能值$\dfrac{2}{3}$．

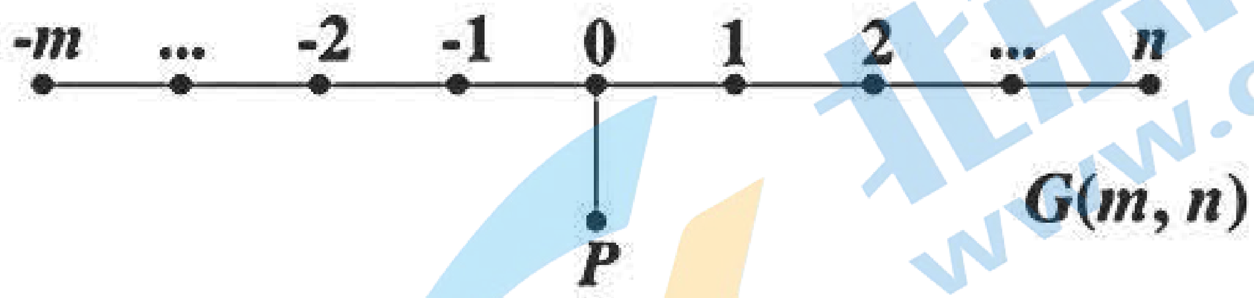
8. 七张标有A,B,C,D,E,F,G的正方形卡片构成下图．现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按D,A,B,E,C,F,G的次序取走卡片，但不可按D,B,A,E,C,F,G的次序取走卡片），则取走这七张卡片的不同次序的数目为__________.



答案：164．

解：如左下图重新标记原图中的七张卡片．现将每张卡片视为顶点，有公共边的两张卡片所对应的顶点之间连一条边，得到一个七阶图，该图可视为右下图中的 $m+n+2$ 阶图 $G(m,n)$ 在 $m=2,n=3$ 时的特殊情况．





取卡片（顶点）的规则可解释为：

(i) 若顶点 P 已取走，则以下每步取当前标号最小或最大的顶点，直至取完；

(ii) 若顶点 P 未取走，则必为某个 $G(m,n)\,(m,n\geq 0)$ 的情形，此时若 $m=0$，则将 P 视为 -1 号顶点，归结为 (i) 的情形；若 $m\neq 0,n=0$，则将 P 视为1号顶点，归结为 (i) 的情形；若 $m,n\geq 1$，则当前可取 P 或 $-m$ 号顶点或 n 号顶点，分别归结为 (i) 或 $G(m-1,n)$ 或 $G(m,n-1)$ 的情形．

设 $G(m,n)$ 的符合要求的顶点选取次序数为 $f(m,n)$，本题所求即为 $f(2,3)$．

由 (i)、(ii) 知 $f(m,0)=2^{m+1}\,(m\geq 0)$，$f(0,n)=2^{n+1}\,(n\geq 0)$，且

$$f(m,n)=2^{m+n}+f(m-1,n)+f(m,n-1)\,(m,n\geq 1),$$

由此可依次计算得 $f(1,1)=12$，$f(1,2)=f(2,1)=28$，$f(1,3)=60$，$f(2,2)=72$，$f(2,3)=164$，即所求数目为164．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分） 将方程 $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的所有正实数解从小到大依次记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots$．求 $x_1+x_2+\cdots+x_{20}$ 的值．

解：由于 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，原方程等价于 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$．所以

$$x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\,(k\in\mathbf{Z}).$$ ……………4 分

其中所有正实数解为 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{12}\,(k=1,2,\cdots)$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{12}\,(k=0,1,\cdots)$，故

$$x_{2m-1}=2(m-1)\pi+\frac{7\pi}{12},\ x_{2m}=2m\pi-\frac{\pi}{12}\,(m=1,2,\cdots).$$ ……………8 分

从而

$$x_1+x_2+\cdots+x_{20}=\sum_{m=1}^{10}(x_{2m-1}+x_{2m})=\sum_{m=1}^{10}\left(2(m-1)\pi+\frac{7\pi}{12}+2m\pi-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{10}\left(4m\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=4\pi\cdot\frac{10\times 11}{2}-\frac{3}{2}\pi\cdot 10=205\pi.$$ ……………16 分

10.（本题满分 20 分） 平面直角坐标系中，圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切，与椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 有唯一的公共点 $A(8,9)$，且 Ω 的圆心位于 Γ 内．试比较 Ω 的直径与 Γ 的焦距的大小．

解：根据条件，可设圆心为$P(r,r)$，则由$|PA|=r$知$(r-8)^2+(r-9)^2=r^2$，解得$r=5$或$r=29$．因为P在Γ内，故$r=5$． ……………5 分

椭圆Γ在点$A(8,9)$处的切线为$l:\dfrac{8x}{a^2}+\dfrac{9y}{b^2}=1$，其法向量可取为$\vec{n}=\left(\dfrac{8}{a^2},\dfrac{9}{b^2}\right)$．

……………10 分

由条件，l也是圆Ω的切线，故$\vec{n}$与$\overrightarrow{PA}$平行，而$\overrightarrow{PA}=(3,4)$，所以$\dfrac{32}{a^2}=\dfrac{27}{b^2}$．

又$\dfrac{64}{a^2}+\dfrac{81}{b^2}=1$，解得$a^2=160,b^2=135$． ……………15 分

从而Γ的焦距为$2\sqrt{a^2-b^2}=10$．又Ω的直径为$2r=10$，故Ω的直径与Γ的焦距相等． ……………20 分

11.（本题满分 20 分）求出所有满足下面要求的不小于-1的实数t：对任意$a\in[-2,t]$，总存在$b,c\in[-2,t]$，使得$ab+c=1$．

解：当$t=-1$时，对任意$a\in[-2,-1]$，取$b=\dfrac{2}{a},c=-1$，则$b,c\in[-2,-1]$，且$ab+c=2-1=1$，满足要求． ……………5 分

当$-1<t<0$时，取$a=t$，则对任意$b,c\in[-2,t]$，有

$$ab+c\le|tb|+t\le2|t|+t=-t<1,$$

不满足要求． ……………10 分

当$0\le t<1$时，取$a=0$，则对任意$b,c\in[-2,t]$，有$ab+c=c\le t<1$，不满足要求． ……………15 分

当$t\ge1$时，对任意$a\in[-2,t]$，取$b=0,c=1$，则$b,c\in[-2,t]$，且$ab+c=1$，满足要求．

综上，实数t满足要求当且仅当$t\in\{-1\}\cup[1,+\infty)$． ……………20 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。