

北京市第八十中学 2023~2024 学年度第二学期开学考试

高三数学

2024年2月

班级 _____ 姓名 _____ 考号 _____

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

提示: 试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效。

在答题卡上, 选择题用 2B 铅笔作答, 其他试题用黑色签字笔作答。

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{-1, 1, 2, 3\}$ C. $\{1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
2. 已知复数 $z = \frac{i}{1-i}$ (i 为虚数单位), \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则 \bar{z} 在复平面上所对应的点位于 ()
- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} - \vec{b} = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ ()
- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. 1 D. $2\sqrt{5}$
4. 下列函数既是偶函数, 又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()
- A. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ B. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$
C. $f(x) = \lg(x^2 + 1)$ D. $f(x) = x - \frac{1}{x}$
5. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数为 ()
- A. -5 B. -10 C. 5 D. 10
6. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 且 A 到 C 焦点的距离为 3, 到 y 轴的距离为 2, 则 $p =$ ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 $\angle A$ 的角平分线, D 在线段 BC 上, 若 $|AB|=2$, $|AD|=|AC|=1$, 则 $|BD|=(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{x+a}$, 则“ $a > -1$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上存在最小值”的 (\quad)

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

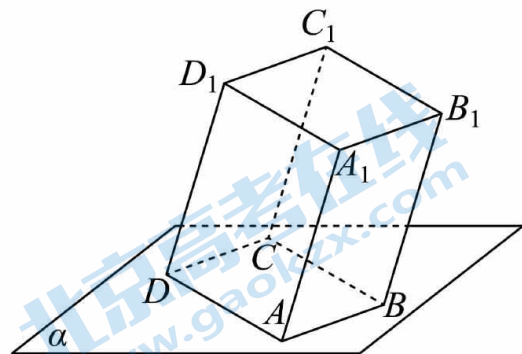
9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1} - 4a_n + 2 = 0$, 则下列命题正确的是 (\quad)

- A. 若数列 $\{a_n\}$ 为常数列, 则 $a_1 = 1$ B. 存在 $a_1 \in (1, 2)$, 使数列 $\{a_n\}$ 为递减数列
C. 任意 $a_1 \in (0, 1)$, 都有 $\{a_n\}$ 为递减数列 D. 任意 $a_1 \in (2, +\infty)$, 都有 $2 < a_n \leq a_1$

10. 如图, 已知棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 在平面 α 的同侧, 顶点 A 在平面 α 上, 顶点 B, D 到平面 α 的距离分别为 1 和 $\sqrt{2}$, 则顶点 C_1 到平面 α 的距离

为 (\quad)

- A. $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1$ B. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
C. $\sqrt{6} + 1$ D. $\sqrt{2} + 1$



二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\frac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域为_____.

12. 已知双曲线 $y^2 - mx^2 = 1$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x - y = 0$, 则该双曲线的离心率为_____.

13. 已知命题 p : 若 $a + b \geq 1$, 则 $a^3 + b^3 \geq 1$. 能说明 p 为假命题的一组 a, b 的值为 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. “中国剩余定理”又称“孙子定理”, 可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》卷下第十六题的“物不知数”问题, 原文如下: 今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二. 问物几何? 现有一个相关的问题: 将 1 到 2023 这 2023 个自然数中被 3 除余 2 且被 5 除余 4 的数按照从小到大的顺序排成一列, 构成一个数列, 则该数列的项数为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \tan(\sin x) + \tan(\cos x)$, 则下列说法正确的是_____.

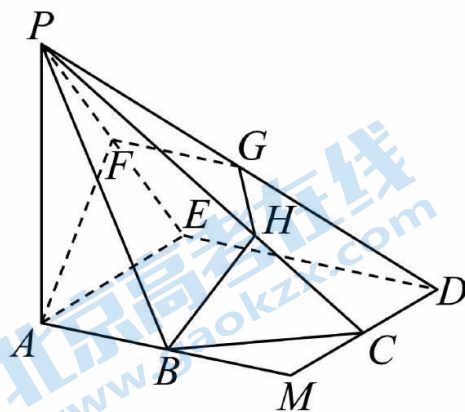
- ① 2π 是 $f(x)$ 的周期
 ② $f(x)$ 的图象有对称中心, 没有对称轴
 ③ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $F(x) < \tan(\sin x + \cos x)$
 ④ 对任意 $k \in \mathbf{Z}$, $f(x)$ 在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right)$ 上单调

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分.

16. 如图, 正方体 $MAD E$ 的边长为 2, B, C 分别为 AM, MD 的中点, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, F 为棱 PE 的中点, 平面 ABF 与棱 PD, PC 分别交于 G, H .

(1) 求证: $AB \parallel FG$;

(2) 若 $PA \perp$ 底面 $ABCDE$, 且 $PA = AE$, 求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小, 并求线段 PH 的长.



17. 已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x + \sin \omega x \cos \omega x + b$ ($\omega > 0, b \in \mathbf{R}$). 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个, 使得函数 $f(x)$ 的解析式唯一确定

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及最小值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-t, t)$ ($t > 0$) 上有且仅有 2 个零点, 求 t 的取值范围.

条件①: 函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$;

条件②: 函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$;

条件③: 函数 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为 1.

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

18. 某公司在 2013~2022 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示:

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年生产台数(单位:万台)	3	5	5	6	6	9	9	10	10	a
年返修台数(单位:台)	32	38	54	58	52	71	64	80	75	b
年利润(单位:百万元)	3.85	4.50	4.20	5.50	6.10	9.65	9.98	10.00	11.50	c

注: 年返修率=年返修台数÷年生产台数.

(1)从 2013~2021 年中随机抽取两年, 求这两年中至少有一年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率;

(2)公司规定: 若年返修率不超过千分之一, 则该公司生产部门当年考核优秀. 现从 2013~2021 年中随机选出 3 年, 记 X 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数, 求 X 的分布列和期望;

(3)记公司在 2013~2017 年, 2018~2022 年的年生产台数的方差分别为 s_1^2 , s_2^2 . 若 $s_1^2 = s_2^2$, 请写出 a 的值. (只需写出结论)

(注: $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + y^2 = 1 (m > 0)$, F_1, F_2 为椭圆的焦点, M 为椭圆上一点, 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2\sqrt{2}$, O 为坐标原点.

(1)求椭圆 C 的方程和离心率.

(2)设点 $P(0, 2)$, 过 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 满足 $\overrightarrow{PA} = t\overrightarrow{PB}$, 点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{DB}$ 满足, 求证: 点 D 在定直线上.

20. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - x - 1$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若对任意的实数 k, b , 函数 $y = f(x) + kx + b$ 与直线 $y = kx + b$ 总相切, 则称函数 $f(x)$ 为“恒切函数”. 当 $a=1$ 时, 若函数 $g(x) = \frac{e^x}{2} f(x) + m$ 是“恒切函数”, 求证: $-\frac{1}{8} < m \leq 0$.

21. 记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n , 最小值为 m_n , 令 $b_n = \frac{M_n + m_n}{2}$.

(1) 若 $a_n = 2^n - 3n$, 请写出 b_1, b_2, b_3, b_4 的值;

(2) 求证: “数列 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列”是“数列 $\{b_n\}$ 是递增的等差数列”的充要条件;

(3) 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| < 2023, |b_n| = 1$, 求证: 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\forall n \geq k$, 有 $b_{n+1} = b_n$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

