

20220607 项目第一次模拟测试卷

文科数学

本试卷共 4 页，23 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡上，并在相应位置贴好条形码。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案信息涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案。
3. 非选择题必须用黑色水笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来答案，然后再写上新答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一. 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x-2}{x} < 0\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-2, 2)$ C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 1)$

2. 已知 $i \cdot \bar{z} = z$ (i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面内所对应的点一定在

- A. 实轴上 B. 虚轴上
C. 第一、三象限的角平分线上 D. 第二、四象限的角平分线上

3. 根据分类变量 x 与 y 的观察数据，计算得到 $K^2 = 2.974$ ，依据下表给出的 K^2 独立性检验中的小概率值和相应的临界值，作出下列判断，正确的是

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- A. 有 95% 的把握认为变量 x 与 y 独立
 B. 有 95% 的把握认为变量 x 与 y 不独立
 C. 变量 x 与 y 独立，这个结论犯错误的概率不超过 10%
 D. 变量 x 与 y 不独立，这个结论犯错误的概率不超过 10%

4. 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$, $a_{m+n} = a_m a_n$, 则 $a_4 =$

- A. 8 B. 16 C. 12 D. 24

5. 圆柱形玻璃杯中盛有高度为 10cm 的水，若放入一个玻璃球（球的半径与圆柱形玻璃杯内壁的底面半径相同）后，水恰好淹没了玻璃球，则玻璃球的半径为

- A. $\frac{20}{3}$ cm B. 15cm C. $10\sqrt{3}$ cm D. 20cm

6. $x, y \in \mathbb{R}$, 则 “ $x^2 + y^2 \leq 1$ ” 是 “ $x + y + 2 > 0$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(a-3) = f(a+2)$, 则 $f(a) =$

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. 0

8. 已知中心在原点的双曲线 E 的离心率为 2, 右顶点为 A , 过 E 的左焦点 F 作 x 轴的垂线 l , 且 l 与 E 交于 M, N 两点, 若 $\triangle AMN$ 的面积为 9, 则 E 的标准方程为

A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

9. 纳皮尔在他的《奇妙的对数表》一书中说过: 没有什么比大数的运算更让数学工作者头痛, 更阻碍了天文学的发展. 许凯和斯蒂菲尔这两个数学家都想到了构造了如下一个双数列模型的方法处理大数运算.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
11	12	...	19	20	21	22	23	24	25	...
2048	4096	...	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216	33554432	...

如 512×1024 , 我们发现 512 是 9 个 2 相乘, 1024 是 10 个 2 相乘. 这两者的积, 其实就是 2 的个数做一个加法. 所以只需要计算 $9 + 10 = 19$. 那么接下来找到 19 对应的数 524288, 这就是结果了. 若 $x = \log_2(20211226 \times 1314520)$, 则 x 落在区间

- A. (15, 16) B. (22, 23) C. (42, 44) D. (44, 46)

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $b = 3, c = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2 \sin B$, 则 $\cos A =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

11. 已知 F_1, F_2, B 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点、右焦点、上顶点, 连接 BF_2 并延长交 C 于点 P , 若 $\triangle PF_1B$ 为等腰三角形, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知 $f(x) = \frac{x}{x-1} (x > 1)$, 若 α, β 分别是方程 $f(x) = e^x, f(x) = \ln x$ 的根, 则下列说法: ① $\alpha + \beta > 4$; ② $e < \alpha\beta < 2e^2$; ③ $\alpha + \beta = \alpha\beta$, 其中正确的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

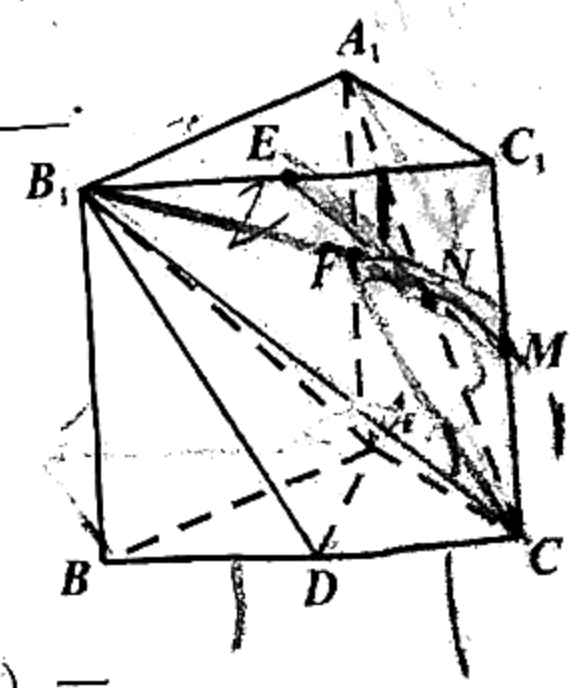
13. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (2, \lambda)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 $\lambda =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴在原点右侧的第一个交点为 $(1, 0)$, 在 y 轴右侧的第一个最高点为 $(3, 2)$, 则 $f(-1) =$ _____.

15. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E, F, M, N 分别是 $BC, B_1C_1, AA_1, CC_1, A_1C$ 的中点, 给出下列四个判断:

- ① $EF \parallel$ 平面 ADB_1 ; ② $EM \parallel$ 平面 ADB_1 ;
 ③ $EN \parallel$ 平面 ADB_1 ; ④ $A_1M \parallel$ 平面 ADB_1 ;

则错误的序号为 _____.

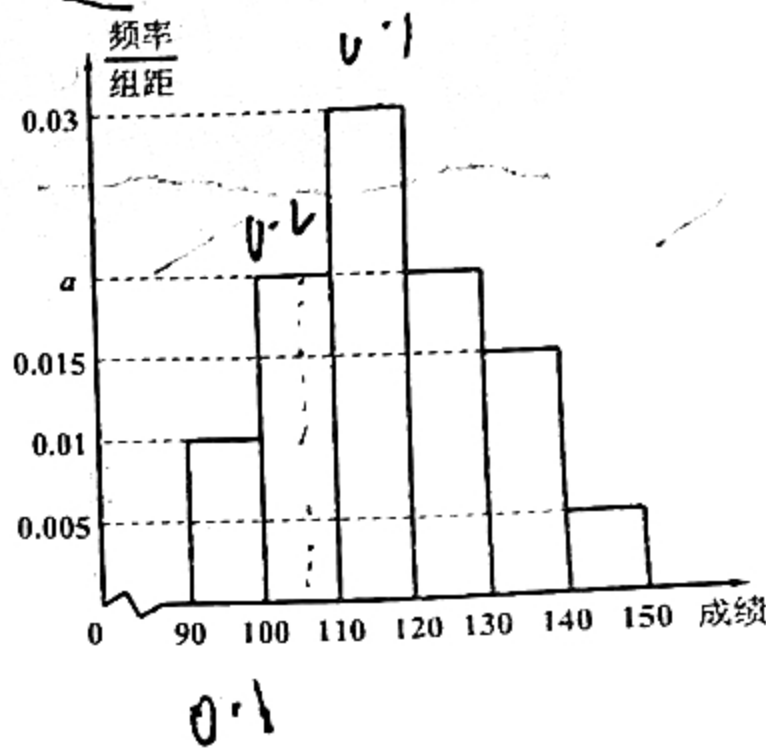


16. 无限循环小数可以通过等比数列法转化为分数. 如 $0.\dot{2}1 = 2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 1 \times 10^{-4} + \dots = 2 \times \frac{0.1}{1-0.01} + 1 \times \frac{0.01}{1-0.01} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$; 应用上述方法转化 $0.31\dot{3}2 = \frac{n}{m}$ (m, n 为互质整数), 则 $\frac{n}{m} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

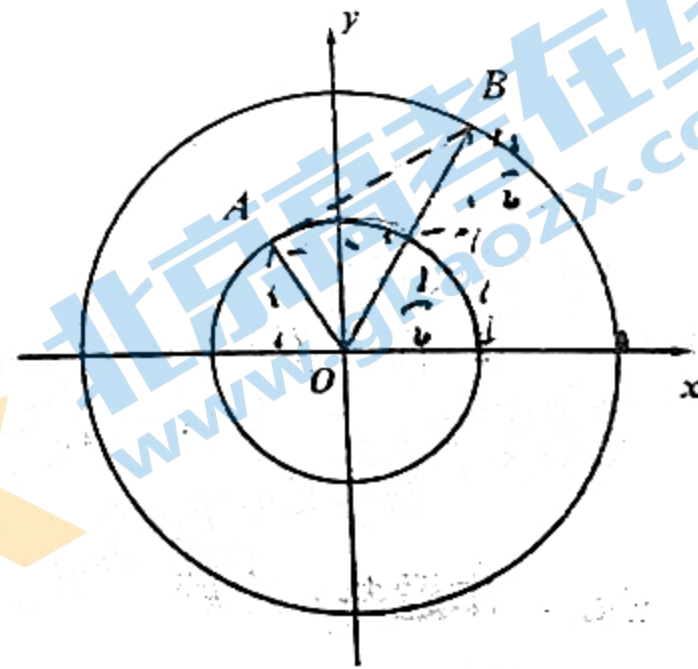
(一) 必考题:

17. (12 分) 某公司计划招聘新员工 40 名, 现有 100 名应届毕业生应聘, 采用先笔试再面试相结合的方式, 笔试结束后, 依据笔试成绩按 1:1.5 的比例确定入围面试名单. 这 100 名应届毕业生笔试成绩的频率分布直方图如图所示.



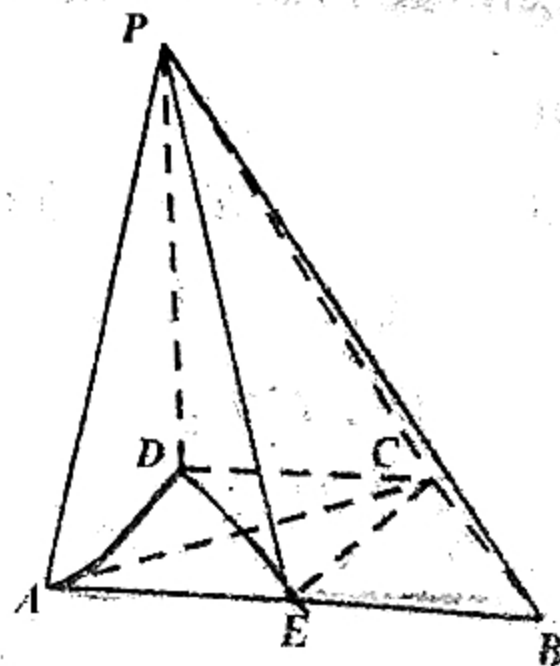
- 求 a 的值及笔试成绩的平均分;
- 根据频率分布直方图, 请预估面试入围分数线 (结果保留整数).

18. (12 分) 已知圆心在坐标原点的两个同心圆的半径分别为 1 和 2, 点 A 和点 B 分别从初始位置 $(1,0)$ 和 $(2,0)$ 处, 按逆时针方向以相同速率同时作圆周运动.



- 当点 A 运动的路程为 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 求线段 AB 的长度;
- 记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 $x_1 + y_2$ 的最大值.

19. (12 分) 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 的底面为直角三角形, E 为斜边 AB 的中点, 顶点 P 在底面的投影为 D , $CD \parallel AB$, $EC \perp PB$, $PD = AB = 2BC = 2$.



- 求 CD 的长;
- 求异面直线 PA 与 BC 所成角的余弦值.

20. (12分) 已知面积为 $48\sqrt{3}$ 的等边 $\triangle ABO$ (O 是坐标原点) 的三个顶点都在抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 过点 $P(-\frac{p}{2}, 2)$ 作抛物线 E 的两条切线分别交 y 轴于 M, N 两点.

(1) 求 p 的值;

(2) 求 $\triangle PMN$ 的外接圆的方程.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = ax + \cos x (0 \leq x \leq \pi, a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 恰有两个极值点, 记极大值和极小值分别为 M, m , 求证: $\frac{M+m}{a}$ 为常数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - \frac{1}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴的非负

半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$.

(1) 求直线 l 的极坐标方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 在直角坐标系第一象限交于点 A , 点 B 的极坐标为 $(4, \frac{\pi}{6})$, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

23. (10分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |ax - 2| + |2x + a| (a \geq 2)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) \leq \frac{1}{2}a + 3$, 求 a 的取值范围.

20220607 项目第一次模拟测试卷 文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	B	B	A	B	A	D	D	C	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13. $-\frac{3}{2}$

14. -2

15. ①②④

16. $\frac{1043}{3330}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 【解析】(1) 由图知 $(0.005 + 0.01 + 0.015 + 2a + 0.03) \times 10 = 1$,

则 $a = 0.02$,3 分

所以平均分为 $95 \times 0.1 + 105 \times 0.2 + 115 \times 0.3 + 125 \times 0.2 + 135 \times 0.15 + 145 \times 0.05 = 117.5$;

.....6 分

(2) 因为面试比例为 1:1.5, 则应有 60 人参加面试, 故频率为 0.6,8 分

设分数线为 m , 则 $(120 - m) \times 0.03 + 0.2 + 0.15 + 0.05 = 0.6$, 解得 $m \approx 113$ (取整)

所以预估面试入围分数线为 113 分.12 分

18. 【解析】(1) 因为点 A 运动的路程为 $\frac{2\pi}{3}$, 所以 $\angle AOx = \frac{2\pi}{3}$ 2 分

因为 $r_A = 1, r_B = 2$, 所以 $\angle BOx = \frac{\pi}{3}$, 则 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,4 分

由余弦定理知 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$,

得 $AB^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$, 所以 $|AB| = \sqrt{3}$6 分

(2) 设 $\angle BOx = \theta$, 则 $\angle AOx = 2\theta$,

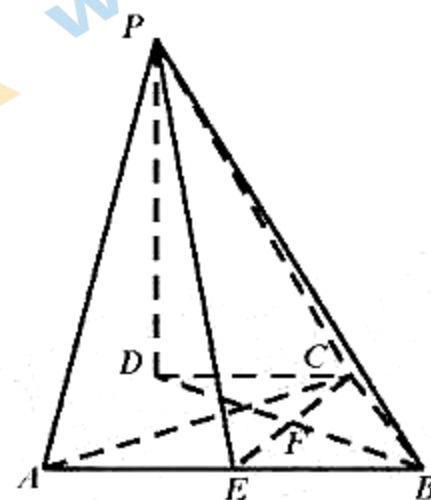
所以 $A(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $B(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$,8 分

则 $x_1 + y_2 = \cos 2\theta + 2 \sin \theta = -2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1 = -2(\sin \theta - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$ 10 分

所以当 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 + y_2$ 取得最大值 $\frac{3}{2}$12分

19. 【解析】(1) 连接 BD 交 EC 于点 F ,
由题意知, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp EC$,
又因为 $EC \perp PB$, $PD \cap PE = P$,

所以 $EC \perp$ 平面 PBD , 则 $EC \perp BD$,2分
因为 $PD = AB = 2BC = 2$, E 为斜边 AB 的中点,
所以 $BE = BC = EC = 1$, 则 $\angle EBD = \angle CBD$,4分
因为 $CD \parallel AB$, 所以 $\angle EBD = \angle CDB$,
则 $\angle CDB = \angle CBD$, 所以 $CD = BC = 1$;6分



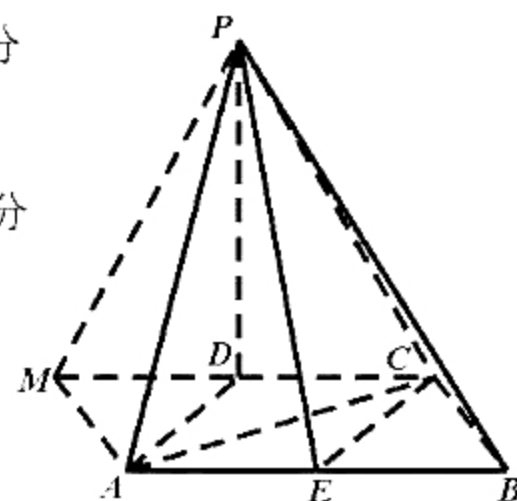
(2) 连接 AD , 因为 $AB = 2, BC = 1$, AB 为斜边, 所以 $\angle ABC = 60^\circ$,

因为 $DC = BC = 1$, 所以 $AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$,8分
过点 A 作 BC 的平行线交 CD 的延长线于点 M ,

则 $AM = 1$, $DM = 1$, $PA = \sqrt{5}$, $PM = \sqrt{5}$,10分

$$\text{所以 } \cos \angle PAM = \frac{PA^2 + AM^2 - PM^2}{2 \cdot PA \cdot AM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

所以异面直线 PA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.



.....12分

20. 【解析】1) 因为等边 $\triangle ABO$ 的面积为 $48\sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABO$ 的边长 $|OA| = 8\sqrt{3}$,2分

结合抛物线的对称性, 得 $A(12, 4\sqrt{3})$, 所以 $(4\sqrt{3})^2 = 2p \times 12$, 所以 $p = 2$;4分

(2) 由 (1) 知 $P(-1, 2)$, 设切线方程为 $y = k(x+1) + 2$

则 $M(0, k_1 + 2), N(0, k_2 + 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+1) + 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 得到 } \frac{k}{4}y^2 - y + k + 2 = 0, \quad \text{.....6分}$$

$$\Delta = 1 - k(k+2) = 0 \text{ 即 } k^2 + 2k - 1 = 0,$$

$\therefore k_1 + k_2 = -2, k_1 k_2 = -1$8分

$\therefore PA \perp PB$, MN 的中点 $E(0, \frac{k_1 + k_2 + 4}{2})$,

将 $k_1 + k_2 = -2$ 代入得出点 $E(0, 1)$,10分

$\therefore r = |PE| = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle PMN$ 的外接圆方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 2$12分

21. 【解析】(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$,1分

令 $f'(x) > 0$, 可得 $\sin x < \frac{1}{2}$, 解得 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$;

令 $f'(x) < 0$, 可得 $\sin x > \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$,3分

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{\pi}{6}), (\frac{5\pi}{6}, \pi)$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$5分

(2) $f'(x) = a - \sin x$, 当 $0 < a < 1$ 时, 设 $f'(x) = 0$ 的解为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$
则 $x_1 + x_2 = \pi$, $a = \sin x_1 = \sin x_2$,7分

且当 $0 < x < x_1$ 或 $x_2 < x < \pi$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$,

故当 $0 < x < x_1$ 或 $x_2 < x < \pi$ 时 $f(x)$ 单调递增; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f(x)$ 单调递减,9分

所以 $M = f(x_1) = ax_1 + \cos x_1$, $m = f(x_2) = ax_2 + \cos x_2$,

所以 $M + m = a(x_1 + x_2) + \cos x_1 + \cos x_2 = a\pi$,11分

故 $\frac{M + m}{a} = \pi$12分

22. 【解析】(1) 由 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - \frac{1}{2}t, \\ y = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 得到 $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$,

所以直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 6 = 0$,2分

由 $\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$, 得到 $(\rho \cos \theta)^2 = \rho \sin \theta$,

所以曲线 C 的普通方程 $y = x^2$.

.....5分

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} \sqrt{3}x + y - 6 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 12 \end{cases} \text{ (舍)}$$

.....7分

所以点 $A(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$, $B(4, \frac{\pi}{6})$,

.....8分

$$\text{所以 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

.....10分

23. 【解析】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = |2x - 2| + |2x + 2| \leq 6$,

$$\text{则 } |x - 1| + |x + 1| \leq 3,$$

.....2分

① 当 $x \geq 1$ 时, 则原不等式等价于 $2x \leq 3$, 所以 $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$;

② 当 $x \leq -1$ 时, 则原不等式等价于 $-2x \leq 3$, 所以 $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$;

③ 当 $-1 < x < 1$ 时, 则原不等式等价于 $2 \leq 3$, 所以 $-1 < x < 1$;

综上所述: 不等式的解集为 $\{x | -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$;

.....5分

$$(2) \text{ 因为 } a \geq 2, \text{ 所以 } f(x) = \begin{cases} (a+2)x + a - 2, & x \geq \frac{2}{a} \\ (2-a)x + a + 2, & -\frac{a}{2} < x < \frac{2}{a} \\ -(a+2)x + 2 - a, & x \leq -\frac{a}{2} \end{cases}$$

.....7分

$$\text{当 } a \geq 2 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{4}{a} + a,$$

.....9分

由题意可知, 问题转化为 $f(x)_{\min} \leq \frac{3}{2}a + 1$, 即 $\frac{4}{a} + a \leq \frac{1}{2}a + 3$, 解得 $2 \leq a \leq 4$;

综上所述: $2 \leq a \leq 4$.

.....10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。