高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式、立体几何与空间向量、直线与圆、圆锥曲线。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{x|\log_3 x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x<a\}$，若$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. 已知直线$l_1:ax+2y+3=0$和$l_2:x+(a-1)y+1=0$，则“$a=2$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，P是C上一点，若点P的纵坐标为2，且$|PF|=2$，则$p=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

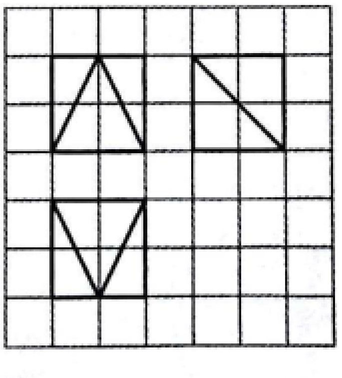
4. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的大小等于

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

5. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1(b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线$l$与双曲线$C$的左支交于$A,B$两点.若$|AB|=|BF_2|$，则$|AF_2|=$

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{17}{3}$　　C. 6　　D. $\frac{20}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰变并逐渐消失. 放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$ (表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$ (T 为半衰期)). 已知碳-14的半衰期为5 730年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约(结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$)

A. 7 650年　　B. 8 890年

C. 9 082年　　D. 10 098年

8. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度；②将图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度；

③将图象向左平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度；④将图象向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度.

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

9. 人利用双耳可以判定声源在什么方位，听觉的这种特性叫做双耳定位效应(简称双耳效应). 根据双耳的时差，可以确定声源 P 必在以双耳为左右焦点的一条双曲线上. 又若声源 P 所在的双曲线与它的渐近线趋近，此时声源 P 对于测听者的方向偏角 α，就近似地由双曲线的渐近线与虚轴所在直线的夹角来确定. 一般地，甲测听者的左、右两耳相距约为20 cm，声源 P 的声波传及甲的左、右两耳的时间差为 3×10^{-5} s，声速为334 m/s，则声源 P 对于甲的方向偏角 α 的正弦值约为

A. 0.004　　B. 0.04　　C. 0.005　　D. 0.05

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3S_n=64-a_n$，若 $a_m\cdot a_k=1$ ($1\leqslant m<k$，$m,k\in\mathbf{N}^*$)，则 k 的取值集合是

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{4,5\}$　　D. $\{3,4,5\}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x-x^2+\pi x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则满足 $f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ 的实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为__________.

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant0,\\x-y-1\geqslant0,\\2x-6y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为__________.

15. 某中学组队到某村参加社会实践活动，村长让学生测量河流两岸 A 与 B 两点间的距离. 同学们各抒己见，但李明想到一种测量方法，同学们一致认为很好. 其方法是：在点 A 处垂直地面竖立一根竹竿，在竹竿上取一点 P，使 $AP=a$ 米，在 P 处测得从 P 看 B 的俯角为 α.

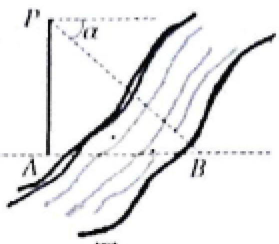


图1

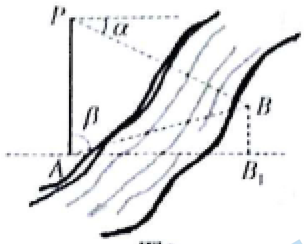


图2

①当 A 和 B 在同一水平面上时（如图 1），测得 $AB=$________米；

②当 A 和 B 不在同一水平面上（A 和 B_1 在同一水平面上）时（如图 2），利用测角仪测得 $\angle PAB=\beta$，此时，可测得 $AB=$________米.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

16. 已知曲线 C：$\frac{x|x|}{4}+y|y|=1$，点 $P(m,n)$ 为曲线 C 上任意一点，若点 $A(-2,1)$，$B(4,-2)$，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若角 B 为钝角，求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle AOB$ 中，$OB=2\sqrt{3}$，$\angle OAB=60°$. 以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立平面直角坐标系 xOy，设 A 在 x 轴的上方，C 为 $\triangle AOB$ 外接圆的圆心.

(1)求圆 C 的方程；

(2)求圆 C 在点 B 处的切线方程；

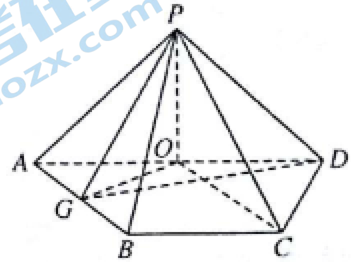
(3)是否存在点 A，使得 $|AB|=2$？若存在，求出点 A 的坐标；若不存在，请说明理由.

20.（本小题满分 12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$AD\perp CD$，且 $AD=2BC=2CD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，AD，AB 的中点分别是 O，G.

(1)求证：$GO\perp$ 平面 POC；

(2)求二面角 $D-PG-O$ 的余弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，短轴长等于焦距，且经过点 $P(0,1)$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，若以 AB 为直径的圆与 y 轴交于点 M，且 $|MA|=|MB|$，求直线 l 的方程.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2a}{x}-\ln x+2(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的极值；

(2)设 $g(x)=f(x)+2a\ln x-3x$，若 $g(x)$ 有三个零点，求实数 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

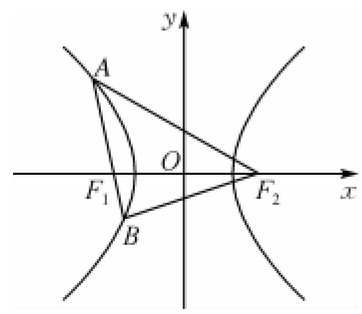
1. B　由 $\log_3 x\leqslant 1$，得 $0<x\leqslant 3$，即 $A=\{x|0<x\leqslant 3\}$. 又 $B=\{x|0<x<a\}$，且 $A\subseteq B$，所以实数 a 的取值范围是 $(3,+\infty)$. 故选 B.

2. A　当 $a=2$ 时，可以推出 $l_1/\!/l_2$；当 $l_1/\!/l_2$ 时，可得 $a=2$ 或 $a=-1$，所以“$a=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的充分不必要条件. 故选 A.

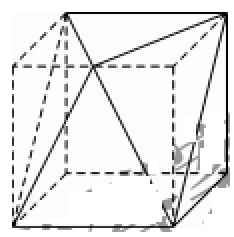
3. B　设 $P(x_0,2)$，由 $\begin{cases}x_0+\dfrac{p}{2}=2,\\2^2=2px_0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2,\\x_0=1.\end{cases}$ 故选 B.

4. A　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为 30°. 故选 A.

5. C　根据双曲线的定义，得 $|AF_2|-|AF_1|=4$，$|BF_2|-|BF_1|=4$，两式相加得 $|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=8$，即 $|AF_2|+|BF_2|-|AB|=8$，又 $|BF_2|=|AB|$，所以 $|AF_2|=8$. 故选 C.



6. D　由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥（如图），所以该几何体的体积为 $2\times2\times2-2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{3}$. 故选 D.



7. C　由题意知 $t=\dfrac{T\cdot\ln\dfrac{N_0}{N}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\times\ln\dfrac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\ln 3}{\ln 2}=5\,730\log_2 3\approx5\,730\times1.585=9\,082.05\approx9\,082$. 故选 C.

8. A　$y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为 $\sin 4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$，所以①适合；因为 $\sin 4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$，所以②适合；因为 $\sin 4\left(x+\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$，所以③不适合；因为 $\sin 4\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$，所以④不适合. 故选 A.

9. D　设两耳所在双曲线的实轴长为 $2a$，焦距为 $2c$，虚轴长为 $2b$，则 $2a=3\times10^{-5}\times334=0.01\,002(\text{m})$，$2c=0.2(\text{m})$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{b}{a}$，所以 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{a}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{0.01\,002}{0.2}=0.0\,501\approx0.05$. 故选 D.

10. A　设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $\dfrac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，所以 $R=3$. 又 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 $x^2+y^2+z^2=36$，所以 $xy+yz+zx\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$，当且仅当 $x=y=z=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. 故选 A.

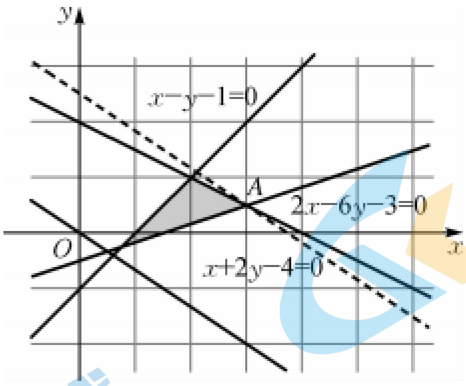
11. C　当 $n=1$ 时，$3a_1=64-a_1$，解得 $a_1=16$；当 $n\geqslant2$ 时，$3S_n=64-a_n$ 和 $3S_{n-1}=64-a_{n-1}$ 两式相减，得 $3a_n=a_{n-1}-a_n$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 16、公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的等比数列，即各项依次为 $16,4,1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{64},\cdots$，所以 $a_1a_5=1$，$a_2a_4=1$，$a_3=1$，结合 $1\leqslant m<k$，得 k 的取值集合是 $\{4,5\}$. 故选 C.

12. B　函数 $y=\sin x$ 和 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上都关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且它们都在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减. 由 $f(\pi-a)>f\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)$，得 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\pi-a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\\left|\pi-a-\dfrac{\pi}{2}\right|<\left|\dfrac{\pi}{2}+a-\dfrac{\pi}{2}\right|,\end{cases}$ 即

$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3\pi}{2}, \\ -\pi\leqslant a\leqslant\pi, \\ \left|\frac{\pi}{2}-a\right|<|a|, \end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{4}<a\leqslant\pi$. 故选 B.

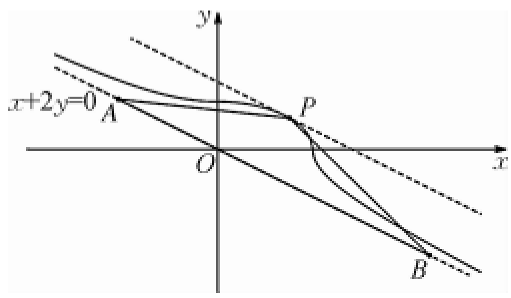
13. $2x-y-\mathrm{e}=0$　因为 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$, $f'(x)=\ln x+1$, 则 $f'(\mathrm{e})=2$, 所以所求切线方程为 $y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})$, 即 $2x-y-\mathrm{e}=0$.

14. $\frac{15}{2}$　画出可行域(如图阴影部分), 当直线 $2x+3y=z$ 过点 $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$ 时, z 取得最大值, 所以 $z_{\max}=2\times3+3\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.



15. ①$\frac{a}{\tan\alpha}$　②$\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$　①$\angle PBA=\alpha$, 由$\frac{PA}{AB}=\tan\alpha$, 得 $AB=\frac{a}{\tan\alpha}$; ②$\angle APB=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\angle PBA=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$, 由正弦定理, 得$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$, 解得 $AB=\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$.

16. $3\sqrt{2}$　曲线 C 是由$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$、$\frac{x^2}{4}-y^2=1(x>0,y<0)$以及 $y^2-\frac{x^2}{4}=1(x<0,y>0)$三部分构成(如图所示), $|AB|=\sqrt{(4+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, 且过 AB 的直线方程为 $x+2y=0$, 并且直线 $x+2y=0$ 为双曲线 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ 和$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线, 设过点 P 且与直线 $x+2y=0$ 平行的直线方程为 $x+2y+t=0$, 由图知, 当直线 $x+2y+t=0(t<0)$与曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$相切时, 切点到直线 $x+2y=0$ 距离最大, 联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1, \\ x+2y+t=0,\end{cases}$ 消去 x 得 $8y^2+4ty+t^2-4=0$, $\Delta=16t^2-4\times8(t^2-4)=0$, 解得 $t=-2\sqrt{2}$(正根舍), 所以 $x+2y-2\sqrt{2}=0$, 所以点 P 到直线 $x+2y=0$ 的最大距离即为直线 $x+2y=0$ 与直线 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ 之间的距离, 所以最大距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, 所以$\triangle PAB$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{2}$.



17. 解: (1)因为 $a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$, 所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$, ……………… 2 分

又 $a_1=1$, 所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, ……………… 4 分

所以$\frac{1}{a_n}=n$, 所以 $a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ……………… 8 分

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ……………… 10 分

18. 解: (1)因为 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$, 所以 $a\sin C=c\cos\frac{A}{2}$, ……………… 2 分

由正弦定理, 得 $\sin A\sin C=\sin C\cos\frac{A}{2}$. ……………… 4 分

由 $0<C<\pi$, 得 $\sin C\neq0$, 所以 $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}$, 因为$\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,

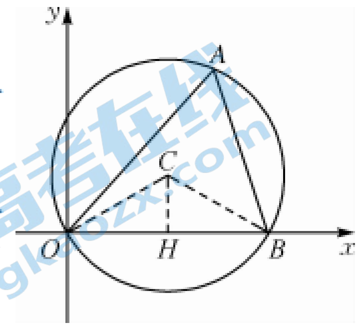
所以$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………… 6 分

(2)由 B 为钝角, 得$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2}, \\ B=\pi-\frac{\pi}{3}-C>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $0<C<\frac{\pi}{6}$, 从而 $0<\tan C<\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………… 8 分

由正弦定理,得$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin C}=\frac{\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C}{\sin C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=2$,

故$\frac{b}{c}$的取值范围是$(2,+\infty)$. ············ 12 分

19. 解:(1)如图,设 OB 的中点为 H,连接 CH,则 $CH\perp OB$.



由正弦定理,得圆 C 的半径为$R=\frac{1}{2}\times\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$. ············ 2 分

由$\angle OAB=60^\circ$,得$\angle OCH=60^\circ$,所以$|CH|=1$,又$|OH|=\sqrt{3}$,所以 $C(\sqrt{3},1)$,

所以圆 C 的方程为$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. ············ 4 分

(2)直线 BC 的斜率为$k_{BC}=\frac{1-0}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以圆 C 在点 B 处的切线的斜率为$\sqrt{3}$,

故圆 C 在点 B 处的切线方程为 $y=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$,即切线方程为$\sqrt{3}x-y-6=0$. ············ 6 分

(3)①当直线 AB 的斜率存在时,由 $B(2\sqrt{3},0)$,可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$,即 $kx-y-2\sqrt{3}k=0$,

············ 7 分

则圆心 C 到直线 AB 的距离为$d=\frac{|k\times\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$, ············ 8 分

所以$|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(\sqrt{3}k+1)^2}{k^2+1}}=2$,解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ············ 9 分

由 A 在 x 轴的上方及(2),可得 $k<0$ 或 $k>\sqrt{3}$,因此 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$不适合题意,应舍去. ············ 10 分

②当直线 AB 的斜率不存在时,$AB\perp x$ 轴,此时 O,C,A 三点共线,显然$|AB|=2$,此时 $A(2\sqrt{3},2)$. ············ 11 分

综上,存在点 $A(2\sqrt{3},2)$,使得$|AB|=2$. ············ 12 分

20. (1)证明:连接 OB,BD,易证四边形 $OBCD$ 为正方形

所以 $BD\perp OC$. ············ 1 分

因为 AD,AB 的中点分别是 O,G,所以 $GO\parallel BD$,

所以 $GO\perp OC$, ············ 2 分

因为 $PA=PD$,AD 的中点是 O,所以 $PO\perp AD$. ············ 3 分

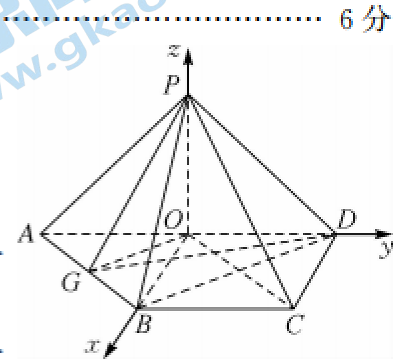
因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$平面 PAD,

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$. ············ 5 分

又 $GO,OC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp GO$,$PO\perp OC$,

又因为 $OC\cap PO=O$,所以 $GO\perp$平面 POC. ············ 6 分

(2)解:由(1)知 OB,OD,OP 两两垂直,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $AD=2BC=2CD=4$,$PA=PD=2\sqrt{2}$,

所以 $PO=OA=OB=OD=2$,

则点 $P(0,0,2)$,$D(0,2,0)$,$O(0,0,0)$,$C(2,2,0)$,$G(1,-1,0)$.

所以$\overrightarrow{OG}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{DG}=(1,-3,0)$,$\overrightarrow{PG}=(1,-1,-2)$. ············ 7 分

由(1)知 $PO\perp OC$,$GO\perp OC$,又 $PO\cap GO=O$,$PO,GO\subset$平面 PGO,

所以 $OC\perp$平面 PGO,所以$\overrightarrow{OC}=(2,2,0)$为平面 PGO 的一个法向量; ············ 8 分

又设平面 PGD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PG},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DG},\end{cases}$得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PG}=x-y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x-3y=0,\end{cases}$得$\begin{cases}z=y,\\ x=3y,\end{cases}$

取 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(3,1,1)$. ············ 10 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{(2,2,0)\cdot(3,1,1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

由图知二面角 $B-PD-C$ 为锐角,

所以二面角 $D-PG-O$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{22}}{11}$. ············ 12 分

21. 解:(1)由椭圆 E 经过点 $P(0,1)$,得 $b=1$;

由短轴长等于焦距,得 $2b=2c$,则 $c=1$, ············ 2 分

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2ty-1=0$,

由题意,得 $\Delta>0$,且 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{t^2+2}$, ………………………………………… 6 分

设 $M(0,u)$,线段 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$,则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{t}{t^2+2}$,$x_0=ty_0+1=\frac{2}{t^2+2}$.

由 $|MA|=|MB|$,得 $MN\perp AB$,即 $\frac{u+\frac{t}{t^2+2}}{-\frac{2}{t^2+2}}\cdot\frac{1}{t}=-1$,解得 $u=\frac{t}{t^2+2}$. ……………………………… 8 分

由 $MA\perp MB$,得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2+(y_1-u)(y_2-u)=(ty_1+1)(ty_2+1)+(y_1-u)(y_2-u)=(t^2+1)y_1y_2+(t-u)(y_1+y_2)+u^2+1=0$,

即 $(t^2+1)\cdot\frac{-1}{t^2+2}+\left(t-\frac{t}{t^2+2}\right)\cdot\frac{-2t}{t^2+2}+\left(\frac{t}{t^2+2}\right)^2+1=0$, ………………………… 10 分

解得 $t=\pm1$,所以直线 l 的方程为 $x=\pm y+1$,即 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. ……………………… 12 分

22. 解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{2a+x}{x^2}$, ……………………………………… 1 分

当 $a\geqslant0$ 时,$2a\geqslant0$,$x>0$,则 $2a+x>0$,则 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,无极值; ……………… 2 分

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x>-2a$;令 $f'(x)>0$,得 $0<x<-2a$,

故 $f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递增,在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=-2a$ 处取得极大值 $1-\ln(-2a)$,无极小值. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意,$g(x)=f(x)+2a\ln x+x=\frac{2a}{x}-\ln x+2+2a\ln x+x=(2a-1)\ln x+\frac{2a}{x}+x+2$,

$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$g'(x)=\frac{2a-1}{x}-\frac{2a}{x^2}+1=\frac{x^2+(2a-1)x-2a}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2a)}{x^2}(x>0)$. ……………………………… 5 分

①若 $a\geqslant0$,则当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 至多有两个零点,不合题意; …………………………………………………… 6 分

②若 $a=-\frac{1}{2}$,则 $x\in(0,+\infty)$,$g'(x)\geqslant0$(仅 $g'(1)=0$). $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 至多有一个零点,不合题意; ………………………………………………………………………………………………… 7 分

③若 $-\frac{1}{2}<a<0$,则 $0<-2a<1$,当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在 $(0,-2a)$,$(1,+\infty)$ 上单调递增;当 $x\in(-2a,1)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $(-2a,1)$ 上单调递减,要使 $g(x)$ 有三个零点,必须有 $\begin{cases}g(-2a)>0\\g(1)<0\end{cases}$ 成立.

若 $g(1)<0$,得 $a<-\frac{3}{2}$,这与 $-\frac{1}{2}<a<0$ 矛盾,所以 $g(x)$ 不可能有三个零点(由 $g(1)=2a+3>0$,所以 $g(x)$ 至多有一个零点,不合题意); …………………………………………………………………………………… 8 分

④若 $a<-\frac{1}{2}$,则 $-2a>1$. 当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在 $(0,1)$,$(-2a,+\infty)$ 上单调递增;当 $x\in(1,-2a)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $(1,-2a)$ 上单调递减,要使 $g(x)$ 有三个零点,必须有 $\begin{cases}g(1)>0\\g(-2a)<0\end{cases}$ 成立,

由 $g(1)>0$,得 $a>-\frac{3}{2}$,由 $g(-2a)=(2a-1)[\ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\frac{1}{2}$,得 $a<-\frac{e}{2}$,

所以 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$.

并且当 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ 时,$0<e^{-2}<1$,$e^2>-2a$,$g(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^2-2)<4+e^{-2}-e(e^2-2)<4+1-5e<0$,

$g(e^2)=e^2+2a(e^{-2}+2)>e^2-3(e^{-2}+2)=e^2-6-3e^{-2}>e^2-7>0$. …………………………………… 11 分

综上所述,使 $g(x)$ 有三个零点的实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{e}{2}\right)$. …………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。