2019 北京师大附中高一（上）期末

数　　学

本试卷有三道大题。考试时长 120 分钟，满分 150 分。

一、本大题共 10 小题，共 40 分。

1. 已知集合$A=\{x|x^2-16<0\}$，$B=\{-5,0,1\}$则(　　)

A. $A\cap B=\emptyset$　　B. $A\cap B=\{0,1\}$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

2. 已知向量$\vec{m}=(0,1)$，$\vec{n}=(2,t)$，若$\vec{m}\perp\vec{n}$，则 t=（　　）

A. 0　　B. −1　　C. 1　　D. 2

3. 下列函数的最小正周期为 π 且图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称的是（　　）

A. $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　B. $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

C. $y=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$　　D. $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$

4. 要得到函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象，只需将函数$y=\sin 2x$的图象（　　）

A. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度　　B. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

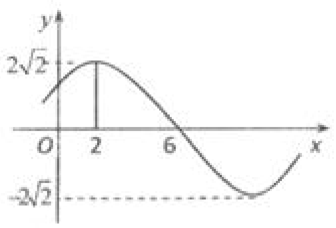
C. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度　　D. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

5. 在△ABC中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\vec{EB}=$

A. $\frac{3}{4}\vec{AB}-\frac{1}{4}\vec{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\vec{AB}-\frac{3}{4}\vec{AC}$

C. $\frac{3}{4}\vec{AB}+\frac{1}{4}\vec{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{AC}$

6. 函数$y=2\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$（其中$\omega>0, 0<\varphi<\pi$）的图象的一部分如图所示，则（　　）



A. $\omega=\frac{\pi}{8},\varphi=\frac{3\pi}{4}$　　B. $\omega=\frac{\pi}{8},\varphi=\frac{\pi}{4}$　　C. $\omega=\frac{\pi}{4},\varphi=\frac{\pi}{2}$　　D. $\omega=\frac{\pi}{4},\varphi=\frac{3\pi}{4}$

7. 已知 a，b 为非零向量，则“a • b>0”是“a 与 b 的夹角为锐角”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 计算：$\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}-\frac{1}{\sin 170^\circ}$的结果是（　　）

A. −4　　B. −2　　C. 2　　D. 4

9. 已知$f(x)=f(2-x),x\in R$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$为增函数。设$a=f(1),b=f(2)$，$c=f(-1)$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　　B. $b>a>c$　　　C. $c>a>b$　　　D. $c>b>a$

10. 函数$y=f(x)$是定义域为 R 的偶函数，当$x\ge 0$时，$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(0\le x\le 1)\\ \left(\frac{1}{4}\right)^x+1(x>1)\end{cases}$，若关于 x 的方程$[f(x)]^2+af(x)+b=0(a,b\in R)$有且仅有 6 个不同实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4})$　　　B. $(-\frac{9}{4},-1)$

C. $(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4})\cup(-\frac{9}{4},-1)$　　　D. $(-\frac{5}{2},-1)$

二、填空题：共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 已知扇形的圆心角为$\frac{\pi}{6}$，面积为$\frac{\pi}{3}$，则扇形的弧长等于__________。

12. 已知$\tan\theta<0$，且角终边上一点为$(-1,y)$，且$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，则$y=$________。

13. 已知α,β为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则$\sin\beta=$________。

14. 平面向量 a 与 b 的夹角为 60°，$a=(2,0)$，|b|=1，则|a+2b|=____________。

15. 已知$x,y\in(0,+\infty),x+y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为____________。

16. 在直角三角形 ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC=2,点 P 是斜边 AB 上的一个三等分点，则$\vec{CP}\cdot\vec{CB}+\vec{CP}\cdot\vec{CA}=$______。

三、解答题：共 6 个小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. 已知$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$。

（1）求$\tan\alpha$的值；

（2）求$\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha+1}$的值。

18. 已知函数$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x),x\in R$。

（1）求$f(\frac{\pi}{4})$的值；

（2）求函数$f(x)$的单调递增区间。

19. 已知向量$\vec{a}=(\cos x+\sin x,\sin x),\vec{b}=(\cos x-\sin x,2\cos x)$，设$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b},x\in R$。

（1）求函数$f(x)$的最小正周期；

（2）当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，求函数$f(x)$的最大值及最小值。

20. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是同一平面内的三个向量，其中$\vec{a}$=（1, 2）。

（1）若$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$，且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，求$\vec{b}$的坐标。

（2）若$|\vec{c}|=\sqrt{10}$，且$2\vec{a}+\vec{c}$与$4\vec{a}-3\vec{c}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角。

21. 已知奇函数$f(x)$的定义域为$[-1,1]$，当$x\in[-1,0)$时，$f(x)=-(\frac{1}{2})^x$。

（1）求函数$f(x)$在$(0,1]$上的值域；

（2）若$x\in(0,1]$时，函数$y=\frac{1}{4}f^2(x)-\frac{\lambda}{2}f(x)+1$的最小值为-2，求实数 λ 的值。

22. 对于函数$f(x)$，若在其定义域内存在实数x_0，使得$f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$成立，则称$f(x)$有“※点”x_0。

（1）判断函数$f(x)=x^2+2^x$在$[0,1]$上是否有“※点”。并说明理由；

（2）若函数$f(x)=\lg(\frac{a}{x^2+1})$在$(0,+\infty)$上有“※点”，求正实数 a 的取值范围。

2019 北京师大附中高一（上）期末数学参考答案

一、本大题共 10 小题，共 40 分。

1.

【答案】C

【解析】

试题分析：由$x^2-16<0$解得$-4<x<4$，所以$A=\{x|-4<x<4\}$，所以$A\cap B=\{0,1\}$，故选 C.

考点：1、不等式的解法；2、集合的交集运算.

2.

【答案】A

【解析】

【分析】

运用向量垂直的充要条件列方程求得 t 的值；

【详解】∵$\vec{m}\perp\vec{n}$，

∴$\vec{m}\cdot\vec{n}=0+t=0$，

解得 $t=0$；

故选 A.

【点睛】本题考查了平面向量垂直的充要条件，关键是用坐标表示向量垂直的公式要熟悉，是基础题.

3.

【答案】B

【解析】

【分析】

将 $x=\frac{\pi}{3}$代入各个关系式，看看能否取到最值即可验证图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，分别求出最小正周期验证即可.

【详解】A，对于函数$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，令 $x=\frac{\pi}{3}$，求得 $y=0$，不是函数的最值，

故函数 y 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，故排除 A.

B，对于函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，令 $x=\frac{\pi}{3}$，求得 $y=1$，是函数的最值，故图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称；且有 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故满足条件；

C，由 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 可知，函数的最小正周期不为 π，故排除 C.

D，由 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 可知，函数的最小正周期不为 π，故排除 D.

故选：B.

【点睛】本题考查正弦函数的对称性及周期，代入验证是解决此类问题的捷径，属于中档题.

4.

【答案】C

【解析】

【分析】

利用函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换规律，可得结论.

【详解】解：将函数 $y=\sin 2x$，向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换规律，属于基础题.

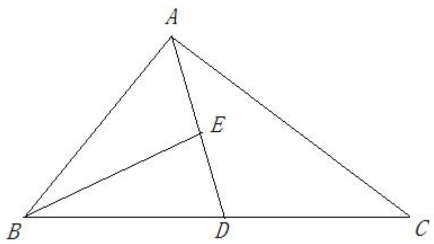
5.

【答案】A

【解析】

分析：首先将图画出来，接着应用三角形中线向量的特征，求得$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，之后应用向量的加法运算法则-------三角形法则，得到$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，之后将其合并，得到$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，下一步应用相反向量，求得$\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，从而求得结果.

详解：根据向量的运算法则，可得



$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\ =\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以$\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

点睛：该题考查的是有关平面向量基本定理的有关问题，涉及到的知识点有三角形的中线向量、向量加法的三角形法则、共线向量的表示以及相反向量的问题，在解题的过程中，需要认真对待每一步运算.

6.

【答案】B

【解析】

【分析】

先利用图象中的 2 和 6，求得函数的周期，求得ω，最后根据 $x=2$ 时取最大值，求得φ，即可得解.

【详解】如图根据函数的图象可得：函数的周期为（6 - 2）×4＝16，

又∵ω＞0，

$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{8}$,

当 $x=2$ 时取最大值，即 $2\sqrt{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=2\sqrt{2}$，可得：$2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

$\therefore \varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

$\because 0<\varphi<\pi$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，

故选：*B*.

【点睛】本题主要考查了由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式，考查了五点作图的应用和图象观察能力，属于基本知识的考查.

7.

【答案】B

【解析】

【分析】

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 时，与$\vec{b}$的夹角为锐角或零角.由此判断即可.

【详解】$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$时，与$\vec{b}$的夹角为锐角或零角，不一定是锐角，故充分性不成立.

而与$\vec{b}$的夹角为锐角或零角时，有$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$，必要性成立，

故选：B.

【点睛】本题考查用两个向量的数量积表示两个向量的夹角，以及必要而不充分条件的判断，属基础题.

8.

【答案】A

【解析】

【分析】

由已知可得原式等于$\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$，利用二倍角正弦公式及两角差的正弦公式化简可得结果.

【详解】$\because \frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}-\frac{1}{\sin170^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}-\frac{1}{\sin(180^\circ-10^\circ)}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}-\frac{1}{\sin10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin10^\circ-\cos10^\circ}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ-\frac{1}{2}\cos10^\circ\right)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{2\sin(10^\circ-30^\circ)}{\sin10^\circ\cos10^\circ}$

$=\frac{-2\sin20^\circ}{\frac{1}{2}\cdot2\sin10^\circ\cos10^\circ}=\frac{-4\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=-4$

故选：*A*.

【点睛】本题考查诱导公式和两角和与差的正弦函数的应用，属于基础题.

9.

【答案】D

【解析】

【分析】

由 $f(x)=f(2-x)$ 可得出 $f(-1)=f(3)$，根据 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数可得出 $f(3)>f(2)>f(1)$，从而得出 a，b，c 的大小关系．

【详解】∵ $f(x)=f(2-x)$；

∴ $f(-1)=f(3)$；

∵ $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 为增函数；

∴ $f(3)>f(2)>f(1)$；

∴ $c>b>a$．

故选：*D*.

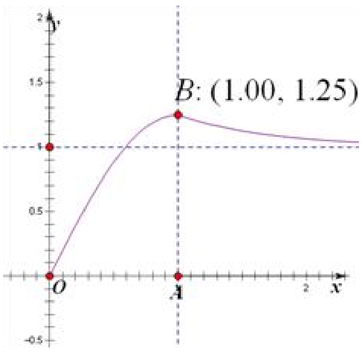
【点睛】本题考查增函数的定义，关键是将自变量的取值通过条件转到同一个单调区间上，再根据增函数，比较函数值的大小．

10.

【答案】C

【解析】

作出 $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(0\le x\le 1)\\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x}+1(x>1)\end{cases}$ 的图象如下，



又∵函数 y=f（x）是定义域为 R 的偶函数，

且关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0$，a，b∈R 有且仅有 6 个不同实数根，

∴ $x^2+ax+b=0$ 的两根分别为 $x_1=\frac{5}{4},1<x_2<\frac{5}{4}$ 或 $0<x_1\le 1,1<x_2<\frac{5}{4}$；

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-a$，

若 $x_1=\frac{5}{4},1<x_2<\frac{5}{4}$，则 $\frac{9}{4}<-a<\frac{5}{2}$，即 $-\frac{5}{2}<a<-\frac{9}{4}$；

若 $0<x_1\le 1,1<x_2<\frac{5}{4}$，则 $1<-a<\frac{9}{4}$，即 $-\frac{9}{4}<a<-1$；

从而可知$-\frac{5}{2}<a<-\frac{9}{4}$或$-\frac{9}{4}<a<-1$；

故选 C.

点睛：(1)求分段函数的函数值，要先确定要求值的自变量属于哪一段区间，然后代入该段的解析式求值，当出现$f(f(a))$的形式时，应从内到外依次求值.

(2)当给出函数值求自变量的值时，先假设所求的值在分段函数定义区间的各段上，然后求出相应自变量的值，切记要代入检验，看所求的自变量的值是否满足相应段自变量的取值范围.

二、填空题：共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】

利用扇形面积计算公式、弧长公式即可得出.

【详解】$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times r^2$，解得 $r=2$.

∴扇形的弧长$=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

故答案为$\frac{\pi}{3}$.

【点睛】本题考查了扇形面积计算公式、弧长公式，熟悉公式是解题的关键，属于基础题.

12.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

由题意可得 θ 是第二象限角，$y>0$，再根据 $\cos\theta=-\frac{1}{2}=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}$，求得 y 的值.

【详解】∵tan θ <0，且角 θ 终边上一点为（-1，y），

∴ θ 是第二象限角，$y>0$.

再根据 $\cos\theta=-\frac{1}{2}=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}$，

∴$y=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查任意角的三角函数的定义，三角函数在各个象限中的符号，属于中档题.

13.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】

利用同角三角函数的基本关系求得 sinα、cos（α+β）的值，再利用两角和差的正弦公式求得 sinβ＝sin[（α+β）-α]的值.

【详解】∵α、β为锐角，cosα $=\frac{1}{7}$，∴sinα $=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

sin（α+β）$=\frac{5\sqrt{3}}{14}$<sinα，∴α+β为钝角，

∴cos（α+β）$=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{11}{14}$，

∴sinβ＝sin[（α+β）-α]＝sin（α+β）cosα－cos（α+β）sinα

$=\frac{5\sqrt{3}}{14}\bullet\frac{1}{7}-(-\frac{11}{14})\bullet\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查同角三角函数的基本关系、两角和差的正弦公式的应用，其中将所求角用已知角配凑成β=（α+β）-α，是解题的关键，属于较难题.

14.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

由向量与$\vec{b}$的夹角为60°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，可得$|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos60°=1$，

则$|\vec{a}+2\vec{b}|=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$，故答案为$2\sqrt{3}$.

点睛：本题考查向量的数量积的定义和性质，主要是向量的模的平方即为向量的平方，考查运算求解的能力，属于基础题；运用向量的数量积的定义，可得，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos60°=1$，再由向量的模的平方即为向量的平方，计算即可得到所求值.

【此处有视频，请去附件查看】

15.

【答案】4

【解析】

【分析】

由$x,y\in(0,+\infty)$，且 $x+y=1$，进行 1 的代换$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=$（$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$）（$x+y$），展开利用基本不等式可求.

【详解】∵x，$y>0$．且 $x+y=1$，

则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=$（$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$）（$x+y$）＝$2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq4$，

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$且 $x+y=1$ 即 $x=y=\frac{1}{2}$时取等号，此时所求最小值 4.

故答案为 4.

【点睛】本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是熟练掌握基本公式并能灵活应用.

16.

【答案】4

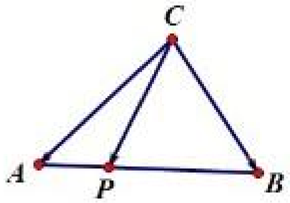
【解析】

试题分析：依题意得，该三角形为等腰直角三角形，由于 P 是 AB 的一个三等分点，所以$\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AB}$，$\vec{CP}=\vec{CA}+\vec{AP}=\vec{CA}+\frac{1}{3}\vec{AB}$，$\vec{CP}\cdot\vec{CA}=(\vec{CA}+\frac{1}{3}\vec{AB})\cdot\vec{CA}$

$=|\vec{CA}|^2+\frac{1}{3}\vec{CA}\cdot\vec{AB}=4+\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times 2\cos 135^0=\frac{8}{3}$，

$\vec{CP}\cdot\vec{CB}=\vec{CA}\cdot\vec{CB}+\frac{1}{3}\vec{AB}\cdot\vec{CB}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times 2\cos 135^0=\frac{4}{3}$，

故$\vec{CP}\cdot\vec{CB}+\vec{CP}\cdot\vec{CA}=4$.



考点：本题主要考查平面向量的线性运算及数量积。

点评：中档题，应用数形结合思想，从图形的几何特征入手，发现向量之间的关系，这也是解答平面向量问题时常常用到的方法，即选定基向量，将其它向量用此表示，进一步计算。而基向量的选定，往往是相关联、不共线的向量。

三、解答题：共 6 个小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17.

【答案】(I) $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$. (II) −7.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）利用同角三角函数的基本关系，求得$\tan\alpha$ 的值.

（Ⅱ）由题意利用二倍角公式求得$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+1}$的值.

试题解析：(I) 因为$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

(II) 由 (I) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

所以$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times (-\frac{3}{5})^2 - 1 = -\frac{7}{25}$

所以$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + 1} = \frac{-\frac{7}{25}}{-\frac{24}{25}+1} = -7$.

18.

【答案】(1) 2 ； (2) $[-\frac{\pi}{8}+k\pi, \frac{3\pi}{8}+k\pi], k \in Z$

【解析】

【分析】

(1) 由二倍角公式和两角差的正弦公式，化简函数式，再由特殊角的三角函数值，即可得到；

(2) 运用正弦函数的单调增区间，解不等式，即可得到所求区间.

【详解】(1) 函数 $f(x) = 2\sin x(\sin x+\cos x)$

$= 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = \sin 2x + 1 - \cos 2x$

$= 1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$,

则 $f(\frac{\pi}{4}) = 1+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = 1+1=2$;

(2) 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2} \le 2x-\frac{\pi}{4} \le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得，$k\pi-\frac{\pi}{8} \le x \le k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$k \in Z$，

则单调递增区间为：$[-\frac{\pi}{8}+k\pi, \frac{3\pi}{8}+k\pi], k \in Z$.

【点睛】本题考查二倍角公式和两角差的正弦公式及运用，考查三角函数的单调性，考查运算能力，属于基础题.

19.

【答案】(1) π ；(2) 最大值$\sqrt{2}$，最小值-1

【解析】

【分析】

(1) 由两向量的坐标，利用平面向量的数量积运算法则计算得出 $f(x)$ 解析式，找出ω的值，代入周期公式即可求出最小正周期；

(2) 根据 x 的范围求出这个角的范围，利用正弦函数的定义域与值域就确定出 $f(x)$ 的最大值与最小值.

【详解】(1) ∵$\vec{a} = (\cos x+\sin x, \sin x)$，$\vec{b} = (\cos x-\sin x, 2\cos x)$，

∴$f(x) = \vec{a}\cdot\vec{b} = (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+2\sin x\cos x = \cos^2 x-\sin^2 x+\sin 2x = \cos 2x+\sin 2x = \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$,

∵ $\omega=2$，∴ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$；

(2) ∵$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$，∴$2x+\frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$,

∴当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)_{min}=-1$；

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$时，$f(x)_{max}=\sqrt{2}$，

综上所述，当 $x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)_{min}=-1$；当 $x=\frac{\pi}{8}$时，$f(x)_{max}=\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了二倍角公式，平面向量的数量积运算，三角函数的周期性及其求法，以及正弦函数的值域，熟练掌握公式是解本题的关键.

20.

【答案】(1) $\vec{b}=(2,4)$ 或 $\vec{b}=(-2,-4)$；(2) $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】

(1) 根据$\vec{a}\parallel\vec{b}$，从而可得到$\vec{b}=k\vec{a}$，进而$|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$，可求出 k 的值，从而得出$\vec{b}$的坐标；

(2) 根据$2\vec{a}+\vec{c}$与$4\vec{a}-3\vec{c}$垂直，可得出$(2\vec{a}+\vec{c})\cdot(4\vec{a}-3\vec{c})=0$，根据条件进行数量积的运算即可求出$\cos<\vec{a},\vec{c}>$的值，从而求出$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角.

【详解】(1) ∵$\vec{a}\parallel\vec{b}$；

∴设$\vec{b}=k\vec{a}$，且$|\vec{b}|=2\sqrt{5}$，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$；

∴$|\vec{b}|=|k||\vec{a}|=\sqrt{5}|k|=2\sqrt{5}$；

∴$k=\pm2$；

∴$\vec{b}=(2,4)$，或$\vec{b}=(-4,-4)$；

(2) ∵$(2\vec{a}+\vec{c})\perp(4\vec{a}-3\vec{c})$，且$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{c}|=\sqrt{10}$；

∴$(2\vec{a}+\vec{c})\cdot(4\vec{a}-3\vec{c})$

$=8\vec{a}^2-3\vec{c}^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=40-30-10\sqrt{2}\cos<\vec{a},\vec{c}>$

$=0$；

∴$\cos<\vec{a},\vec{c}>=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

又$<\vec{a},\vec{c}>\in[0,\pi]$；

∴$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

【点睛】考查共线向量基本定理，向量数乘的几何意义，根据向量坐标求向量长度，向量垂直的充要条件，以及向量夹角的范围，属于中档题.

21．

【答案】（1）$(1,2]$；（2）$\lambda=4$

【解析】

【分析】

（1）利用函数的奇偶性、指数函数的单调性求出函数 $f(x)$ 在$(0,1]$上的值域．

（2）根据 $f(x)$ 的范围，利用条件以及二次函数的性质，分类讨论求得实数 λ 的值．

【详解】（1）设 $x\in(0,1]$，则 $-x\in[-1,0)$ 时，所以 $f(-x)=-(\frac{1}{2})^{-x}=-2^{x}$．

又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以有 $f(-x)=-f(x)$，

所以当 $x\in(0,1]$时，$f(x)=-f(-x)=2^{x}$，所以$f(x)$在$(0,1]$上的值域为$(1,2]$，

（2）由（1）知当 $x\in(0,1]$时，$f(x)\in(1,2]$，

所以$\frac{1}{2}f(x)\in(\frac{1}{2},1]$．

令 $t=\frac{1}{2}f(x)$，则 $\frac{1}{2}<t\leqslant1$，

$g(t)=\frac{1}{4}f^{2}(x)-\frac{\lambda}{2}f(x)+1=t^{2}-\lambda t+1=(t-\frac{\lambda}{2})^{2}+1-\frac{\lambda^{2}}{4}$，

①当$\frac{\lambda}{2}\leq\frac{1}{2}$，即 $\lambda\leqslant1$ 时，$g(t)>g(\frac{1}{2})$，无最小值，

②当$\frac{1}{2}<\frac{\lambda}{2}\leq1$，即 $1<\lambda\leqslant2$ 时，$g(t)_{min}=g(\frac{\lambda}{2})=1-\frac{\lambda^{2}}{4}=-2$，

解得 $\lambda=\pm2\sqrt{3}$ （舍去）．

③当$\frac{\lambda}{2}>1$，即 $\lambda>2$ 时，$g(t)_{min}=g(1)=-2$，解得 $\lambda=4$，

综上所述，$\lambda=4$．

【点睛】本题主要考查指数函数的单调性，求二次函数在闭区间上的最值，体现了分类讨论、转化的数学思想，属于中档题．

22．

【答案】（1）见解析；（2）$3-\sqrt{5}\leq a<2$

【解析】

【分析】

（1）令$g(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)$，利用零点存在定理，判断端点处的函数值是否异号即可；

（2）若函数在（0，+∞）上有“※点”，只需方程$f(x)=\lg(\frac{a}{x^{2}+1})$在该区间上有实根，然后将对数方程化为二次方程，借助于二次函数的性质可以解决．

【详解】（1）由题意知，令$g(x)=f(x+1)-f(x)-f(1)=2^{x}+2x-2$，则$x_0$为 g（x）的零点，因为$g(0)=-1,g(1)=2$，所以$g(0)g(1)<0$，由零点存在定理可知，函数$g(x)$在区间$[0,1]$上至少有 1 个实根，即$f(x+1)=f(x)+f(1)$至少有 1 个实根，

所以函数$f(x)=x^2+2^x$在$[0,1]$上有“※点”。

（2）若函数$f(x)=\lg(\frac{a}{x^2+1})$在$(0,+\infty)$上有“※点”，则存在实数$x_0\in(0,+\infty)$，使得$f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$成立，即

$\lg[\frac{a}{(x_0+1)^2+1}]=\lg(\frac{a}{x_0^2+1})+\lg(\frac{a}{2})$，

整理得$(2-a)x_0^2-2ax_0+2-2a=0$，$x_0>0$。

当 a=2 时，$x_0=-\frac{1}{2}<0$，不合题意

当$a\neq2$时，令$g(x)=(2-a)x^2-2ax+2-2a$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上有零点。

当$a>2$时，开口向下，对称轴$x=\frac{a}{2-a}<0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$g(0)=2-2a<0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上恒小于零，不合题意，当$0<a<2$时，开口向上，对称轴$x=\frac{a}{2-a}>0$，

由题意只要$\Delta=4a^2-4(2-a)(2-2a)\geq0$，即$a^2-6a+4\leq0$，解得$3-\sqrt{5}\leq a\leq3+\sqrt{5}$。因为$0<a<2$，所以$3-\sqrt{5}\leq a<2$. 综上所述：$3-\sqrt{5}\leq a<2$。

【点睛】本题考查了方程与函数间的关系，即利用函数思想解决方程根的问题，利用方程思想解决函数的零点问题，考查了分类讨论思想，属于中档题.