2018 北京市东城区高二（下）期末

数　　学（理）

本试卷共 100 分。考试时长 120 分钟。

第一部分（选择题　共 36 分）

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 z_1， z_2 互为共轭复数，若 $z_1=\dfrac{1}{2i}+1$，则 $z_2=$

A. $1+\dfrac{1}{2}i$　　B. $1-\dfrac{1}{2}i$　　C. $\dfrac{1}{2}+i$　　D. $-1-\dfrac{1}{2}i$

2. 在对两个变量 x，y 进行线性回归分析时有下列步骤：

①对所求出的回归直线方程作出解释；

②收集数据（x_i， y_i），i=1，2，…，n；

③求线性回归方程；

④选用线性回归方程并求相关系数；

⑤根据所搜集的数据绘制散点图，确定存在线性关系。

若根据可靠性要求能够作出变量 x，y 具有线性相关结论，则下列操作顺序正确的是

A. ①②⑤③④　　B. ③②④⑤①　　C. ②④③①⑤　　D. ②⑤④③①

3. $\int_0^1(e^x+2x)dx$ 等于

A. $e+1$　　B. e　　C. $e-1$　　D. 1

4. 若随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=\dfrac{5}{2}$， $D(X)=\dfrac{5}{4}$，则 $P(X=1)=$

A. $\dfrac{1}{32}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{5}{32}$　　D. $\dfrac{5}{16}$

5. 下面几个推理过程是演绎推理的是

A. 在数列$\{a_n\}$中，根据$a_1=1$，$a_n=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geq 2,n\in N^*)$，计算出$a_2$，$a_3$，$a_4$的值，然后猜想$\{a_n\}$的通项公式

B. 某校高二共 8 个班，一班 51 人，二班 52 人，三班 52 人，由此推测各班人数都超过 50 人

C. 因为无限不循环小数是无理数，而π是无限不循环小数，所以π是无理数

D. 由平面三角形的性质，推测空间四面体的性质

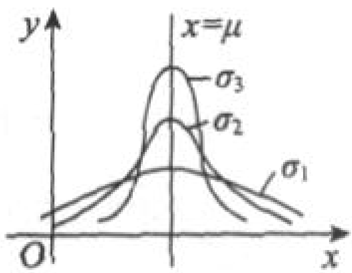
6. 6 将一枚均匀的硬币连掷 5 次，如果出现 k 次正面的概率等于出现$k+1$次正面的概率，那么 k 的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 在极坐标系中，过点$(2,\frac{\pi}{2})$且与极轴平行的直线方程是

A. $\rho=2$　　B. $\theta=\frac{\pi}{2}$　　C. $\rho\cos\theta=2$　　D. $\rho\sin\theta=2$

8. 如图是正态分布$N(\mu,\sigma_1^2)$，$N(\mu,\sigma_2^2)$，$N(\mu,\sigma_3^2)$ $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3>0)$相应的曲线，那么$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3$的大小关系是



A. $\sigma_1\rangle\ \sigma_2>\sigma_3$　　B. $\sigma_3>\sigma_2>\sigma_1$

C. $\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$　　D. $\sigma_2>\sigma_1>\sigma_3$

9. 现有五张卡片，其中两张上写着数字 5，三张上写着数字 8，从这五张卡片中选出四张组成一个四位数，那么这样的四位数共有

A. 4 个　　B. 6 个　　C. 10 个　　D. 14 个

10. 已知$f(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，$n\in N^*$，则

A. f（n）共有 n 项，当 n=2 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

B. f（n）共有 $n+1$ 项，当 n=2 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

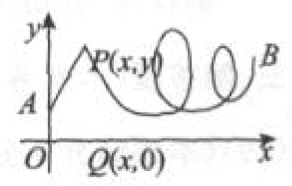
C. f（n）共有 n^2-n 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

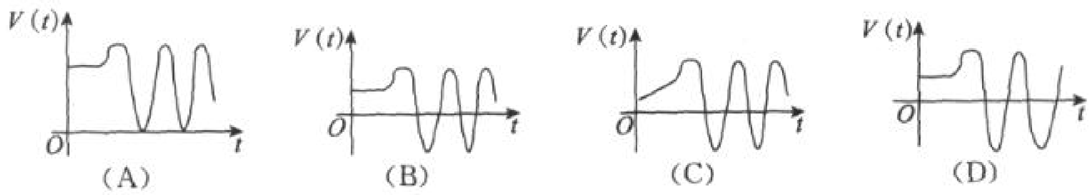
D. f（n）共有 n^2-n+1 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

11. 已知函数 f（x）的导函数 $f'(x)$ 是二次函数，且 $y=f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$f'(3)=0$，若 $f(x)$ 的极大值与极小值之和为 4，则 f（0）=

A. 2　　　　B. 0　　　　C. －2　　　　D. －4

12. 如图所示，一质点 P（x, y）在 xOy 平面上沿曲线从 A 到 B 作匀速运动，其在 x 轴上的投影点 Q（x，0）的运动速度 $V=v(t)$ 的图象大致为





第二部分（非选择题　共 64 分）

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 学校食堂在某天中午备有 5 种素菜，3 种荤菜，2 种汤，现要配成一荤一素一汤的套餐，则可以配制出不同的套餐＿＿＿＿＿＿种。

14. 在复平面内，若复数 z 同时满足下列条件：

①$z+2i\in R$；

②$z-2$ 对应的点在第三象限。

试写出一个满足条件的复数 z=_________。

15. 曲线 $\begin{cases} x=-2+5t \\ y=1-t \end{cases}$（t 为参数，$t\in R$）与 x 轴的交点坐标是_____________。

16. 在 $(x+\frac{1}{x})^n$ 的展开式中，第三项与第五项的系数相等，则 n=________；展开式中的常数项为____________。

17. 观察下列等式：1=1；

1－4=－（1+2）；

1－4+9=1+2+3；

1－4+9－16=－（1+2+3+4）

……

根据上述规律，第 6 个式子为____________；第 n 个式子为___________。

18. 若曲线 $y=f(x)$ 上存在唯一的点 P，使得在点 P 的切线与曲线 $y=f(x)$ 有且只有一个公共点，则称曲线 $y=f(x)$ 存在“真切”线，给出下列曲线：① $y=x^2$；② $y=x^3$；③ $y=\ln x$；④ $y=-x^2-\ln x$

则存在“真切”线的所有曲线的序号为___________

三、解答题（本题共 4 小题，共 46 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. （本题满分 9 分）

已知 $x\in R$，$a=x^2+\frac{1}{2}$，$b=2-x$，$c=x^2-x+1$，试证明 a, b, c 至少有一个不小于 1。

20. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图象与 y 轴交于点 A，曲线 y=f（x）在点 A 处的切线斜率为－1.

（I）求 a 的值并求该切线方程；

（II）求 f（x）在区间[－1，1]上的最小值和最大值；

（III）证明：当 x>0 时，$x^2<e^x$

21. （本题满分 12 分）

某书店打算对 A，B，C，D 四类图书进行促销，为了解销售情况，在一天中随机调查了 15 位顾客（记为 a_i，$i=1$，2，3，…，15）购买这四类图书的情况，记录如下（单位：本）：

顾客 \ 图书	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
A	1			1				1			1			1	
B		1		1		1		1	1		1		1		1
C	1			1	1			1		1		1			1
D		1		1		1	1			1			1		

（Ⅰ）若该书店每天的人流量约为 100 人次，一个月按 30 天计算，试估计 A 类图书的月销量 （单位：本）；

（Ⅱ）书店进行促销活动，对购买过两类以上（含两类）图书的顾客赠送 5 元电子红包．现有甲、乙、丙三人，记他们获得的电子红包的总金额为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）若某顾客已选中 B 类图书，为提高书店销售业绩，应继续向其推荐哪类图书?（结果不需要证明）

22. （本题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=m\ln x$，$m\in R$。

（Ⅰ）若函数 y=f（x）+x 的最小值为 0，求 m 的值；

（Ⅱ）若函数 y=f（x）与 $h(x)=\dfrac{x-1}{2x}(x>0)$ 的图象在（1，0）处有公切线 l.

（i）求 m 的值；

（ii）求证：$y=f(x)$ 与 $y=h(x)$ 的公切线只有 1 一条.

2018 北京市东城区高二（下）期末数学（理）参考答案

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. A　　2. D　　3. B　　4. C　　5. C

6. B　　7. D　　8. A　　9. C　　10. D

11. A　　12. B

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 30　　14. $-2i$（答案不唯一）

15. （3，0）

16. 6　　20

17. 1—4+9—16+25—36=—（1+2+3+4+5+6）

1—4+9—16+⋯+（—1）$^{n+1}$$n^2$=（—1）$^{n+1}$（1+2+⋯+n），$n\in N^*$

18. ②④

注：两个空的填空题第一个空填对得 1 分，第二个空填对得 2 分

三、解答题（本题共 4 小题，共 46 分）

19. 本题满分 9 分

证明：假设 a, b, c 都小于 1，即 $a<1,b<1,c<1$，⋯⋯⋯3 分

则有 $a+b+c<3$

而 $a+b+c=2x^2-2x+\frac{1}{2}+3=2(x-\frac{1}{2})^2+3\geq 3$　　6 分

两者矛盾，所以假设不成立，

故 a, b, c 至少有一个不小于 1　　9 分

20. 本题满分 12 分

解：（I）由 $f(x)=e^x-ax$，得 $f'(x)=e^x-a$　　2 分

设 A（0, m），则由已知得 $f'(0)=-1$

即$1-a=-1$，解得$a=2$

所以$f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$，此时$A(0,1)$

故在点A处的切线方程为$y=-x+1$　　　　4分

（II）令$f'(x)=0$，得$x=\ln 2$

当$x<\ln 2$时，$f'(x)<0$，f（x）单调递减；当$x>\ln 2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增

所以当$x\in[-1,\ln 2)$时，$f(x)$单调递减；$x\in(\ln,2,1]$时，f（x）单调递增

故当$x=\ln 2$时，f（x）有最小值，f（ln2）=2－2ln2=2－ln4；　　　　6分

又$f(-1)=e^{-1}+2$，$f(1)=e-2$，显然$f(-1)>f(1)$，

故$f(x)$在区间[－1，1]上的最大值为$f(-1)=\frac{1}{e}+2$　　　　8分

（III）证明：令$g(x)=e^x-x^2$，则$g'(x)=e^x-2x$

由（II）得，$g'(x)=f(x)\geq f(\ln 2)=2-\ln 4>0$

故$g(x)$在R上单调递增

又$g(0)=1>0$

所以当$x>0$时，$g(x)>g(0)>0$，即$x^2<e^x$　　　　12分

21. 本题满分12分

解：（I）$\frac{5}{15}\times 100\times 30=1000$（本）

答：A类图书的月销量约为1000本　　　　2分

（II）顾客购买两类（含两类）以上图书的概率为$P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

X可取0，5，10，15　　　　4分

$P(X=0)=(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$；$P(X=5)=C_3^1(\frac{2}{5})^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$；

$P(X=10)=C_3^2(\frac{3}{5})^2\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$； $P(X=15)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$　　8 分

所以 X 的分布列为

X	0	5	10	15
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

所以 $E(X)=0\times\frac{8}{125}+5\times\frac{36}{125}+10\times\frac{54}{125}+15\times\frac{27}{125}=\frac{1125}{125}=9$　　10 分

（III）图书 D　　12 分

22. （本题满分 13 分）

解：（I）由题意，得函数 $y=m\ln x+x$，所以 $y'=\frac{m}{x}+1=\frac{x+m}{x}$　　2 分

①当 $m\geq 0$ 时，函数 y 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时无最小值，舍去；

②当 $m<0$ 时，由 $y'=0$，得 $x=-m$

当 $x\in(0,-m)$ 时，$y'<0$，原函数单调递减；当 $x\in(-m,+\infty)$ 时，$y'>0$，原函数单调递增

所以当 $x=-m$ 时，函数 y 取最小值，即 $m\ln(-m)-m=0$，解得 m=－e　　6 分

（II）（i）由 $f(x)=m\ln x$，得 $f'(x)=\frac{m}{x}$，所以 $f'(1)=m$

由 $h(x)=\frac{x-1}{2x}(x>0)$，得 $h'(x)=\frac{1}{2x^2}$，所以 $h'(1)=\frac{1}{2}$

由已知有 $f'(1)=h'(1)$，解得 $m=\frac{1}{2}$　　8 分

（ii）设函数 f（x）与 h（x）上各有一点 $A(x_1,\frac{1}{2}\ln x_1)$，$B(x_2,\frac{x_2-1}{2x_2})$

则 f（x）以点 A 为切点的切线方程为 $y=\frac{1}{2x_1}x+\frac{1}{2}\ln x_1-\frac{1}{2}$

h（x）以点 B 为切点的切线方程为 $y=\frac{1}{2x_2^2}x+\frac{x_2-2}{2x_2}$

由两条切线重合，得$\begin{cases}\dfrac{1}{2x_1}=\dfrac{1}{2x_2^2},\\ \dfrac{1}{2}\ln x_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x_2-2}{2x_2}\end{cases}(*)$

消去x_1，整理得$\ln x_2=1-\dfrac{1}{x_2}$，即$\ln x_2-1+\dfrac{1}{x_2}=0$

令$\varphi(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$，得$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

所以函数$\varphi(x)$在（0，1）单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增。

又$\varphi(1)=0$，所以函数$\varphi(x)$有唯一零点 x=1，

从而方程组（*）有唯一解$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=1\end{cases}$

即此时函数 f（x）与 h（x）的图象有且只有一条公切线　　　　13 分