2019 北京市朝阳区高二（下）期末

数　　学

2019.7

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

（1）已知集合 $A=\{x|x(x+1)\le 0\}$，$B=\{x|x<-1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|x\ge -1\}$　　（B）$\{x|x>-1\}$

（C）$\{x|x\le 0\}$　　（D）$\varnothing$

（2）已知 x，$y\in$R，且 $x>y>0$，则

（A）$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　（B）$(\frac{1}{2})^x<(\frac{1}{2})^y$　　（C）$x^{\frac{1}{2}}<y^{\frac{1}{2}}$　　（D）$\sin x>\sin y$

（3）如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，那么“$f(a)\cdot f(b)<0$”是“函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（4）二项式 $(2x-\frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项为

（A）-960　　（B）-160

（C）160　　（D）960

（5）已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{7}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$

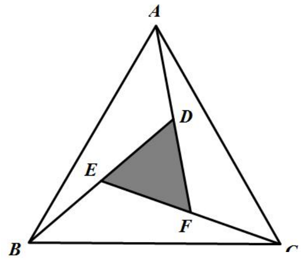
（A）$-\frac{1}{7}$　　（B）$-\frac{2}{5}$　　（C）$-\frac{1}{5}$　　（D）$\frac{1}{5}$

（6）将函数 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将所得图象上所有的点向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，则所得图象对应的函数解析式为

（A） $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$　　（B） $y=\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$

（C） $y=\cos\dfrac{x}{2}$　　（D） $y=\cos 2x$

（7）构造如图所示的图形，它是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成的一个大等边三角形，设 $BD=2AD$，则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为



（第 7 题图）

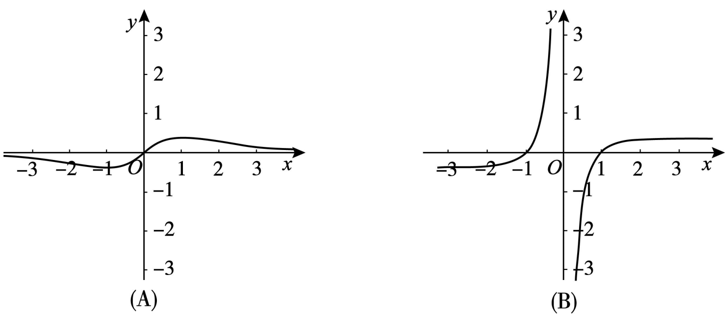
（A） $\dfrac{1}{2}$　　（B） $\dfrac{1}{3}$

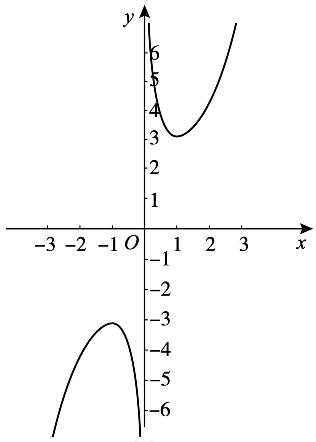
（C） $\dfrac{1}{5}$　　（D） $\dfrac{1}{7}$

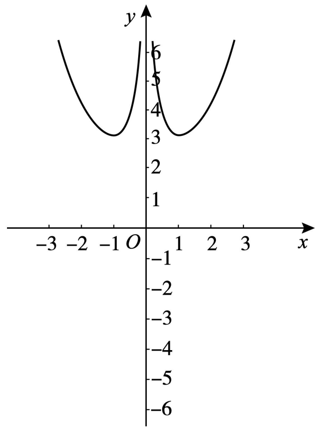
（8）某校有 6 名志愿者，在放假的第一天去北京世园会的中国馆服务，任务是组织游客参加“祝福祖国征集留言”、“欢乐世园共绘展板”、“传递祝福发放彩绳”三项活动，其中 1 人负责“征集留言”，2 人负责“共绘展板”，3 人负责“发放彩绳”，则不同的分配方案共有

（A）30 种　　（B）60 种　　（C）120 种　　（D）180 种

（9）函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$ 的图象大致为




(C)


(D)

（10）已知函数 $f\left(x\right)=k\sin x+2x+1\left(k\in\mathbf{R}\right)$，当 $k\in(-\infty,-2)\bigcup(2,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 内的极值点的个数为

（A） 0　　　（B） 1　　　（C） 2　　　（D） 3

二、填空题：本大题共 6 小题, 每小题 5 分，共 30 分，答案写在答题卡上.

（11 ）$8^{\frac{2}{3}}+\log_2 6-\log_2 3=$__________.

（12）函数 $f(x)=1-x-\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 的值域为_______.

（13）若小明在参加理、化、生三门课程的等级性考试中，取得等级 A 的概率均为 $\dfrac{3}{5}$，且三门课程的成绩是否取得等级 A 互不影响．则小明在这三门课程的等级性考试中恰有两门取得等级 A 的概率为_______.

（14）在 $\triangle ABC$ 中，$b\sin A\sin B+a\cos^2 B=\sqrt{3}b$，则 $\dfrac{a}{b}=$_______.

（15）筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理（如图 1）．因其经济又环保，至今还在农业生产中得到使用（如图 2）．假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都做匀速圆周运动．因筒车上盛水筒的运动具有周期性，可以考虑利用三角函数模型刻画盛水筒（视为质点）的运动规律．将筒车抽象为一个几何图形，建立直角坐标系（如图 3）．设经过 t 秒后，筒车上的某个盛水筒 M 从点 P_0 运动到点 P．由筒车的工作原理可知，这个盛水筒距离水面的高度 H(单位： m)，由以下量所决定：筒车转轮的中心 O 到水面的距离 h，筒车的半径 r，筒车转动的角速度 ω（单位： rad / s ），盛水筒的初始位置 P_0 以及所经过的时间 t(单位：s)．已知 r=3 m，h=2 m，筒车每分钟转动(按逆时针方向)1.5 圈，点 P_0 距离水面的高度为 3.5 m，若盛水筒 M 从点 P_0 开始计算时间，则至少需要经过____s 就可到达最高点；若将点 P 距离水面的高度 H 表示为时间 t 的函数，则此函数表达式为_______.

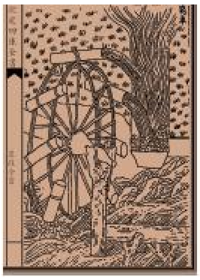


图 1

图 2

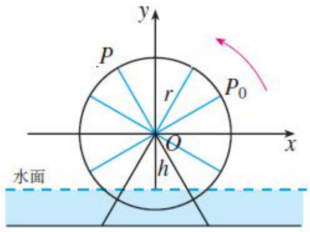


图 3

（第 15 题图）

（16）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+k, x<0,\\ x^2-1, x\geq 0,\end{cases}$ 其中 $k\geq 0$.

①若 $k=2$, 则 $f(x)$ 的最小值为______；

②关于 x 的函数 $y=f(f(x))$ 有两个不同零点, 则实数 k 的取值范围是______.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，求 m 的最大值．

（18）（本小题满分 14 分）

随着社会的进步与发展，中国的网民数量急剧增加. 下表是中国从 2009 ~ 2018 年网民人数及互联网普及率、手机网民人数（单位：亿）及手机网民普及率的相关数据.

年份	网民人数	互联网普及率	手机网民人数	手机网民普及率
2009	3.8	28.9%	2.3	17.5%
2010	4.5	34.3%	3.0	22.9%
2011	5.1	38.3%	3.6	27.0%
2012	5.6	42.1%	4.2	31.6%

2013	6.2	45.8%	5.0	36.9%
2014	6.5	47.9%	5.6	41.3%
2015	6.9	50.3%	6.2	45.2%
2016	7.3	53.2%	7.0	51.0%
2017	7.7	55.8%	7.5	54.4%
2018	8.3	59.6%	8.2	58.9%

（互联网普及率＝（网民人数/人口总数）×100%；手机网民普及率＝（手机网民人数/人口总数）×100%）

（Ⅰ）从 2009 ~ 2018 这十年中随机选取一年，求该年手机网民人数占网民总人数比值超过 80% 的概率；

（Ⅱ）分别从网民人数超过 6 亿的年份中任选两年，记 X 为手机网民普及率超过 50% 的年数，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）若记 2009 ~ 2018 年中国网民人数的方差为 $s_1{}^2$，手机网民人数的方差为 $s_2{}^2$，试判断 $s_1{}^2$ 与 $s_2{}^2$ 的大小关系.（只需写出结论）

（19）（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-(a+1)x^2+4x+1\,(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

（20）（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+(a-\mathrm{e})x-ax^2\,(a\leqslant 0)$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）证明：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在唯一零点.

（21）（本小题满分 14 分）

设集合 $M=\{x_1, x_2, \cdots, x_{3n}\}\subseteq \mathbf{N}^* \ (n\in \mathbf{N}^*)$，如果存在 M 的子集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$，$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ 同时满足如下三个条件：① $M=A\cup B\cup C$；② A，B，C 两两交集为空集；③ $a_i+b_i=c_i \ (i=1,2,3\cdots,n)$，则称集合 M 具有性质 Ω.

（Ⅰ） 已知集合 $E=\{1,2,5,6,7,9\}, F=\{1,2,3,4,5,6\}$，请判断集合 E,F 是否具有性质 Ω，并说明理由；

（Ⅱ）设集合 $M_m=\{1, 2, \cdots, 3m\} \ (m\in \mathbf{N}^*)$，求证：具有性质 Ω 的集合 M_m 有无穷多个.

2019 北京市朝阳区高二（下）期末数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1） C　　（2）B　　（3）A　　（4）B　　（5）C

（6） D　　（7）D　　（8）B　　（9）C　　（10）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）5　　（12）$(-\infty,-1]$　　（13）$\dfrac{54}{125}$　　（14）$\sqrt{3}$

（15）$\dfrac{20}{3}$；$H(t)=3\sin(\dfrac{\pi}{20}t+\dfrac{\pi}{6})+2\ (t\geqslant 0)$　　（16）-1；$[0,1)$

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．　　…………………… 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，$2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{12}\ (k\in\mathbf{Z})$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}]\ \ (k\in\mathbf{Z})$．

要使得函数 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，只需 $[0,m]\subseteq[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$.

所以 $m\in(0,\frac{\pi}{12}]$，m 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$.　　　　…………………… 14 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设事件 A：“从 $2009\sim2018$ 这十年中随机选取一年，该年手机网民人数占网民总人数比值超过 80%”.

由题意可知 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.　　　　…………………… 5 分

（Ⅱ）网民人数超过 6 亿的年份有 $2013\sim2018$ 共六年，其中手机网民普及率超过 50% 的年份有 $2016,2017,2018$ 这 3 年. 所以 X 的取值为 $0,1,2$.

所以 $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$.

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$EX=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.　　　　…………………… 12 分

（Ⅲ）$s_1^{\ 2}<s_2^{\ 2}$.　　　　…………………… 14 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3-4x^2+4x+1$，

所以 $f'(x)=3x^2-8x+4$.

所以 $f(1)=2$，$f'(1)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+y-3=0$.　………… 4 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3-(a+1)x^2+4x+1$，

所以 $f'(x)=ax^2-2(a+1)x+4=(ax-2)(x-2)$.

（1） 当 $a=0$ 时，因为 $f'(x)=-2(x-2)$ ，

由 $f'(x)>0$ 得 $x<2$ ，

由 $f'(x)<0$ 得 $x>2$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 内单调递增，在区间 $(2,+\infty)$ 内单调递减.

（2）当 $a\neq 0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，得 $x_1=2$ ， $x_2=\frac{2}{a}$.

① 当 $a<0$ 时，

由 $f'(x)>0$ 得 $\frac{2}{a}<x<2$ ；

由 $f'(x)<0$ 得 $x<\frac{2}{a}$ 或 $x>2$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},2)$ 内单调递增，在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 内单调递减.

② 当 $0<a<1$ 时，

由 $f'(x)>0$ 得 $x<2$ 或 $x>\frac{2}{a}$ ；

由 $f'(x)<0$ 得 $2<x<\frac{2}{a}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 和 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 内单调递增，在区间 $(2,\frac{2}{a})$ 内单调递减.

③ 当 $a=1$ 时， 因为 $f'(x)=(x-2)^2\geqslant 0$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

④ 当 $a>1$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x<\frac{2}{a}$ 或 $x>2$ ；

由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{2}{a}<x<2$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 内单调递增，在区间 $(\frac{2}{a},2)$ 内单调递减.

综上可知，当 $a=0$ 时， $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 内单调递增，在区间 $(2,+\infty)$ 内单调递减；

当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},2)$ 内单调递增，在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 内单调递减；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 和 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 内单调递增，在区间 $(2,\frac{2}{a})$ 内单调递减；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 内单调递增，在区间 $(\frac{2}{a},2)$ 内单调递减.

……………………14 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=0$. ………… 4 分

（Ⅱ）由 $f(x)=\mathrm{e}^x+(a-\mathrm{e})x-ax^2$ 可知，$f(0)=1$，$f(1)=0$.

当 $a<0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+a(1-2x)$.

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2a>0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，即 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增.

又 $f'(0)=1-\mathrm{e}+a<0$，$f'(1)=-a>0$.

故存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$.

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0,1)$ 内单调递增，此时 $f(x)<f(1)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 区间 $(0,x_0)$ 上单调递减.

又因为 $f(0)=1>0, f(x_0)<0$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 内有唯一零点.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在唯一零点. …………… 14 分

（21）（共 14 分）

解：（Ⅰ） $E=\{1,2,5,6,7,9\}$ 具有性质 Ω，如可取 $A=\{1,2\}$，$B=\{5,7\}$，$C=\{6,9\}$；

$F=\{1,2,3,4,5,6\}$ 不具有性质 Ω；理由如下：

对于 F 中的元素 6，$1+5=6$ 或者 $2+4=6$，

如果 $1+5=6$，那么剩下 3 个元素 $2,3,4$，不满足条件；

如果 $2+4=6$，那么剩下 3 个元素 $1,3,5$，也不满足条件.

因此，集合 $F=\{1,2,3,4,5,6\}$ 不具有性质 Ω.　　………… 6 分

（Ⅱ）证明：假设符合条件的 M_m 只有有限个，设其中元素个数最多的为 M_{m_0}.

对于 M_{m_0}，由题设可知，存在 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{m_0}\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{m_0}\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_{m_0}\}$ 满足条件. 构造如下集合

$A_1=\left\{2a_1,2a_2,\cdots,2a_{m_0},1,3,\cdots,6m_0-1\right\}$，

$B_1=\left\{2b_1,2b_2,\cdots,2b_{m_0},9m_0,9m_0-1,\cdots,6m_0+1\right\}$，

$C_1=\left\{2c_1,2c_2,\cdots,2c_{m_0},9m_0+1,9m_0+2,\cdots,12m_0\right\}$，

由于 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{m_0},b_1,b_2,\cdots,b_{m_0},c_1,c_2,\cdots,c_{m_0}\}=\{1,2,3,\cdots,3m_0\}$，

所以 $\{2a_1,2a_2,\cdots,2a_{m_0},2b_1,2b_2,\cdots,2b_{m_0},2c_1,2c_2,\cdots,2c_{m_0}\}=\{2,4,6,\cdots,6m_0\}$.

易验证 A_1，B_1，C_1 对集合 $M_{4m_0}=\{1,2,\cdots,12m_0\}$ 满足条件，而 $4m_0>m_0$，

也就是说存在比 M_{m_0} 的元素个数更多的集合 M_{4m_0} 具有性质 Ω，与假设矛盾.

因此具有性质 Ω 的集合 M_m 有无穷多个.　　………………… 14 分