2024 北京海淀高一（上）期末

数　学

2024.01

考生须知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题．满分 100 分．考试时间 90 分钟． 2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名． 3．答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答． 4．考试结束，请将本试卷交回．

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A=\{-2,-1,0\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $(0,2)$　　D. $(1,2)$

2. 某学校有高中学生 1500 人，初中学生 1000 人．学生社团创办文创店，想了解初高中学生对学校吉祥物设计的需求，用分层抽样的方式随机抽取若干人进行问卷调查．已知在初中学生中随机抽取了 100 人，则在高中学生中抽取了（　）

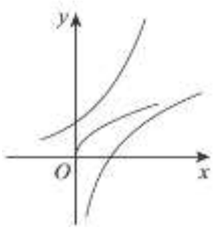
A. 150 人　　B. 200 人　　C. 250 人　　D. 300 人

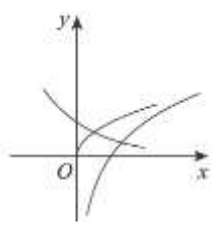
3. 命题“$\exists x\in \mathbf{R}, x+2\le 0$”的否定是（　）

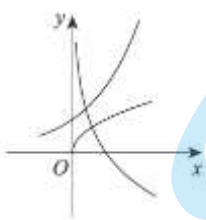
A. $\exists x\in \mathbf{R}, x+2>0$　　B. $\exists x\in \mathbf{R}, x+2<0$

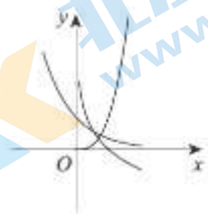
C. $\forall x\in \mathbf{R}, x+2>0$　　D. $\forall x\in \mathbf{R}, x+2<0$

4. 在同一个坐标系中，函数 $f(x)=\log_a x, g(x)=a^{-x}, h(x)=x^a$ 的部分图象可能是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 下列函数中，既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=-x|x|$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　　D. $f(x)=x^3$

6. 已知 $a=2^{0.1}, b=\log_2\sqrt{3}, c=\log_3\sqrt{2}$，则实数 a，b，c 的大小关系是（　）

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{a}{2}$，则“$a=1$”是“$f\left(x\right)$ 为奇函数”的（　）

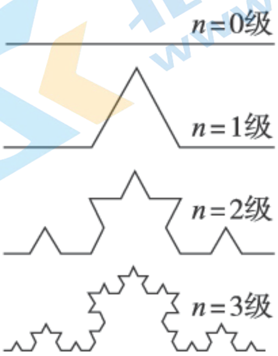
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_2\left(x+1\right)+x-2$，则不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为（　）

A. $\left(-\infty,1\right)$　　B. $\left(-1,1\right)$　　C. $\left(0,1\right)$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

9. 科赫$\left(\text{Koch}\right)$曲线是几何中最简单的分形．科赫曲线的产生方式如下：如图，将一条线段三等分后，以中间一段为边作正三角形并去掉原线段生成 1 级科赫曲线“”，将 1 级科赫曲线上每一线段重复上述步骤得到 2 级科赫曲线，同理可得 3 级科赫曲线……在分形中，一个图形通常由 N 个与它的上一级图形相似，且相似比为 r 的部分组成．若 $r^D=\dfrac{1}{N}$，则称 D 为该图形的分形维数．那么科赫曲线的分形维数是（　）



A. $\log_2 3$　　B. $\log_3 2$　　C. 1　　D. $2\log_3 2$

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+a, x\le a\\ x^2, x>a\end{cases}$，若存在非零实数 x_0，使得 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$　　C. $[-4,0]$　　D. $\left[-2,\dfrac{1}{4}\right]$

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．

11. 函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是______．

12. 农科院作物所为了解某种农作物的幼苗质量，分别从该农作物在甲、乙两个不同环境下培育的幼苗中各随机抽取了 15 株幼苗进行检测，量出它们的高度如下图（单位：cm）：

甲		乙
5 3 3 2 1	3	7
9 5 4 3	4	3 4 5 5 7 8 8 9
9 8 7 5	5	2 4 4 5 8
5 3	6	0

记该样本中甲、乙两种环境下幼苗高度的中位数分别为 a，b，则 $|a-b|=$__________；

若以样本估计总体，记甲、乙两种环境下幼苗高度的标准差分别为 s_1,s_2，则 s_1__________s_2（用"<，>或="连接）.

13. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-a$ 没有零点，则 a 的一个取值为__________；a 的取值范围是__________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq 0,\\ -x^2, x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的单调递增区间为__________；满足 $|f(x)|<4\times 10^4$ 的整数解的个数为__________.（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$）

15. 共享单车已经逐渐成为人们在日常生活中必不可少的交通工具．通过调查发现人们在单车选择时，可以使用"Tullock 竞争函数"进行近似估计，其解析式为 $S(x)=\dfrac{x^a}{x^a+(1-x)^a}, x\in[0,1], a>0$（其中参数 a 表示市场外部性强度，a 越大表示外部性越强）．给出下列四个结论：

①$S(x)$ 过定点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

②$S(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增；

③$S(x)$ 关于 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称；

④取定 x，外部性强度 a 越大，$S(x)$ 越小.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 国务院正式公布的《第一批全国重点文物保护单位名单》中把重点文物保护单位（下述简称为"第一批文保单位"）分为六大类．其中"A:革命遗址及革命纪念建筑物"、"B:石窟寺"、"C:古建筑及历史纪念建筑物"、"D:石刻及其他"、"E:古遗址"、"F:古墓葬"．北京的 18 个"第一批文保单位"所在区分布如下表：

行政区	门类	个数
东城区	A：革命遗址及革命纪念建筑物	3
	C:古建筑及历史纪念建筑物	5
西城区	C:古建筑及历史纪念建筑物	2
丰台区	A:革命遗址及革命纪念建筑物	1
海淀区	C:古建筑及历史纪念建筑物	2
房山区	C:古建筑及历史纪念建筑物	1

	E:古遗址	1
昌平区	C:古建筑及历史纪念建筑物	1
	F:古墓葬	1
延庆区	C:古建筑及历史纪念建筑物	1

（1）某个研学小组随机选择北京市“第一批文保单位”中的一个进行参观，求选中的参观单位恰好为“C:古建筑及历史纪念建筑物”的概率；

（2）小王同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“A:革命遗址及革命纪念建筑物”中的一个进行参观；小张同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“C:古建筑及历史纪念建筑物”中的一个进行参观．两人选择参观单位互不影响，求两人选择的参观单位恰好在同一个区的概率；

（3）现在拟从北京市“第一批文保单位”中的“C:古建筑及历史纪念建筑物”中随机抽取 2 个单位进行常规检查．记抽到海淀区的概率为 P_1，抽不到海淀区的概率记为 P_2，试判断 P_1 和 P_2 的大小（直接写出结论）.

17. 已知集合 $A=\left\{x \mid x^2-x-2<0\right\}, B=\left\{x \,\middle|\, \left|x-\frac{5}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right\}$.

（1）求 $A\cup B, A\cap \complement_{\mathbf{R}} B$；

（2）记关于 x 的不等式 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\leq 0$ 的解集为 M，若 $B\cup M=\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x)=\ln(1-x)+k\ln(1+x)$．请从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，解答下面的问题.

条件①： $f(x)+f(-x)=0$；

条件②： $f(x)-f(-x)=0$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答记分.

（1）求实数 k 的值；

（2）设函数 $F(x)=(1-x)(1+x)^k$，判断函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性，并给出证明；

（3）设函数 $g(x)=f(x)+x^k+2|k|$，指出函数 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上的零点个数，并说明理由.

19. 已知函数 $f(x), g(x), h(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，给出下面两个定义：

①若存在唯一的 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(g(x))=h(f(x))$，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 唯一交换；

②若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(g(x))=h(f(x))$，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换.

（1）请判断函数 $g(x)=x+1$ 与 $h(x)=x-1$ 关于 $f(x)=x^2$ 是唯一交换还是任意交换，并说明理由；

（2）设 $f(x)=a\left(x^2+2\right)(a\neq 0), g(x)=x^2+bx-1$，若存在函数 $h(x)$，使得 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换，求 b 的值；

（3）在（2）的条件下，若 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于 $w(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ 唯一交换，求 a 的值．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】B

【分析】根据补集概念求解出结果.

【详解】因为$U=\ -2,-1,0,1,2\ $，$A=\{-2,-1,0\}$，

所以$\complement_U A=\{1,2\}$，

故选：B.

2.【答案】A

【分析】根据各层的抽样比相同求解出结果.

【详解】因为初中学生1000人抽取了100人，所以抽样比为$\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$，

所以高中生抽取$1500\times\frac{1}{10}=150$人，

故选：A.

3.【答案】C

【分析】根据特称命题的否定是全称命题分析判断.

【详解】由题意可知：命题“$\exists x\in\mathbf{R},x+2\le 0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R},x+2>0$”.

故选：C.

4.【答案】C

【分析】先根据$f(x),g(x)$的单调性相反排除 AD，然后根据幂函数图象判断出a的范围，由此可知正确图象.

【详解】因为$f(x)=\log_a x,g(x)=a^{-x}$在同一坐标系中，

所以$f(x),g(x)$的单调性一定相反，且$f(x),g(x)$图象均不过原点，故排除 AD；

在 BC 选项中，过原点的图象为幂函数$h(x)=x^a$的图象，由图象可知$0<a<1$，

所以$f(x)=\log_a x$单调递减，$g(x)=a^{-x}$单调递增，故排除 B，

故选：C.

5.【答案】B

【分析】利用定义判断函数的奇偶性可对 A、C 判断；利用函数奇偶性的判断并结合函数单调性可对 B、D 判断.

【详解】对 A、C：由$f(x)=\sqrt{x}$，定义域为$[0,+\infty)$，所以$f(x)=\sqrt{x}$不是奇函数，故 A 错误；

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 定义域为 $\mathbf{R}$， $f\left(-x\right)=\dfrac{1}{\left(-x\right)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 是偶函数，故 C 错误；

对 B、D： $f\left(x\right)=-x\left|x\right|$，定义域为 $\mathbf{R}$， $f\left(-x\right)=-\left(-x\right)\left|-x\right|=x\left|x\right|=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

当 $x>0$ 时， $f\left(x\right)=-x^2$，且 $f\left(x\right)=-x^2$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，故 B 正确；

$f\left(x\right)=x^3$，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(-x\right)=\left(-x\right)^3=-x^3=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)=x^3$ 为奇函数，且在定义域上为增函数，故 D 错误；

故选：B.

6. 【答案】D

【分析】根据题意结合指、对数函数单调性运算求解.

【详解】因为 $b=\log_2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\log_2 3, c=\log_3\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 2$，

由 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，可得 $2^{0.1}>2^0=1$，即 $a>1$；

由 $y=\log_2 x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内单调递增，可得 $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$，即 $\dfrac{1}{2}<b<1$；

由 $y=\log_3 x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内单调递增，可得 $\log_3 2<\log_3 3=1$，即 $c<\dfrac{1}{2}$；

综上所述： $a>b>c$.

故选：D.

7. 【答案】C

【分析】根据“$a=1$”与“$f\left(x\right)$ 为奇函数”互相推出的情况判断属于何种条件.

【详解】当 $a=1$ 时， $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}$，定义域为 $\mathbf{R}$ 且关于原点对称，

所以 $f\left(-x\right)=\dfrac{1}{2^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^x}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^x+1-1}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+2^x}=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数；

当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时，显然定义域为 $\mathbf{R}$ 且关于原点对称，所以 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(-x\right)+f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2^{-x}+1}-\dfrac{a}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{a}{2}\right)=\left(\dfrac{2^x}{1+2^x}-\dfrac{a}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{a}{2}\right)=1-a=0$，

所以 $a=1$，

由上可知，“$a=1$”是“$f\left(x\right)$ 为奇函数”的充要条件，

故选：C.

8. 【答案】B

【分析】先求出 $f\left(x\right)$ 的定义域，然后分析 $f\left(x\right)$ 的单调性，再根据 $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(1\right)$ 求解出不等式解集.

【详解】 $f\left(x\right)=\log_2\left(x+1\right)+x-2$ 的定义域为 $\left(-1,+\infty\right)$，

因为 $y=\log_2\left(x+1\right), y=x-2$ 均在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f\left(x\right)=\log_2\left(x+1\right)+x-2$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增，

又因为 $f\left(1\right)=\log_2 2+1-2=0$，所以 $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(1\right)$，

所以不等式解集为 $x\in\left(-1,1\right)$，

故选：B.

9. 【答案】D

【分析】根据题意得出 Koch 曲线是由把全体缩小 $\frac{1}{3}$ 的 4 个相似图形构成的，再根据题设条件即可得出结果.

【详解】由题意 Koch 曲线是由把全体缩小 $\frac{1}{3}$ 的 4 个相似图形构成的，

因为 $\left(\frac{1}{3}\right)^D=\frac{1}{4}$，即 $3^D=4$，则 $D=\log_3 4=2\log_3 2$，

所以分形维数是 $D=2\log_3 2$.

故选：D.

10. 【答案】D

【分析】利用赋值和排除法可得结果

【详解】取 $a=\frac{1}{4}$，则 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+\frac{1}{4}, x\le\frac{1}{4}\\ x^2, x>\frac{1}{4}\end{cases}$，

若 $\begin{cases}x_0\le\frac{1}{4}\\ -x_0>\frac{1}{4}\end{cases}$，则 $x_0<-\frac{1}{4}$，由 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，得 $x_0^2=-\left(x_0+\frac{1}{4}\right)$，

解得 $x_0=-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}$，符合条件，排除选项 A、C,

取 $a=-4$，则 $f\left(x\right)=\begin{cases}x-4, x\le -4\\ x^2, x>-4\end{cases}$，

若 $x_0\le -4$ 时，$-x_0\ge 4$，由 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，得 $x_0^2=-\left(x_0-4\right)$，

解得 $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$，或 $x_0=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$，都不符合条件，

若 $\begin{cases}x_0>-4\\-4<-x_0<4\end{cases}$，即 $-4<x_0<4$，由 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，

得 $x_0^2=-x_0^2$，即 $x_0=0$，不符合条件，

若 $\begin{cases}x_0>-4\\-x_0\le -4\end{cases}$，即 $x_0\ge 4$，由 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，

得 $-x_0-4=-x_0^2$，解得 $x_0=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$，或 $x_0=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$，都不符合条件，

综上，$a\ne -4$，排除 B，选 D

故选：D.

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11.【答案】$(1,+\infty)$

【分析】利用真数大于零列不等式求解即可.

【详解】要使函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 有意义，

则 $x-1>0$，解得 $x>1$，

即函数 $f(x)=\lg(x-1)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$，

故答案为：$(1,+\infty)$.

【点睛】本题主要考查对数型复合函数的定义域，属于基础题.

12.【答案】 ①. 3 ②. >

【分析】空①根据题意分别求出甲乙环境下的15个高度数据，从而求出中位数，即可求解；空②利用标准差公式分别求出 s_1,s_2，从而求解.

【详解】对空①：由题意得甲环境的幼苗高度为：$31,32,33,33,35,43,44,45,49,55,57,58,59,63,65$，

其中位数 $a=45$，

乙环境的幼苗高度为：$37,43,44,45,45,47,48,48,49,52,54,54,55,58,60$，其中位数 $b=48$，

所以 $|a-b|=|45-48|=3$；

对空②：甲环境下的幼苗平均高度为：

$$\frac{31+32+33+33+35+43+44+45+49+55+57+58+59+63+65}{15}=46.8,$$

所以; 32 46.8 2+ 33−46.8 + 35 46.8 43 46.8 44 46.8 45 4− + − + − + − + − + − + − + − +] − ≈

甲环境下的幼苗平均高度为：

$$\frac{37+43+44+45+45+47+48+48+49+52+54+54+55+58+60}{15}=\frac{739}{15}$$

所以

$$s_2=\sqrt{\frac{1}{15}\left[\left(37-\frac{739}{15}\right)^2+\left(43-\frac{739}{15}\right)^2+\left(44-\frac{739}{15}\right)^2+2\times\left(45-\frac{739}{15}\right)^2+\left(47-\frac{739}{15}\right)^2+2\times\left(48-\frac{739}{15}\right)^2+\left(49-\frac{739}{15}\right)^2+\left(52-\frac{739}{15}\right)^2+2\times\left(54-\frac{739}{15}\right)^2+\left(55-\frac{739}{15}\right)^2+\left(58-\frac{739}{15}\right)^2+\left(60-\frac{739}{15}\right)^2\right]}\approx 5.99$$

所以 $s_1>s_2$.

故答案为：3；>.

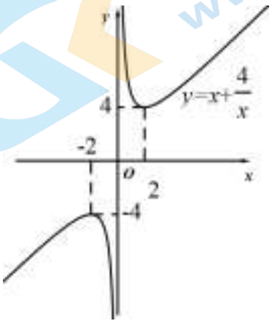
13.【答案】 ①. 0 （$a\in(-4,4)$ 即可） ②. $-4<a<4$

【分析】根据题意分析可知函数 $f(x)$ 没有零点，等价于 $y=x+\frac{4}{x}$ 与 $y=a$ 没有交点，结合对勾函数图象分析求解.

【详解】令 $f(x)=x+\frac{4}{x}-a=0$，则 $x+\frac{4}{x}=a$，

若函数 $f(x)$ 没有零点，等价于 $y=x+\frac{4}{x}$ 与 $y=a$ 没有交点，

作出 $y=x+\frac{4}{x}$ 的图象，如图所示：



由图象可知：若 $y=x+\frac{4}{x}$ 与 $y=a$ 没有交点，则 $-4<a<4$，

故答案为：0 （$a\in(-4,4)$ 即可）；$-4<a<4$.

14.【答案】 ①. $(-\infty,+\infty)$ ②. 215

【分析】第一个空，作出 $f(x)$ 的图象，由图可知 $f(x)$ 的单调递增区间；第二个空，分 $x\geq 0$ 和 $x<0$ 两种情况解不等式.

【详解】作出 $f(x)$ 的图象，由图可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，

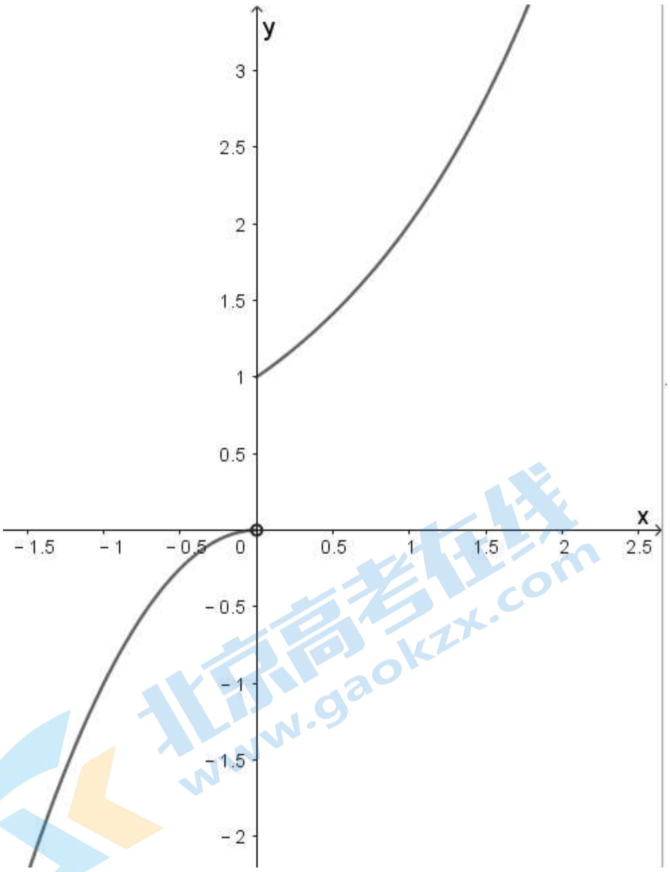
当 $x\geq 0$ 时，$|f(x)|=|2^x|=2^x<4\times 10^4$，解得 $x<\log_2(4\times 10^4)$，即 $x<2+\frac{4}{\lg 2}\approx 15.3$，

所以 $0\leq x<15.3$，

当 $x<0$ 时，$|f(x)|=|-x^2|=x^2<4\times 10^4$，解得 $-200<x<0$，

故满足 $|f(x)|<4\times 10^4$ 的整数解的个数为 215.

故答案为：$(-\infty,+\infty)$；215.



15.【答案】①②

【分析】对于①令 $x=\dfrac{1}{2}$ 即可求得定点可判断①的正误；对于②对 $S\left(x\right)$ 求导，判断导函数在 $x\in\left[0,1\right]$ 时的正负即可判断②的正误；对于③由②即可判断正误；对于④以 a 为自变量构造新函数，求导，判断单调性即可判断正误.

【详解】对于①，在 $S(x)$ 中，令 $x=\dfrac{1}{2}$，则 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}}{2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}}=\dfrac{1}{2}$，过定点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，故①正确；

对于②，$S'\left(x\right)=\dfrac{a\left[x\left(1-x\right)\right]^{a-1}}{\left[x^{a}+\left(1-x\right)^{a}\right]^{2}}$，当 $x\in\left[0,1\right]$，$S'\left(x\right)\geq 0$，则 $S\left(x\right)$ 为单调递增，故②正确；

对于③，由②知 $S\left(x\right)$ 为单调递增，故不存在对称性，故③错误；

对于④，以 a 为自变量，设 $S\left(x\right)$ 为 $T\left(a\right)$，则 $T'\left(a\right)=\dfrac{\left[x\left(1-x\right)\right]^{a}}{\left[x^{a}+\left(1-x\right)^{a}\right]^{2}}\ln\dfrac{x}{1-x}$，

$\because a>0$，故 $\dfrac{\left[x\left(1-x\right)\right]^{a}}{\left[x^{a}+\left(1-x\right)^{a}\right]^{2}}>0$，$T'\left(a\right)$ 的正负取决于 $\ln\dfrac{x}{1-x}$，

当$\frac{x}{1-x}<1$，即$0<x<\frac{1}{2}$时，$T'(a)<0$，随着a的增大，$S(x)$减小；

当$\frac{x}{1-x}>1$，即$\frac{1}{2}<x<1$时，$T'(a)>0$，随着a的增大，$S(x)$增大，故④错误.

故答案为：①②.

三、解答题共4小题，共40分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$\frac{2}{3}$

（2）$\frac{5}{16}$

（3）$P_1<P_2$

【分析】（1）由题意知总样本数为18，C:古建筑及历史纪念建筑物共有12，利用古典概率从而求解.

（2）由题意可知小王参观A:革命遗址及革命纪念建筑物与小张参观C:古建筑及历史纪念建筑物在同一个区的只有东城区，然后分别求出他们参观东城区的概率，从而求解.

（3）利用分类讨论求出相应的抽到海淀区的概率P_1和抽不到海淀区的概率P_2，从而求解.

【小问1详解】

设选中参观单位恰好为“C:古建筑及历史纪念建筑物”为事件A，

由题意知总共有18，“C:古建筑及历史纪念建筑物”有12，

所以$P(A)=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$.

【小问2详解】

设两人选择的参观单位恰好在同一个区为事件B，由题意可知小王参观A:革命遗址及革命纪念建筑物与小张参观C:古建筑及历史纪念建筑物在同一个区的只有东城区，

所以小王参观东城区景区的概率为$\frac{3}{4}$，小张参观东城区景区的概率为$\frac{5}{12}$，

所以$P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{16}$.

【小问3详解】

当抽到的2个都是海淀区的概率为$\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$，

当抽到的2个中有1个是海淀区的概率为$\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$，

所以$P_1=\frac{1}{66}+\frac{5}{33}=\frac{1}{6}$，$P_2=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，

所以$P_1<P_2$.

17.【答案】（1）$A\cup B=\{x|x<2\text{或}x\geq 4\}$，$A\cap \complement_{R}B=\{x|1<x<2\}$

（2）$\{m|0\le m\le 1\}$

【分析】（1）先求解出一元二次不等式、绝对值不等式的解集为集合 A,B，然后根据并集概念求解出 $A\cup B$，再根据交集和补集概念求解出 $A\cap \complement_{\mathrm{R}}B$；

（2）根据不等式先求解出 M，然后根据 $B\cup M=\mathbf{R}$ 列出关于 m 的不等式组，由此求解出结果.

【小问 1 详解】

因为 $x^2-x-2<0$，解得 $-1<x<2$，所以 $A=\{x|-1<x<2\}$，

又因为 $\left|x-\frac{5}{2}\right|\ge\frac{3}{2}$，解得 $x\ge4$ 或 $x\le1$，所以 $B=\{x|x\le1$ 或 $x\ge4\}$，

所以 $A\cup B=\{x|x<2$ 或 $x\ge4\}$；

又因为 $\complement_{\mathrm{R}}B=\{x|1<x<4\}$，

所以 $A\cap\complement_{\mathrm{R}}B=\{x|1<x<2\}$.

【小问 2 详解】

因为 $x^2-(2m+4)x+m^2+4m\le0\Leftrightarrow(x-m)(x-(m+4))\le0$，

所以 $M=\{x|m\le x\le m+4\}$，

若 $B\cup M=\mathbf{R}$，则 $\begin{cases}m\le1\\ m+4\ge4\end{cases}$，解得 $0\le m\le1$，

所以 m 的取值范围是 $\{m|0\le m\le1\}$.

18.【答案】（1）答案见解析

（2）$F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，证明见解析

（3）$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有且仅有一个零点，理由见解析

【分析】（1）根据题意结合奇偶性的定义分析求解；

（2）根据单调性的定义分析证明；

（3）根据题意结合单调性以及奇偶性的性质判断 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上的单调性，再结合零点存在性定理分析判断.

【小问 1 详解】

令 $\begin{cases}1-x>0\\ 1+x>0\end{cases}$，解得 $-1<x<1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，

若选①：因为 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(x)$ 为奇函数，

则 $\ln(1-x)+k\ln(1+x)+\ln(1+x)+k\ln(1-x)=0$，

整理得 $(1+k)\ln(1-x^2)=0$，

注意到对任意 $x\in(-1,1)$ 上式均成立，可得 $1+k=0$，解得 $k=-1$；

若选②：因为 $f(x)-f(-x)=0$，即 $f(x)$ 为偶函数，

则 $\ln(1-x)+k\ln(1+x)-[\ln(1+x)+k\ln(1-x)]=0$，

整理得 $(1-k)\ln\dfrac{1-x}{1+x}=0$，

注意到对任意 $x\in(-1,1)$ 上式均成立，可得 $1-k=0$，解得 $k=1$.

【小问 2 详解】

若选①：则 $k=-1$，可得 $F(x)=(1-x)(1+x)^{-1}=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2}{1+x}-1$，

可知函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，证明如下：

对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，

则 $F(x_1)-F(x_2)=\left(\dfrac{2}{1+x_1}-1\right)-\left(\dfrac{2}{1+x_2}-1\right)=\dfrac{2}{1+x_1}-\dfrac{2}{1+x_2}=\dfrac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}$，

因为 $0<x_1<x_2<1$，则 $1+x_1>0,1+x_2>0,x_2-x_1>0$，

可得 $F(x_1)-F(x_2)>0$，即 $F(x_1)>F(x_2)$，

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减；

若选②：则 $k=1$，可得 $F(x)=(1-x)(1+x)=1-x^2$，

可知函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，证明如下：

对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，

则 $F(x_1)-F(x_2)=(1-x_1^2)-(1-x_2^2)=x_2^2-x_1^2=(x_1+x_2)(x_2-x_1)$，

因为 $0<x_1<x_2<1$，则 $x_1+x_2>0,x_2-x_1>0$，

可得 $F(x_1)-F(x_2)>0$，即 $F(x_1)>F(x_2)$，

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减.

【小问 3 详解】

若选①：则 $k=-1$，则 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}+2=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1}{x}+2$，

由（2）可知 $F(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，且 $y=\ln x$ 在定义域内单调递增，

可知 $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，

又因为 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，

且 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，可知 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递减，

结合 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln 3>0$，$g\left(-\dfrac{1}{10}\right)=\ln\dfrac{11}{9}-8<0$，

可知 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有且仅有一个零点；

若选②：则 $k=1$，则 $g(x)=f(x)+x+2=\ln\left(1-x^2\right)+x+2$，

由（2）可知 $F(x)=1-x^2$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，且 $y=\ln x$ 在定义域内单调递增，

可知 $f(x)=\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln\left(1-x^2\right)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，

又因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增，

且 $y=x+2$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增，可知 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增，

结合 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}>\ln\dfrac{1}{e}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，$g\left(-\dfrac{99}{100}\right)=\ln\dfrac{199}{10000}+\dfrac{101}{100}<\ln\dfrac{1}{e^2}+2=0$，

可知 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有且仅有一个零点.

19.【答案】（1）唯一交换，理由见解析

（2）$b=0$

（3）$a=\dfrac{1-e}{2(e+1)}$

【分析】（1）根据方程 $f(g(x))=h(f(x))$ 解的情况判断即可；

（2）根据“对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(g(x))=h(f(x))$ 成立”得到关于 x 的方程，然后设出 $h(x)$ 的解析式，根据方程左右两边对应项相同求解出 b 的值；

（3）根据条件通过分离参数将问题转化为“存在唯一实数 x，使得 $a=\dfrac{\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$”，然后分析 $s(x)=\dfrac{\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$ 的奇偶性，从而确定出 $a=s(0)$，由此可求 a 的值.

【小问 1 详解】

$g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 是唯一交换，理由如下：

因为 $f(g(x))=(x+1)^2$，$h(f(x))=x^2-1$，

令 $f(g(x))=h(f(x))$，所以 $(x+1)^2=x^2-1$，解得 $x=-1$，

所以 $f(g(x))=h(f(x))$ 有唯一解 $x=-1$，

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 是唯一交换.

【小问 2 详解】

由题意可知，对任意的 $x\in\mathbf{R}$， $f(g(x))=h(f(x))$ 成立，

即对任意的 $x\in\mathbf{R}$， $a\left[\left(x^2+bx-1\right)^2+2\right]=h\left(a\left(x^2+2\right)\right)$；

考虑到等式左右两边最高次和最高次项的系数相等，不妨设 $h(x)=\dfrac{1}{a}x^2+cx+d$，

所以 $a\left[\left(x^2+bx-1\right)^2+2\right]=\dfrac{1}{a}\left[a\left(x^2+2\right)\right]^2+c\cdot a\left(x^2+2\right)+d$，

所以 $a\left(x^4+b^2x^2+1+2bx^3-2x^2-2bx+2\right)=ax^4+4ax^2+4a+acx^2+2ac+d$，

所以 $\begin{cases}2ab^2=0\\ a\left(b^2-2\right)=4a+ac\\ 3a=4a+2ac+d\end{cases}$，所以 $\begin{cases}b=0\\ c=-6\\ d=11a\end{cases}$，即可取 $h(x)=\dfrac{1}{a}x^2-6x+11a$，

经检验 $h(x)=\dfrac{1}{a}x^2-6x+11a$ 满足要求，

综上所述，$b=0$.

【小问 3 详解】

当 $b=0$ 时，$g(x)=x^2-1$，

因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于 $w(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 唯一交换，

所以存在唯一实数 x，使得 $w\left(x^2-1\right)=f\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$，

即存在唯一实数 x，使得 $\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}=a\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]$，

即存在唯一实数 x，使得 $a=\dfrac{\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$；

令 $s(x)=\dfrac{\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$，$q(x)=\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}$，$p(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2$，且 $s(x),q(x),p(x)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$，

又$q(-x)=\dfrac{e^{(-x)^2-1}-1}{e^{(-x)^2-1}+1}=\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}=q(x)$，

$$p(-x)=\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)^2+2=\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2+2=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2=p(x)，$$

所以$q(x),p(x)$都是偶函数，所以$s(x)$为偶函数，

因此，若存在唯一实数x使得$a=\dfrac{\dfrac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$，只能是$a=s(0)$，

所以$a=\dfrac{\dfrac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+1}}{2}=\dfrac{1-e}{2(e+1)}$，

综上所述，a的取值为$\dfrac{1-e}{2(e+1)}$.

【点睛】关键点点睛：本题考查函数的新定义，涉及方程解以及函数奇偶性等相关问题，对学生的理解与计算能力要求较高，难度较大."新定义"题型的关键是根据新定义的概念、新公式、新定理、新法则、新运算去解决问题，本题第二问可以从方程左右两边对应相等入手，第三问则可以从函数的奇偶性入手进行分析.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！