姓名＿＿＿＿＿＿　　学校＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　坐号＿＿＿＿＿＿

2021 年全国高中数学联赛山东赛区预赛试卷

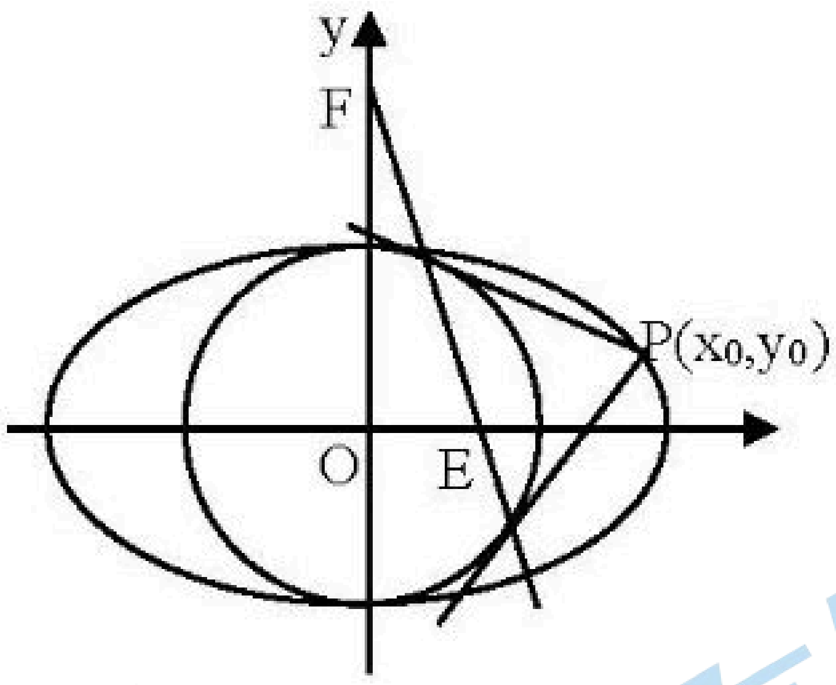
一.填空题(本题共 12 道小题,每题 5 分,共 60 分)

得分	

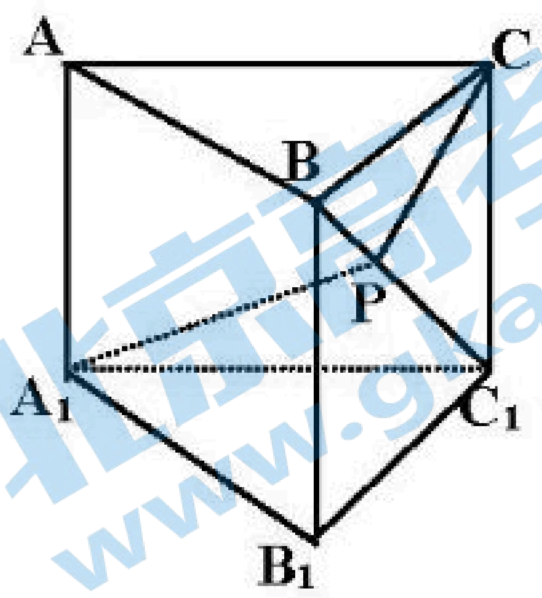
1. 设集合 A={a_1,a_2,a_3,a_4}所有三元子集的三数之积构成集合 B={24,30,40,60}.则 A=＿＿＿＿;

2. 已知 Rt∆ABC 的三个顶点 A,B,C 均在抛物线 $y=x^2$ 上,并且斜边 AB 平行 x 轴,则斜边 AB 上的高 CD 等于 ＿＿＿＿.

3. 若非零实数 a,b,c 分别是一等差数列的第 m,n,p 项,也是一等比数列的第 m,n,p 项.则 $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}$ 的值是＿＿＿＿＿＿＿.



4. 过椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上一点 P 做圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线,切点弦所在直线与 x,y 轴分别交于点 E,F.则 ∆EOF 面积的最小值是＿＿＿＿.



5. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形,∠ACB=90°, AC=6,BC=$CC_1=\sqrt{2}$,P 是 BC_1 上一动点.则 $CP+PA_1$ 的最小值是＿＿＿＿＿.

6. 将两个 a 和两个 b 共 4 个字母填入 4×4 的方格表内,每格至多填一个字母,则相同字母既不同行又不同列的填法种数是＿＿＿＿＿;

7. 不等式 $\log_{14}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)^6\geq\log_2 x$ 的解集是＿＿＿＿＿＿;

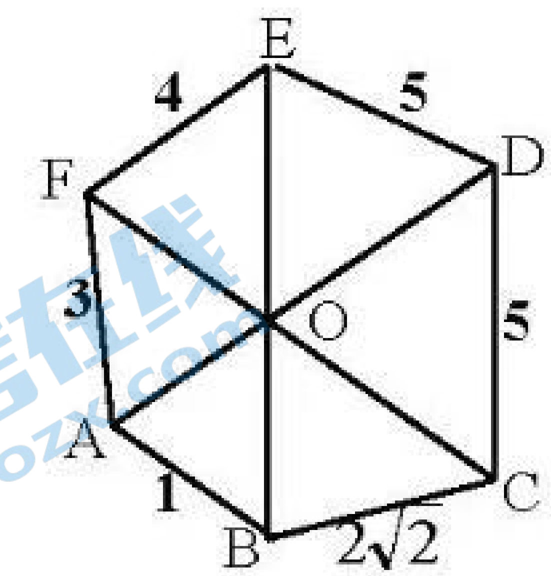
8. 设 $x,y,z,u,v\in R^+$,则 $f=\dfrac{xy+yz+zu+uv}{2x^2+y^2+2z^2+u^2+2v^2}$ 的最大值是＿＿＿＿＿;

9. 四面体 OABC 中,∠AOB=45°,∠AOC=∠BOC=30°,则二面角 A−OC−B 的平面角 α 的余弦值是＿＿＿＿＿＿;

10. 在直径为$\sqrt{2}+1$,高为 8 的圆柱形桶内装直径为 1 的球,最多可装______个;

11.数列$\{a_n\}$为:1,1,2,1,1,2,3,1,1,2,1,1,2,3,4,⋯.即先取 $a_1=1$,接着复制该项粘贴在后面作为 a_2, 并添加后继数 2 作为 a_3, 再复制所有项 1,1,2 并粘贴在后面作为 a_4,a_5,a_6, 并添加后继数 3 作为 a_7. ⋯依次继续下去. 则 a_{2021}=______;

12. 如图,已知凸六边形的对角线 AD,BE,CF 交于 O,且两两夹角都是 60^0,若 AB=1,BC=$2\sqrt{2}$,CD=DE=5,EF=4,FA=3.则该凸六边形面积 S 的最大值是________;



二.**解答题**(本题共 4 道小题,每题 15 分,共 60 分)

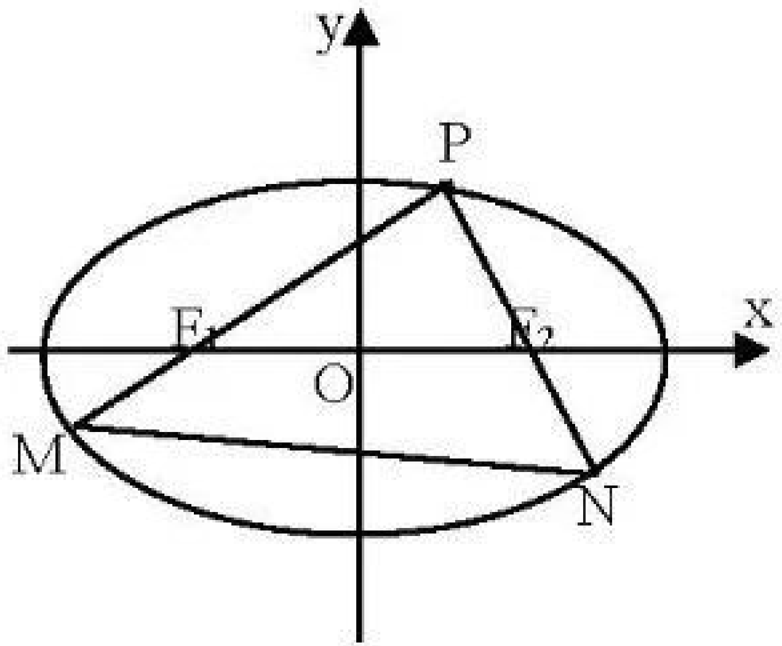
13.求正实数 a 的取值范围,使得关于 x 的不等式 $\log_a x\leqslant x\leqslant a^x$ 在区间$(0,+\infty)$上恒成立;并指出当 a 为何值时,函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有交点?

得分	

14. 设 p 为椭圆 C: $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上第一象限内的任一点,F_1,F_2 为左右焦点,直线 PF_1,PF_2 分别交 C 于 M,N.若 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1M}$,$\overrightarrow{PF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2N}$.

得分	

求点 P 坐标使得直线 MN 的斜率等于 $-\frac{1}{9}$.



15. 求最小常数 λ，使不等式 $xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\le\lambda(x+y+z)^4$ 对所有非负实数 x,y,z 都成立.

得分	

16.如果任取 1,2,…,50 的一组数中,总有两个不同数的乘积是这两数和的整数倍.问最少要取多少个数?

得分	

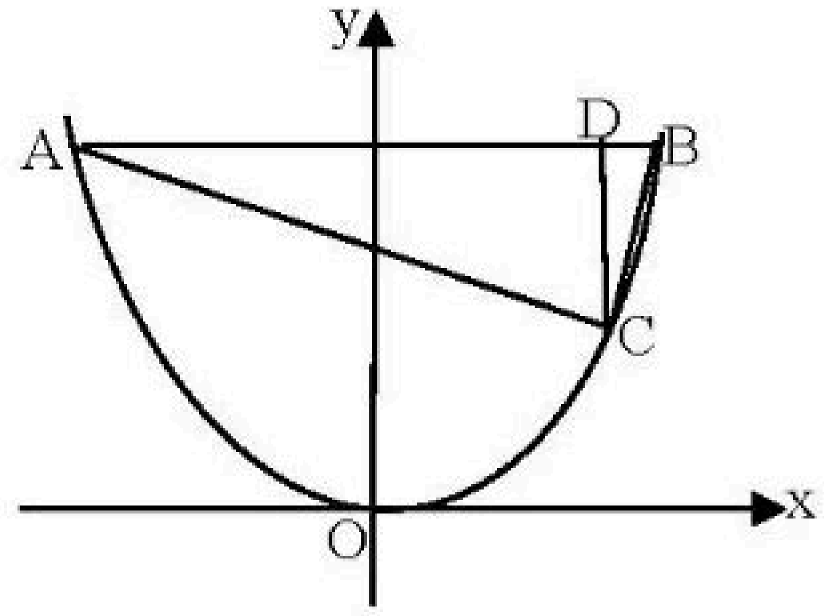
2021年全国高中数学联赛山东赛区预赛试题参考答案

一、填空题(本题共12道小题,每小题5分,共60分)

1.设集合 A={a_1,a_2,a_3,a_4}所有三元子集的三数之积构成集合 B={24,30,40,60}，则 A=______.

解:因所有三元子集的元素之积$(a_1a_2a_3a_4)^3=24\times30\times40\times60=1728000=120^3$，所以 $a_1a_2a_3a_4=120$，分别除以 B 中元素即得 A={2,3,4,5}。

2.已知 Rt△ABC 的三个顶点 A，B，C 均在抛物线 $y=x^2$ 上,并且斜边 AB 平行 x 轴，则斜边 AB 上的高 CD 等于______.



解:设 $A(-a,a^2),B(a,a^2),C(c,c^2)$，则 $K_{AC}\cdot K_{BC}=\dfrac{c^2-a^2}{c+a}\cdot\dfrac{c^2-a^2}{c-a}$

$=c^2-a^2=-1$即，所以$|CD|^2=|AD||BD|=(a+c)(a-c)$

$=a^2-c^2=1$，故|CD|=1.

3.若非零实数 a,b,c 分别是一等差数列的第 m,n,p 项，也是一等比数列的第 m,n,p 项。则 $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}$ 的值是__________.

解:设等差数列首项 A 公差 d,等比数列首项 B 公比 q,则有 $a=A+(m-1)d=$

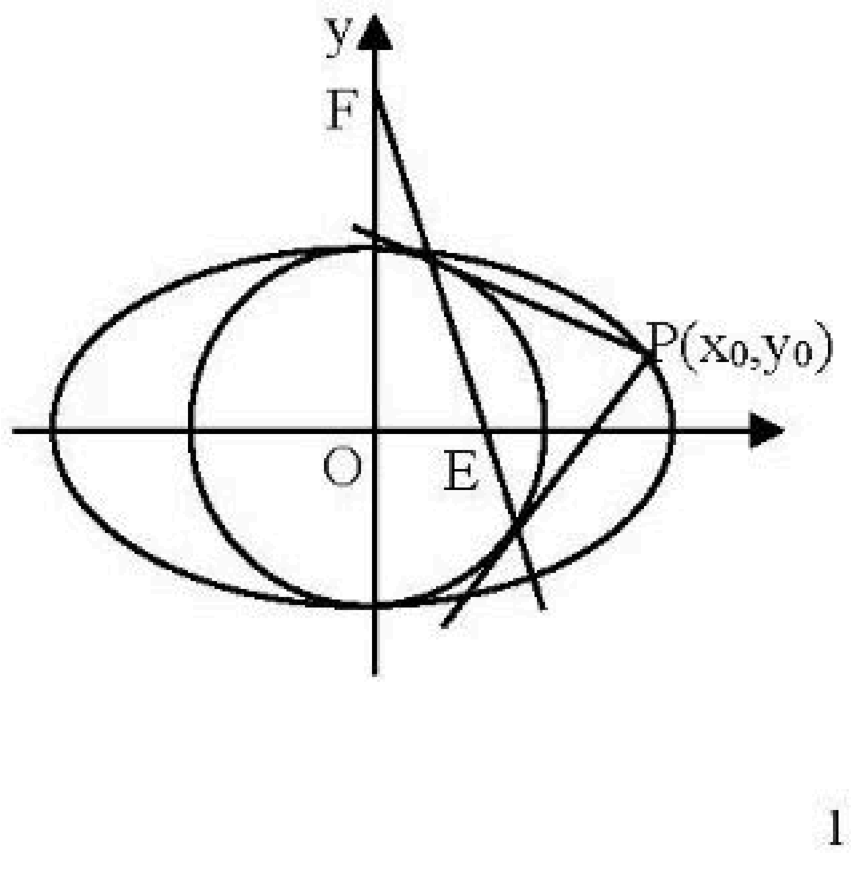
$=Bq^{m-1},b=A+(n-1)d=Bq^{n-1},c=A+(p-1)d=Bq^{p-1}$,所以 $b-c=(n-p)d,c-a=$

$(p-m)d=Bq^{n-1},a-b=(m-n)d$，故 $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=a^{(n-p)d}b^{(p-m)d}c^{(m-n)d}$

$=B^{(n-p)d+(p-m)d+(m-n)d}\cdot q^{(m-1)(n-p)d+(n-1)(p-m)d+(p-1)(m-n)d}=B^0q^0=1$.

4. 过椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上点 P 做圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点弦所在直线与 x,y 轴分别交于 E,F.

则△EOF 面积最小值是______.

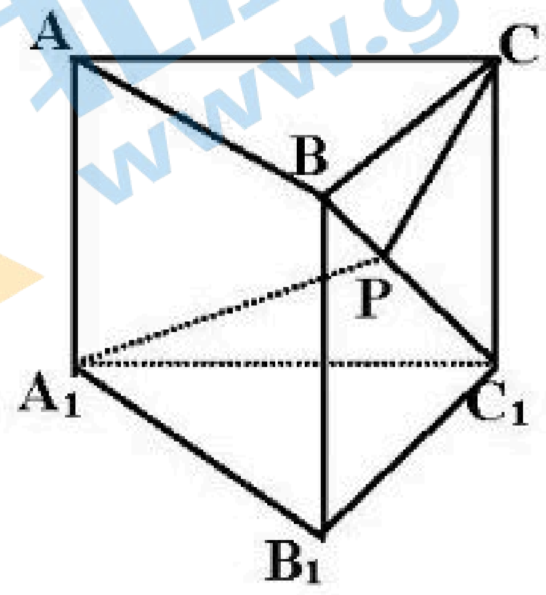


解:设 $P(x_0,y_0)$,则切点弦为 $x_0x+y_0y=4$,$E(\dfrac{4}{x_0},0)$,$F(0,\dfrac{4}{y_0})$，

由 $1=x_0^2+\dfrac{y_0^2}{4}\geq|x_0||y_0|$ 即 $|x_0||y_0|\leq1$,得 $S_{\Delta EOF}=\dfrac{8}{|x_0||y_0|}\geq8$，

当 $|x_0|=\dfrac{1}{\sqrt2}$,$|y_0|=\sqrt2$ 等号成立,故△EOF 面积最小值是 8.

5. 已知直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形，∠ACB=90°，AC=6，BC=CC_1=$\sqrt{2}$，P 是 BC_1 上一动点。则 CP+PA_1 的最小值是________.



解：设 BP=x,则 CP+PA_1=$\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{(x-2)^2+6^2}$

$=\sqrt{(x-1)^2+1^2}+\sqrt{(x-2)^2+6^2}$ 表示点 Q(x,0)到 M(1,1),

N(2,-6)距离之和,故$(CP+PA_1)_{min}$=|MN|=$5\sqrt{2}$.

6. 将两个 a 和两个 b 共 4 个字母填入 4×4 的方格表内，每格至多填一个字母，则相同字母既不同行又不同列的填法种数是________.

解:两个 a 的填法 $\dfrac{16\times9}{2!}=72$ 种, 两个 b 的填法 $\dfrac{16\times9}{2!}=72$ 种, 两个 a 格内都填 b 的填法 72 种,

两个 a 格内恰有一个填 b 的填法 $C_{16}^1A_9^2=16\times72$ 种,故相同字母不同行不同列的填法种数是 $72^2-72-16\times72=3960$.

另:两 a 的填法 72 种,两 b 的填法 $\dfrac{2\times9+8\times8+4\times7}{2!}=55$ 种, 故相同字母不同行不同列的填法种数是 72×55=3960.

3	2	2	3
2	***a***	1	2
2	1	***a***	2
3	2	2	3

7. 不等式 $\log_{14}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)^6\ge\log_2 x$ 的解集是________;

解:式⇔ $\log_{14}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)\ge\log_{64}x$,设 $\log_{64}x=t$ 即 $64^t=x$, $\sqrt{x}=8^t$, $\sqrt[3]{x}=4^t$, $\sqrt[6]{x}=2^t$

式即 $\log_{14}\left(8^t+4^t+2^t\right)\ge t=\log_{14}14^t\Leftrightarrow 8^t+4^t+2^t\ge14^t\Leftrightarrow f(t)=\left(\dfrac{8}{14}\right)^t+\left(\dfrac{4}{14}\right)^t+\left(\dfrac{2}{14}\right)^t\ge1$,由

$f(t)$递减且 $f(1)=1$,所以 $f(t)\ge1\Leftrightarrow t\le1\Leftrightarrow\log_{64}x\le1\Leftrightarrow 0<x\le64$ 即 $(0,64]$.

8. 设 $x,y,z,u,v\in R^+$,则 $f=\dfrac{xy+yz+zu+uv}{2x^2+y^2+2z^2+u^2+2v^2}$ 的最大值是________.

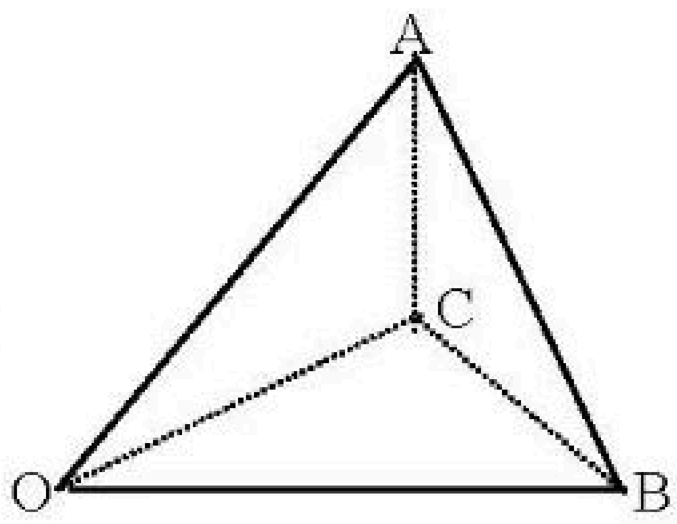
解:由 $2x^2+y^2+2z^2+u^2+2v^2=2x^2+\dfrac{y^2}{3}+\left(\dfrac{2y^2}{3}+z^2\right)+z^2+\dfrac{2u^2}{3}+\left(\dfrac{u^2}{3}+2v^2\right)$

$\ge2\sqrt{\dfrac{2}{3}}(xy+yz+zu+uv)$,知 $f=\dfrac{xy+yz+zu+uv}{2x^2+y^2+2z^2+u^2+2v^2}\le\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.等号成立仅当

$\sqrt{2}x=\frac{y}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}y=z,z=\sqrt{\frac{2}{3}}u,\frac{u}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}v\Leftrightarrow\sqrt{6}x=y,\sqrt{2}y=\sqrt{3}z=\sqrt{2}u,u=\sqrt{6}v\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=u,x=v,\sqrt{6}x=y,\sqrt{2}y=\sqrt{3}z$,当$x=v=1y=u=\sqrt{6},z=2$时,$f_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

9. 四面体 OABC 中,$\angle AOB=45^0$,$\angle AOC=\angle BOC=30^0$,则二面角 A－OC－B 的平面角$\alpha$的余弦值是________;



解:不妨设 $AC\perp OC\perp BC$,$\angle ACB=\alpha$,$\angle AOC=\angle BOC=\theta$,

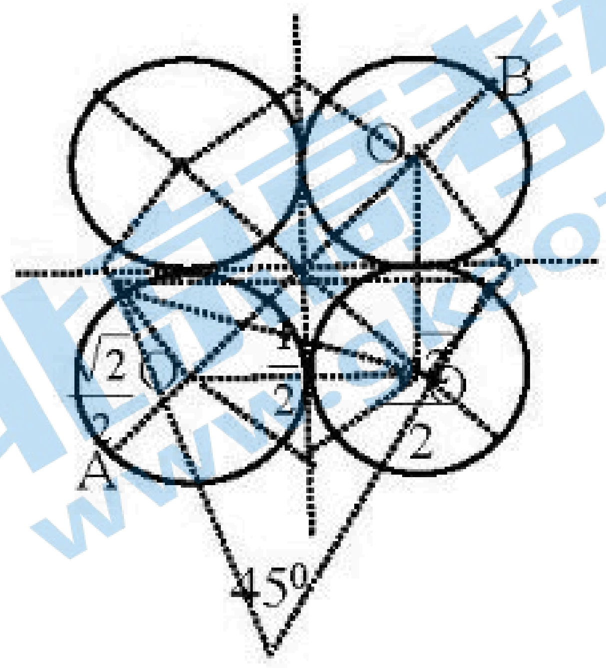
$\angle AOB=\beta$.因$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})=|\overrightarrow{OC}|^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

即$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\beta=|\overrightarrow{OA}|\cos\theta\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta+|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\alpha$,两端

除以$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$注意到$\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\sin\theta,\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\sin\theta$,即得$\cos\beta=\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos\alpha$,将

$\beta=45^0,\theta=30^0$代入得$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\alpha$,所以$\cos\alpha=2\sqrt{2}-3$.

10. 在直径为$\sqrt{2}+1$,高为 8 的圆柱形桶内装直径为 1 的球,最多可装______个;



解:由 $O_1O_2=O_2O_3=1$ 得$O_1O_3=\sqrt{2},AB=1+\sqrt{2}$,故每层刚好放 4 个小球,相邻两层小球的球心在底面的投影构成正八边形,其边长为:

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$,相邻两层小球的球心所在平面间距离

为$\sqrt{1-\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.设有 n 层小球,则$\frac{n-1}{\sqrt[4]{2}}+1\le 8\Leftrightarrow n\le 7\sqrt[4]{2}+1$

得$n\le 9$,故最多装 36 个小球.

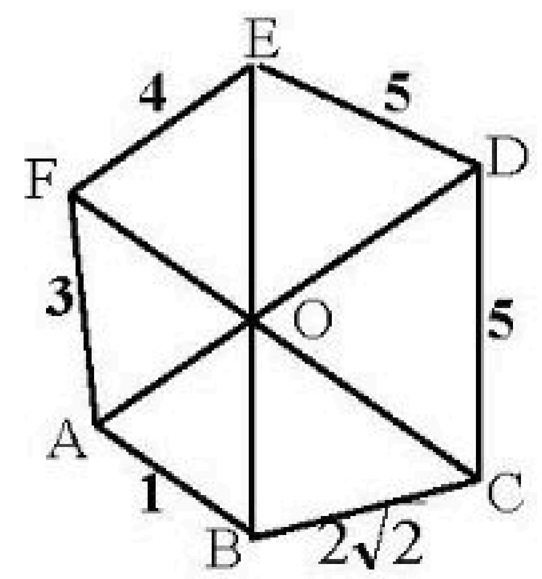
11. 数列$\{a_n\}$为:1,1,2,1,1,2,3,1,1,2,1,1,2,3,4,⋯.即先取$a_1=1$,接着复制该项粘贴在后面作为a_2,并添加后继数 2 作为a_3,再复制所有项 1,1,2 并粘贴在后面作为a_4,a_5,a_6,并添加后继数 3 作为a_7,⋯依次继续下去.则a_{2021}=______;

解:由 $a_1=1,a_3=2,a_7=3,a_{15}=4,\cdots$,知一般地,有$a_{2^n-1}=n$,为 n 首次出现在第 2^n-1 项,且若 $m=2^n-1+k(1\leqslant k\leqslant 2^n-1)$,则 $a_m=a_k$,由 $2021=2^{10}-1+998,998=2^9-1+487$,

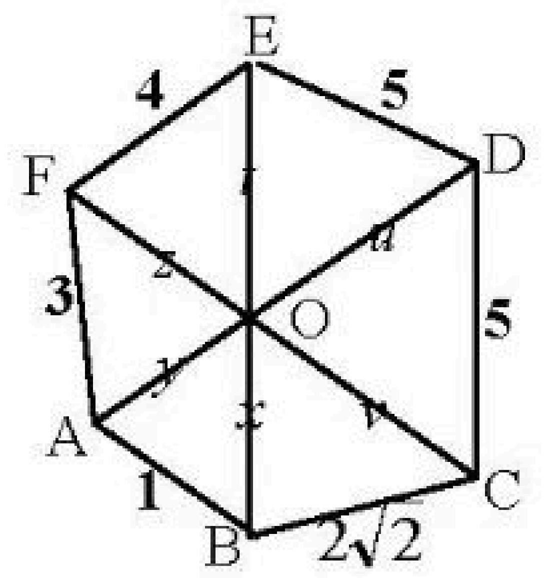
$487=2^8-1+232, 232=2^7-1+105, 105=2^6-1+42, 42=2^5-1+11, 11=2^3-1+4, 4=2^2-1+1$

知 $a_{2021}=a_{998}=a_{487}=a_{232}=a_{105}=a_{42}=a_{11}=a_4=a_1=1$,所以 $a_{2021}=1$.

12. 如图，已知凸六边形的对角线 AD,BE,CF 交于 O，且两两夹角都是 60^0，若 AB=1，BC=$2\sqrt{2}$，CD=DE=5，EF=4，FA=3.则该凸六边形面积 S 的最大值是________;



解:设 O 到各顶点距离 x,y,z,t,u,v,则由余弦定理得:



$x^2+y^2-xy=1$①, $y^2+z^2-yz=9$②, $z^2+t^2-zt=16$③,

$t^2+u^2-tu=25$④, $u^2+v^2-uv=25$⑤, $v^2+x^2-vx=8$⑥,

将①+③+⑤-②-④-⑥得 $yz+tu+vx=xy+zt+uv$, 凸六边形面积

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zt+tu+uv+vx)=\frac{\sqrt{3}}{2}(xy+zt+uv)\le\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+zt+uv+1+16+25)=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+zt+uv)+\frac{42\sqrt{3}}{4}$$, 得 $xy+zt+uv\le 42$, 所以

$S=\frac{\sqrt{3}}{2}(xy+zt+uv)\le 21\sqrt{3}$, 当 $x=y=1, z=t=4, u=v=5$ 等号成立, 故 $S_{\max}=21\sqrt{3}$.

二. 解答题(本题共 4 道小题,每题 20 分,共 80 分)

13. 求正实数 a 的取值范围，使得关于 x 的不等式 $\log_a x\leqslant x\leqslant a^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立；并指出当 a 为何值时,函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象有交点?

解: 显然 $a>1$. 令 $f(x)=a^x-x$, 则 $f'(x)=a^x\ln a-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{\ln\ln a}{\ln a}$, $f'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\le -\frac{\ln\ln a}{\ln a}$, 故

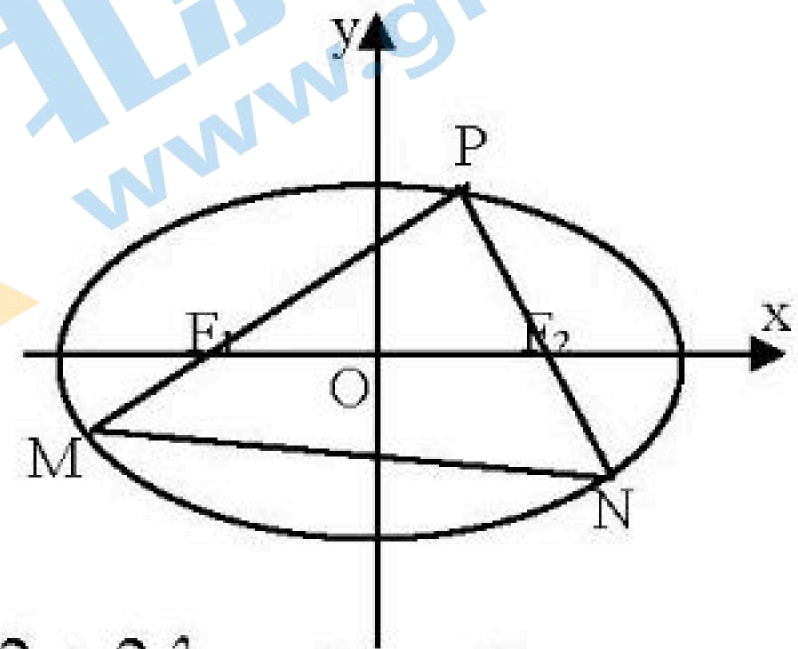
$x=-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$ 是 $f(x)$ 的唯一最小值点, $f(x)_{最小}=\frac{1+\ln\ln a}{\ln a}=\frac{\ln(e\ln a)}{\ln a}$, $f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)_{最小}$

$=\frac{\ln(e\ln a)}{\ln a}\ge 0 \Leftrightarrow \ln(\ln a)\ge -1 \Leftrightarrow a\ge e^{\frac{1}{e}}$, 所以 $\log_a x\leqslant x\leqslant a^x$.

在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a\ge e^{\frac{1}{e}}$. 所以, 当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时, 函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象交于一点,

当 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时, 函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图象交于两点.

14. 设 p 为椭圆 C: $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 上第一象限内的任一点,F₁,F₂ 为左右焦点，直线 PF₁,PF₂ 分别交 C 于 M,N.若 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1M}$,$\overrightarrow{PF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2N}$.求点 P 坐标使得直线 MN 的斜率等于 $-\frac{1}{9}$.



解:设 p(x₀,y₀), 由 $\overrightarrow{OF_1}-\overrightarrow{OP}=\lambda_1(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF_1})$ 得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1}\overrightarrow{OF_1}-\frac{1}{\lambda_1}\overrightarrow{OP}=(-\frac{2+2\lambda_1+x_0}{\lambda_1},-\frac{y_0}{\lambda_1}),\ \overrightarrow{ON}=(\frac{2+2\lambda_2-x_0}{\lambda_2},-\frac{y_0}{\lambda_2}),$$

代入 C 得 $\begin{cases}(2+2\lambda_1+x_0)^2+5y_0^2=5\lambda_1^2\\(2+2\lambda_2-x_0)^2+5y_0^2=5\lambda_2^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4(1+\lambda_1)^2+4x_0(1+\lambda_1)=5\lambda_1^2-5\\4(1+\lambda_2)^2-4x_0(1+\lambda_2)=5\lambda_2^2-5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}4(1+\lambda_1)+4x_0=5\lambda_1-5\\4(1+\lambda_2)-4x_0=5\lambda_2-5\end{cases}$,解得 $\lambda_1+\lambda_2=18,\lambda_1-\lambda_2=8x_0$,即 $\begin{cases}\lambda_1=4x_0+9\\\lambda_2=9-4x_0\end{cases}$,代入

$$K_{MN}=\frac{y_0(\lambda_2-\lambda_1)}{2(\lambda_2+\lambda_1)+4\lambda_2\lambda_1+x_0(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{x_0y_0}{9x_0^2-45}=-\frac{1}{9}$$ 得 $x_0y_0=5-x_0^2$, 联立

$x_0^2+5y_0^2=5$, 解得 $x_0=\frac{5}{\sqrt{6}},y_0=\frac{1}{\sqrt{6}}$, 所求点为 p$\left(\frac{5}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

15. 求最小常数 λ，使不等式 $xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\le\lambda(x+y+z)^4$ 对所有非负实数 x,y,z 都成立.

解:不妨设 $x+y+z>0$,原式 $\lambda\ge\frac{xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)}{(x+y+z)^4}=f(x,y,z)$,由

$xy(x^2+y^2)=xy((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)-z^2)=xy(x+y+z)^2-2xy(xy+yz+zx)-xyz^2$ 等得

$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=(xy+yz+zx)(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)^2-xyz(x+y+z)$,

$$f=\frac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2}-2\left(\frac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2}\right)^2-\frac{xyz}{(x+y+z)^3}$$,令 $t=\frac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2},r=\frac{xyz}{(x+y+z)^3}$,

故 $f=-2t^2+t-r$,当 $t=\frac{1}{4},r=0$ 时 $f_{\max}=\frac{1}{8}$.而 $r=0,t=\frac{1}{4}\Leftrightarrow xyz=0,(x+y+z)^2=$

$=4(xy+yz+zx)\Leftrightarrow x,y,z$ 中一个为 0(设 $z=0$)且$(x+y)^2=4xy$ 即 x,y,z 中一个为 0 另

两个相等,所以 $f_{\max}=\frac{1}{8},\lambda=\frac{1}{8}$.

另: $(x+y+z)^4=\left((x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right)^2\geq\left(2\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\right)^2$

$=8(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)=8\left(xy(x^2+y^2+z^2)+yz(x^2+y^2+z^2)+zx(x^2+y^2+z^2)\right)$

$\geq 8\left(xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\right)$, $f\leq\frac{1}{8}$, 且当 x,y,z 中一个为 0 另两个相等时等号成立，故 $f_{\max}=\frac{1}{8},\lambda=\frac{1}{8}$.

16. 如果任取 1,2,⋯,50 的一组数中,总有两个不同数的乘积是这两数和的整数倍.问最少要取多少个数?

解:令 S={1,2,⋯,50},先求 S 中所有数对(a,b)使 $a+b|ab$;再求不满足条件的最大子集 T；最后求元素个数最少的满足条件的子集.设 $a,b\in$S$(a>b)$且$(a+b)|ab$，令 $d=(a,b),a=da_1,b=db_1,a_1,b_1\in N^*$,且$(a_1,b_1)=1$，$a_1>b_1$.由 $a+b=d(a_1+b_1)$,$(b_1,a_1)=1$，$ab=d^2a_1b_1$ $a+b\mid ab\Leftrightarrow a_1+b_1\mid da_1b_1\Leftrightarrow a_1+b_1\mid d$

即 $a_1+b_1\leq d$ 得$(a_1+b_1)^2\leqslant d(a_1+b_1)=a+b\leqslant 99$,所以 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9,3\leqslant d\leqslant 33$.

(1)若 $a_1+b_1=3$, 则$(a_1,b_1)=(2,1)$, 由 $a_1+b_1=3|d$ 及 $a=2d\leqslant 50,d\leqslant 25$ 得 $d=3,6,9,12,15,18,21,24$, 得$(a,b)=(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24)$;

(2)若 $a_1+b_1=4$,则 $a_1=3,b_1=1$,由 $4|d$ 及 $a=3d\leqslant 50$ 得 $d=4,8,12,16$,$(a,b)=(12,4),(24,8),(36,12),(48,16)$;

(3)若 $a_1+b_1=5$,则$(a_1,b_1)=(4,1)$,$5|d$ 及 $a=4d\leqslant 50$ 得 $d=5,10$,或$(a_1,b_1)=(3,2)$,$3d\leqslant 50$,$d=5,10,15$,$(a,b)=(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30)$;

(4)若 $a_1+b_1=6$,则$(a_1,b_1)=(5,1)$,$6|d$ 及 $a=5d\leqslant 50$ 得 $d=6$,$(a,b)=(30,6)$,

(5)若 $a_1+b_1=7$,则$(a_1,b_1)=(6,1)$,$7|d$ 及 $a=6d\leqslant 50$ 得 $d=7$.或$(a_1,b_1)=(5,2)$,$5d\leqslant 50$ $d=7$,$(a_1,b_1)=(4,3)$,$d=7$,$(a,b)=(42,7),(35,14),(28,21)$;

(6)若 $a_1+b_1=8$,则$(a_1,b_1)=(5,3)$,$8|d$,$5d\leqslant 50$ 得 $d=8$,$(a,b)=(40,24)$;

(7)若 $a_1+b_1=9$,则$(a_1,b_1)=(5,4)$,$9|d$,$5d\leqslant 50$ 得 $d=9$,$(a,b)=(45,36)$.上述 23 个数对(a,b)满足 $a,b\in$S 且 $(a+b)|ab$.取最小的 M 使得上面 23 对数中每对数都至少有一个数在 M 中,得 M=={6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48},令 T=S−M,则 T 中任何两个数都不满足条件,由|T|=38 知所取数个数≥39.另一方面,下面 12 个满足要求的数对互不相交:(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36).对于 S 中任一 39 元子集 R,它比 S 少 11 个元素,而 11 个元素至多属于上述 12 个数对中的 11 个,故必有 12 对中的一对属于 R,综上,最少要取 39 个数.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。