

# 甘肃省一月份高考诊断考试·数学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟.

## 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号框.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式:锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}sh$ (其中  $s$  为锥体的底面积, $h$  为锥体的高).

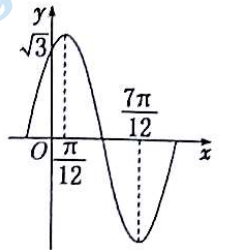
一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合  $A = \{x | y = \sqrt{4x-1}\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $[\frac{1}{4}, 3)$       B.  $[\frac{1}{4}, 1)$       C.  $(3, +\infty)$       D.  $(-1, +\infty)$
2. 若复数  $z$  满足  $(3-i)z = 1-2i$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则复数  $z$  在复平面内对应的点位于 ( )  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2, a_8$  是方程  $x^2 + mx - 8 = 0$  的两根, 若  $a_4 + a_6 = a_5^2 + 1$ , 则  $m$  的值为 ( )  
A. -6      B. -2      C. 2      D. 6
4. 众数、平均数、中位数都描述了数据的集中趋势, 它们的大小关系和数据分布的形态有关. 在如图所示的分布形态中, 平均数、众数和中位数的大小关系是(由小到大排列) ( )  
A. 众数 < 中位数 < 平均数      B. 平均数 < 众数 < 中位数  
C. 中位数 < 平均数 < 众数      D. 众数 < 平均数 < 中位数
5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$  若函数  $g(x) = f(x) - m$  有 3 个零点, 则  $m$  的取值范围为 ( )  
A.  $[0, \frac{1}{e})$       B.  $(-1, \frac{1}{e})$       C.  $(\frac{1}{e}, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1)$
6. 已知平行四边形  $ABCD$ , 若点  $P$  是边  $AD$  的中点,  $\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{QB}$ , 直线  $AC$  与  $PQ$  相交于点  $M$ , 则  $\frac{AM}{AC} =$  ( )  
A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{5}$       C.  $\frac{3}{10}$       D.  $\frac{3}{5}$
7. 已知  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) - \sin \alpha = \frac{4}{5}$ , 则  $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) =$  ( )  
A.  $\frac{7}{25}$       B.  $-\frac{7}{25}$       C.  $\frac{24}{25}$       D.  $-\frac{24}{25}$
8. 设函数  $f(x)$  满足  $xf'(x) - f(x) = x \ln x$ ,  $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ , 若  $x > 0$ , 则  $f(x)$  ( )  
A. 有极大值, 无极小值      B. 有极小值, 无极大值  
C. 既有极大值又有极小值      D. 既无极大值也无极小值

二、多项选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9. 已知函数  $f(x) = A\sin(2\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 在一个周期内的图象如图所示, 图象与  $y$  轴的交点为  $(0, \sqrt{3})$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
- B.  $f(x)$  的最大值为 2
- C. 直线  $x = \frac{5\pi}{6}$  是  $f(x)$  图象的一个对称轴
- D.  $f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{3}, 0]$  上单调递增



10. 已知  $a > 0, b > 0$ , 若  $a + 2b = 1$ , 则

- A.  $ab$  的最大值为  $\frac{1}{8}$
- B.  $a^2 + b^2$  的最小值为 1
- C.  $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为 8
- D.  $2^a + 4^b$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

11. 已知直线  $l$  过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点  $F$ , 且与抛物线  $C$  交于  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  两点, 点  $M$  为  $C$  的准线与  $x$  轴的交点, 则下列结论正确的是 ( )

- A. 若  $x_1 + x_2 = 5$ , 则  $|AB| = 7$
- B. 过  $C$  的焦点的最短弦长为 4
- C. 当  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$  时, 直线  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$
- D. 存在 2 条直线  $l$ , 使得  $|AF| \cdot |BM| = |BF| \cdot |AM|$  成立

12. 已知直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  内接于球  $O, AA_1 = 8, AB \perp AC, AB = AC = 4$ , 点  $D, E$  为  $AB, AC$  的中点, 点  $Q$  为侧面  $BCC_1B_1$  上一动点, 且  $A_1Q = 4$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A. 点  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离为  $\frac{8}{3}$
- B. 存在点  $Q$ , 使得  $CQ \perp$  平面  $A_1DE$
- C. 过点  $D$  作球的截面, 截面的面积最小为  $4\pi$
- D. 点  $Q$  的轨迹长为  $2\sqrt{2}\pi$

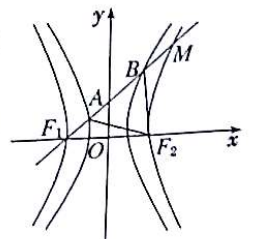
三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 已知  $f(x) = \frac{a^x}{a^x - 1} + m$  ( $a > 1$ ) 是奇函数, 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

14. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等. “圆柱容球”是阿基米德最为得意的发现. 在一个“圆柱容球”模型中, 若球的体积为  $4\sqrt{3}\pi$ , 则该模型中圆柱的表面积为 \_\_\_\_\_.

15. 如图, 点  $F_1, F_2$  是双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点, 同时也是双

曲线  $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$  的左、右顶点, 过点  $F_1$  的直线交双曲线  $C_1$  的左、右两支分别于  $A, B$  两点, 交双曲线  $C_2$  的右支于点  $M$  (与点  $F_2$  不重合), 且  $\triangle BF_1F_2$  与  $\triangle ABF_2$  的周长之差为 6, 则双曲线  $C_1$  的方程为 \_\_\_\_\_.



16. 某学校有  $A, B$  两个餐厅, 已知同学甲每天中午都会在这两个餐厅中选择一个就餐, 如果甲当天选择了某个餐厅, 他第二天会有 60% 的可能性换另一个餐厅就餐, 假如第 1 天甲选择了  $A$  餐厅, 则第  $n$  天选择  $A$  餐厅的概率  $P_n$  为 \_\_\_\_\_.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $c \cos B + b \cos C = -2a \cos B$ .

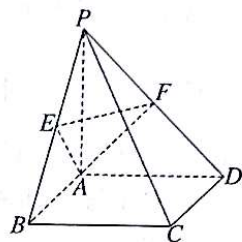
(1)求角  $B$  的大小;

(2)若  $A$  的角平分线交边  $BC$  于点  $D$ , 且  $AD = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$ , 求边  $b$ .

18. (12 分)如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,底面  $ABCD$  为正方形,侧棱  $PA \perp$  底面  $ABCD$ , 且  $PA = AB$ , 点  $E, F$  分别为  $PB, PD$  的中点.

(1)若平面  $PBC \cap$  平面  $PAD = l$ , 证明:  $l \perp$  平面  $PAB$ ;

(2)求平面  $AEF$  与平面  $PAB$  夹角的余弦值.



19. (12 分)第 18 届亚洲杯将于 2024 年 1 月 12 日在卡塔尔举行, 该比赛预计会吸引亿万球迷观看. 为了了解某校大学生喜爱观看足球比赛是否与性别有关, 该大学记者站随机抽取了 100 名学生进行统计, 其中女生喜爱观看足球比赛的占女生人数的  $\frac{1}{4}$ , 男生有 10 人表示不喜欢看足球比赛.

(1)完成下面  $2 \times 2$  列联表, 试根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 判断能否认为喜爱观看足球比赛与性别有关联?

	男	女	合计
喜爱看足球比赛			
不喜爱看足球比赛			
合计	60		

(2)在不喜爱观看足球比赛的观众中, 按性别用分层随机抽样的方式抽取 8 人, 再从这 8 人中随机抽取 2 人参加校记者站的访谈节目, 设抽到的男生人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和期望.

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d$ .

$\alpha$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$x_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 2$ ,  $\{a_n \cdot b_n\}$  是首项为 1, 公差为 2 的等差数列.
- (1) 求  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 若数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 且不等式  $\lambda \geq n(3 - T_n)$  对一切  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

21. (12分) 已知函数  $f(x) = (x+a)\ln(x+1)$ .

- (1) 当  $a=2$  时, 求曲线  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 若函数  $f(x) - x$  在  $(0, +\infty)$  单调递增, 求  $a$  的取值范围.

22. (12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 短轴长为 2.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过点  $(4, 2)$  且斜率不为  $\frac{1}{2}$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 点  $P$  是直线  $y = \frac{1}{2}x$  上一定点, 设直线  $PM, PN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $k_1 k_2$  为定值, 求点  $P$  的坐标.