

第 1 卷选择题 (共 40 分)

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分; 在每个小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

1. 若集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | x > 1\}$ C. $\{x | x \geq -1\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$

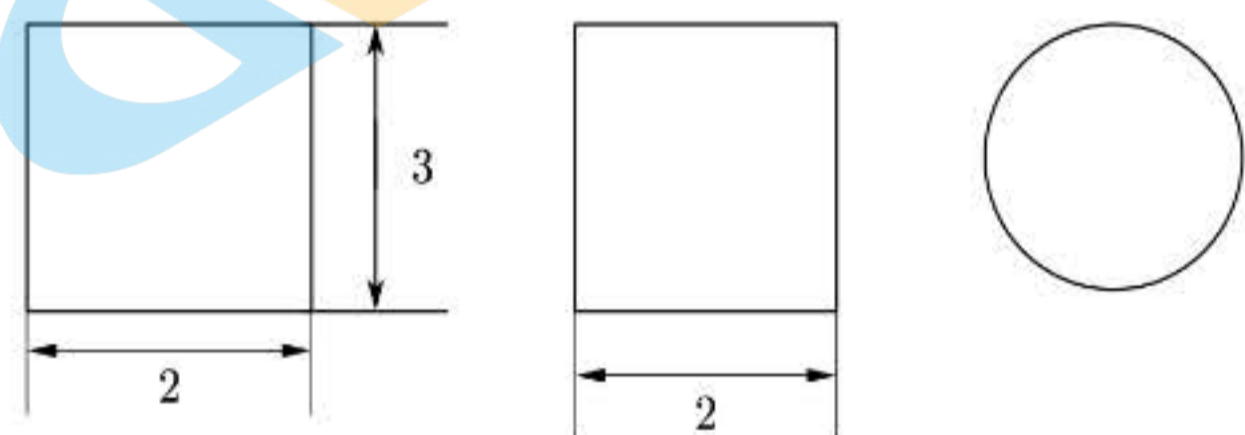
2. 设复数 z 满足 $(1-i)z = 1+i$, 则 z 等于 ()

- A. $-i$ B. i C. $-2i$ D. $2i$

3. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数是 ()

- A. 28 B. 56 C. 112 D. 256

4. 一个几何体的三视图如图所示, 该几何体的表面积是 ()



主(正)视图 左(侧)视图 俯视图

- A. 3π B. 8π C. 12π D. 14π

5. 设 P 是圆 $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ 上的动点, Q 是直线 $x = -4$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 ()

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

6. 函数 $f(x) = \ln(x+1)$ 的图象与函数 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ 的图象的交点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, \varphi \in \mathbf{R}$). 则“ $f(x)$ 是偶函数”是“ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点, 双曲线 C_1 和圆

$C_2: x^2 + y^2 = c^2$ 的一个交点为 P , 且 $\angle PF_2F_1 = \frac{\pi}{3}$, 那么双曲线 C_1 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{3} + 1$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{2}{5}$, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^+$, 都有 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 2}{a_{n+1} + 2}$, 那么 a_4 为 ()

- A. $\frac{1}{7}$ B. 7 C. $\frac{1}{10}$ D. 10

10. 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5cm, 秒针绕点 O 匀速旋转, 当时间: $t=0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合, 当 $t \in [0, 60]$, A, B 两点间的距离为 d (单位: cm), 则 d 等于_____

- A. $5 \sin \frac{t}{2}$ B. $10 \sin \frac{t}{2}$ C. $5 \sin \frac{\pi t}{30}$ D. $10 \sin \frac{\pi t}{60}$

第 II 卷非选择题 (共 110 分)

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分; 请把答案填在答题卡中相应题中横线上)

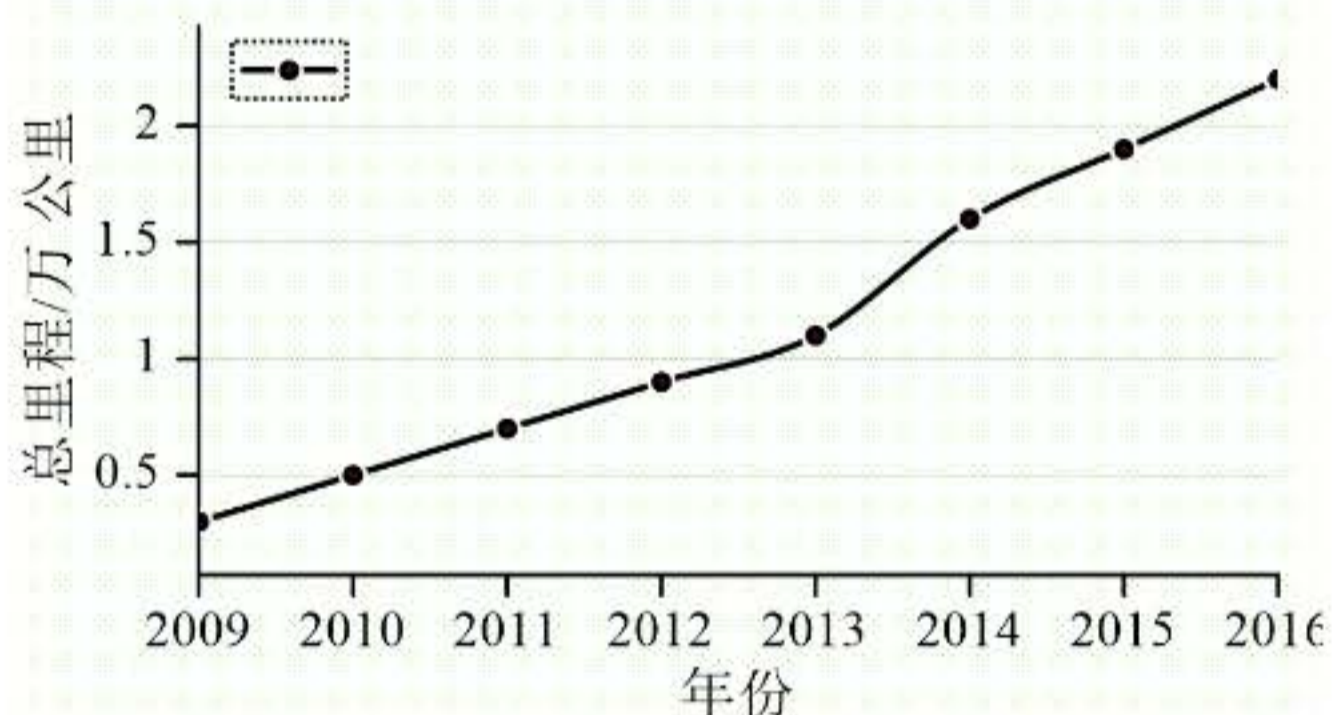
11. 函数 $f(x) = \sqrt{3-x} + \ln(x-1)$ 的定义域是_____.

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上一点 M 到焦点的距离为 3, 那么点 M 到 y 轴的距离为_____.

13. 已知在直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 1$, $BC = 2$, 那么 $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ 等于_____; 若 AM 是 BC 边上的高, 点 P 在 ΔABC 内部或边界上运动, 那么 $\overline{AM} \cdot \overline{BP}$ 的最大值是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 那么常数 ω 的一个取值_____.

15. 从 2008 年京津城际铁路通车运营开始, 高铁在过去几年里快速发展, 并在国民经济和日常生活中扮演着日益重要的角色. 下图是 2009 年至 2016 年高铁运营总里程数的折线图 (图中的数据均是每年 12 月 31 日的统计结果).

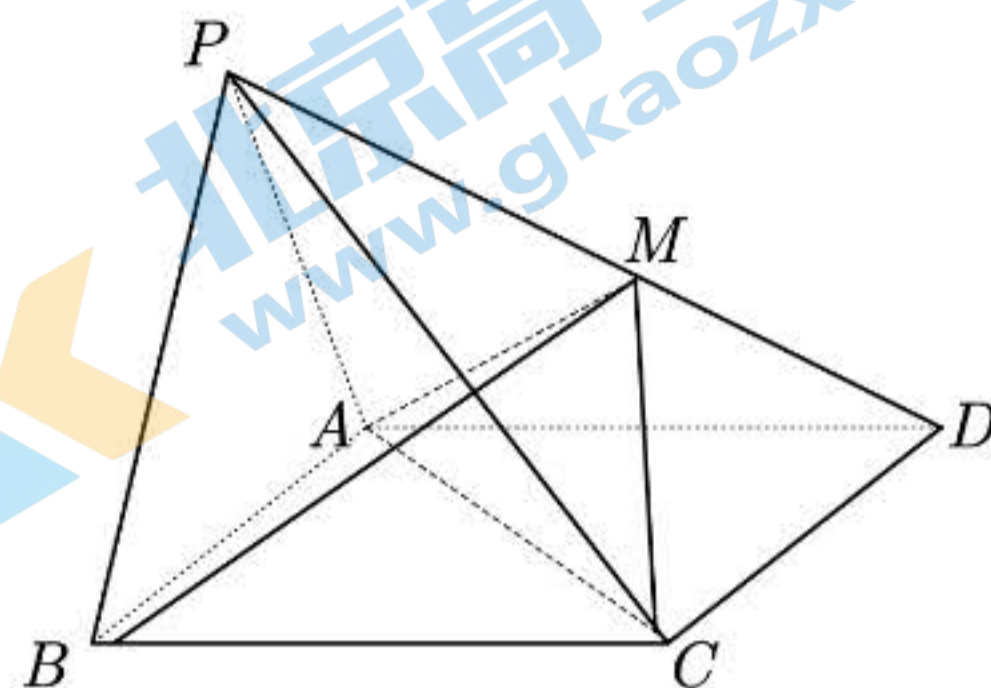


根据上述信息, 下列结论中正确的是

- ① 2015 年这一年, 高铁运营里程数超过 0.5 万公里;
- ② 2013 年到 2016 高铁运营里程平均增长率大于 2010 到 2013 高铁运营里程平均增长率;
- ③ 从 2010 年至 2016 年, 新增高铁运营里程数最多的一年是 2014 年;
- ④ 从 2010 年至 2016 年, 新增高铁运营里程数逐年递增; 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

16.（本小题满分 13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $\triangle PAB$ 为正三角形，且侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PM = MD$ 。



- (I) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACM ；
- (II) 求二面角 $M-BC-D$ 的余弦值

17.（本小题满分 13 分）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sqrt{3}c - 2b\sin C = 0$ 。

- (I) 求角 B 的大小；
- (II) 再从下面条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 $\triangle ABC$ 的面积条件。

① $b = 3\sqrt{3}, a = 2$ ；

条件②： $a = 2, A = \frac{\pi}{4}$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

18. (本小题满分 14 分) 随着人民生活水平的提高, 人们对牛奶品质要求越来越高, 某牛奶企业针对生产的鲜奶和酸奶, 在一地区进行了质量满意调查, 现从消费者人群中随机抽取 500 人次作为样本, 得到下表(单位: 人次):

满意度	老年人		中年人		青年人	
	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶
满意	100	120	120	100	150	120
不满意	50	30	30	50	50	80

- (I) 从样本中任取 1 个人, 求这个人恰好对生产的酸奶质量满意的概率;
 (II) 从该地区的老年人中抽取 2 人, 青年人中随机选取 1 人, 估计这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率;
 (III) 依据表中三个年龄段的数据, 你认为哪一个消费群体鲜奶的满意度提升 0.1, 使得整体对鲜奶的满意度提升最大? (直接写结果).

19. (本小题满分 15 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 并且经过 $P(0, \sqrt{3})$ 点.

- (I) 求椭圆 C 的方程;
 (II) 设过点 P 的直线与 x 轴交于 N 点, 与椭圆的另一个交点为 B , 点 B 关于 x 轴的对称点为 B' , 直线 PB' 交 x 轴于点 M , 求证: $|OM| \cdot |ON|$ 为定值.

20. (本小题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{e^x}$

(I) 当 $a=0$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a=1$ 时, 过点 $P(-1,0)$ 可作几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切? 请说明理由.

21. (本小题满分 15 分) 已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n (0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3)$, 具有性质 P: 对任意 i, j

$(1 \leq i \leq j \leq n)$ $a_j + a_i$ 与 $a_j - a_i$, 两数中至少有一个是该数列中的一项, S_n 为数列 A 的前 n 项和.

(I) 分别判断数列 $0, 1, 3, 5$ 与数列 $0, 2, 4, 6$ 是否具有性质 P:

(II) 证明: $a_1 = 0$, 且 $S_n = \frac{na_n}{2}$;

(III) 证明: 当 $n=4$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 成等差数列.

2021 北京平谷高三一模数学

参考答案

一.选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	B	A	C	B	D	A	D

二.填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 25 分. 注：第 15 题第一空 3 分,第二空 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其它得 3 分。

11. $\{x|1 < x \leq 3\}$; 12.2; 13.-1; 0. 14. $(0, \frac{3}{4}]$ 中的一个值;

15. ②; ③.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）.

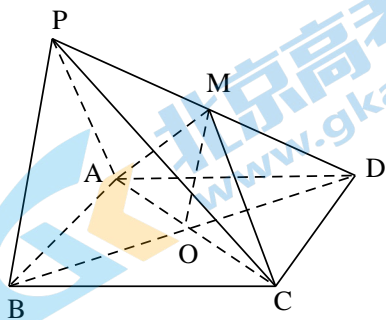
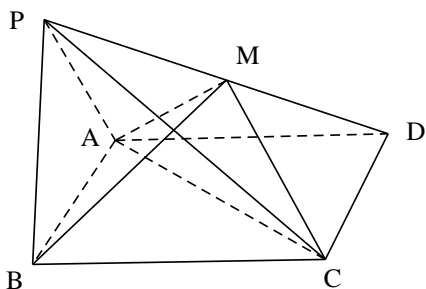
16.(本小题满分 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $\triangle PAB$ 为正三角形，且侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PM = MD$.

(I) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACM ;

(II) 求二面角 $M-BC-D$ 的大小

(I) 证明：连接 BD ，与 AC 交于 O ，在 $\triangle PBD$ 中，



因为 O ， M 分别为 BD ， PD 的中点，

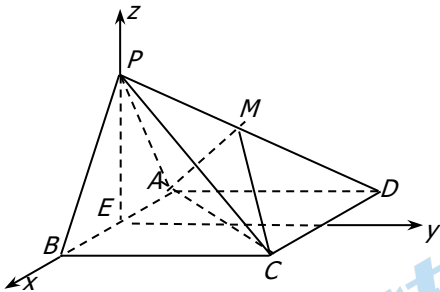
关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯\(ID:bj-gaokao\)](#)，获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $BP \parallel OM$ 4分

因为 $BP \not\subset$ 平面 ADE , $OM \not\subset$ 平面 CAM ,

所以 $BP \parallel$ 平面 CAM 6分

(III) 因为 $ABCD$ 是正方形, $\triangle PAB$ 为正三角形, E 是 AB 的中点,



所以 $PE \perp AB$. 又因为面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ 8分

过 E 作 EF 平行于 CB 与 CD 交于 F .

以 E 为原点, 分别以 EB, EF, EP 为 x, y, z 轴,

建立空间直角坐标系 $E-xyz$, 9分

则 $E(0,0,0)$, $B(1,0,0)$,

$P(0,0,\sqrt{3})$, $C(1,2,0)$, $D(-1,2,0)$. $M\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 10分

所以 $\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$,

设平面 CBM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2y = 0 \end{cases}, y=0, \text{ 令 } x=1. \text{ 则 } z=\sqrt{3}$$

得 $\mathbf{n} = (1, 0, \sqrt{3})$ 11分

因为 $PE \perp$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $ABCD$ 的法向量 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$,

所以 $\cos\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12分

所以二面角 $M-BC-D$ 的大小为 30° 13分

17. (本小题满分 13 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}c - 2b \sin C = 0$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 再从下面条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求: $\triangle ABC$ 的面积.

① $b = 3\sqrt{3}, a = 2$.

② $a = 2, A = \frac{\pi}{4}$,

解 (I) 因为 $\sqrt{3}c - 2b \sin C = 0$, 由正弦定理 $\sqrt{3} \sin C - 2 \sin B \sin C = 0$ 5 分

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 7 分

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 8 分

(II) 解法一: 因为 $b = 3\sqrt{3}, a = 2$.

根据余弦定理得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cdot \cos B$, 9 分

化简为 $c^2 - 2c - 23 = 0$, 解得 $c = 1 + 2\sqrt{6}$ 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} c \cdot a \sin B = \frac{\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{2}$ 13 分

解法二: 因为 $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}$,

根据正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, 7 分

所以 $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} = \sqrt{6}$ 8 分

因为 $C = \pi - A - B = \frac{5\pi}{12}$, 9 分

所以 $\sin C = \sin \frac{5\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} b \cdot a \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ 13 分

18. (本小题满分 14 分)

随着人民生活水平的提高，人们对牛奶需求越来越大，品质要求越来越高，某牛奶企业针对生产的鲜奶和和酸奶，在一地区进行了质量满意度调查，现从中随机抽取 500 人次作为样本，得到下表（单位：人次）：

满意度	老年人		中年人		青年人	
	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶	酸奶	鲜奶
满意	100	120	120	100	150	120
不满意	50	30	30	50	50	80

(I)从样本中任取 1 个人，求这个人恰好对生产的酸奶满意的概率；

(II)从该地区的老年人中抽取 2 人，青年人中随机选取 1 人，估计这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率；

(III) 依据表中三个年龄段的数据，哪部分人对鲜奶的满意度提升 0.1，使得整体对鲜奶的满意度提升最大？（直接写结果）

解：(I)设这个人恰好对生产的酸奶满意人数事件为 A,总人次为 500 人，

共抽取了 $100+120+150=370$ 人次对酸奶满意，

所以 $P(A) = \frac{370}{500} = \frac{37}{50}$ 5 分

(II)由频率估计总体，由已知抽取老年人满意度的概率为 $P(B) = \frac{4}{5}$,抽取青年人满意度的概率为 $P(C) = \frac{3}{5}$,

抽取这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率 $P(D)$,

$$P(D) = C_2^1 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times (1 - \frac{4}{5}) + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{56}{125},$$

所以这三人中恰有 2 人对生产的鲜奶质量满意的概率为 $\frac{56}{125}$ 11 分

(III)青年人14 分

19. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，并且经过 $P(0, \sqrt{3})$ 点

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设过点 P 的直线与 x 轴交于 N 点，与椭圆的另一个交点为 B，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，直线 PB' 交 x 轴于 M，求证： $|OM| \cdot |ON|$ 为定值。

解：(I) 由已知 $\begin{cases} \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ 所以椭圆 C： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(II) 证明：由已知斜率存在

以下给出证明：

由题意，设直线 PB 的方程为 $y = kx + \sqrt{3} (k \neq 0)$, $P(0, \sqrt{3})$, $B(x_1, y_1)$, 则 $B'(x_1, -y_1)$7分

$$\text{由} \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12, \\ y = kx + \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\text{得} (3 + 4k^2)x^2 + 8k\sqrt{3}x = 0, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{所以} \Delta = (8k\sqrt{3})^2 > 0,$$

$$x_1 + 0 = -\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2}, \quad \therefore x_1 = -\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2} \quad y_1 = -\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2} + \sqrt{3}$$

$$\text{所以} B\left(-\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2}, -\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2} + \sqrt{3}\right) \text{ 即 } B\left(-\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2}, \frac{-4\sqrt{3}k^2 + 3\sqrt{3}}{3 + 4k^2}\right)$$

$$B'\left(-\frac{8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2}, \frac{4\sqrt{3}k^2 - 3\sqrt{3}}{3 + 4k^2}\right) \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{直线 } PB' \text{ 的方程为 } y - \frac{4\sqrt{3}k^2 - 3\sqrt{3}}{3 + 4k^2} = \frac{3}{4k} \left(x - \frac{-8k\sqrt{3}}{3 + 4k^2}\right)$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得 } x = \frac{(-4\sqrt{3}k^2 - 3\sqrt{3})4k}{3(3 + 4k^2)} \text{ 所以 } M\left(\frac{(-4\sqrt{3}k^2 - 3\sqrt{3})4k}{3(3 + 4k^2)}, 0\right)$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 由 } y = kx + \sqrt{3} \text{ 得 } x = -\frac{\sqrt{3}}{k} \text{ 所以 } N\left(-\frac{\sqrt{3}}{k}, 0\right) \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$\text{所以 } |OM| \cdot |ON| = \left| \frac{(-4\sqrt{3}k^2 - 3\sqrt{3})4k}{3(3 + 4k^2)} \right| \cdot \left| -\frac{\sqrt{3}}{k} \right| = 4 \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

$$\text{法二：设 } B(x_0, y_0), B'(x_0, -y_0) \text{ 则 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{则直线 } PB \text{ 的方程为 } y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} - y_0}{-x_0} (x - 0) \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得 } x = \frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0} \text{ 所以 } N\left(\frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0}, 0\right) \text{ 同理 } M\left(\frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} + y_0}, 0\right) \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{所以 } |OM| \cdot |ON| = \left| \frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} + y_0} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3} - y_0} \right| = \left| \frac{3x_0^2}{3 - y_0^2} \right| \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ 所以 $3x_0^2 + 4y_0^2 = 12$

所以 $|OM| \cdot |ON| = \left| \frac{3x_0^2}{3-y_0^2} \right| = \left| \frac{12-4y_0^2}{3-y_0^2} \right| = 4 \dots\dots\dots 15$ 分

20(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{e^x}$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $a=1$ 时, 过点 $P(-1,0)$ 可作几条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切? 请说明理由.

(I) 因为当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$,

由 $f'(x) = \frac{-x}{e^x}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x=0$, 3 分

则 $f'(x)$ 及 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$; 递增区间为 $(-\infty, 0)$7 分

(II) 因为当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{e^x}$, 所以 $f'(x) = \frac{x-x^2}{e^x}$ 9 分

设切点为 $A(x_0, y_0)$, 则切线方程为: $y - y_0 = \frac{x_0 - x_0^2}{e^{x_0}}(x - x_0)$, 又因为切线过 $P(-1, 0)$, 所以

$-y_0 = \frac{x_0 - x_0^2}{e^{x_0}}(-1 - x_0)$ 所以 $-\frac{x_0^2 + x_0 + 1}{e^{x_0}} = \frac{x_0 - x_0^2}{e^{x_0}}(-1 - x_0)$, 化简得 $x_0^3 + x_0^2 + 1 = 0$,11 分

令 $g(x) = x^3 + x^2 + 1$, 所以 $g'(x) = 3x^2 + 2x$,

则 $g'(x)$ 及 $g(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+

$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值 1	↗
		$\frac{31}{27}$			

所以函数 $g(x)$ 的递减区间为 $(-\frac{2}{3}, 0)$; 递增区间为 $(-\infty, -\frac{2}{3}), (0, +\infty)$. $g(-2) = -3 < 0$

$g(-\frac{2}{3}) = \frac{31}{27} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 有唯一一个零点, 13 分

所以方程 $x_0^3 + x_0^2 + 1 = 0$ 有唯一一个解. 所以过 $P(-1, 0)$ 只能作一条曲线 $f(x)$ 的切线. 15 分

21(本小题满分 15 分)

已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3$) 具有性质 P : 对任意 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$), $a_j + a_i$ 与 $a_j - a_i$ 两数中至少有一个是该数列中的一项, S_n 为数列 A 的前 n 项和.

(I) 分别判断数列 $0, 1, 3, 5$ 与数列 $0, 2, 4, 6$ 是否具有性质 P ;

(II) 证明: $a_1 = 0$, 且 $S_n = \frac{na_n}{2}$;

(III) 证明: 当 $n = 4$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等差数列.

(I) 因为 $1+3=4 \notin A$, $3-1=2 \notin A$, 所以数列 $0, 1, 3, 5$ 不具有性质 P ; 因为 $0+2, 2-0$;

$0+4, 4-0$; $0+6, 6-0$; $2+4, 4-2$; $2+6, 6-2$; $6+4, 6-4$, 六组数中, 至少有一个属于 P , 所以数列 $0, 2, 4, 6$ 具有性质 P 5 分

(II) \because 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 3$) 具有性质 P , $\therefore a_n - a_n$ 与 $a_n + a_n$ 中至少有一个属于 A , $\because a_n > 0$, $a_n + a_n > a_n$, 故 $a_n + a_n \notin A$, $\therefore a_n - a_n \in A$, $\therefore a_1 = 0$.

由 A 具有性质 P 可知 $a_n - a_k \in A$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$).

$$\therefore a_n - a_1 > a_n - a_2 > a_n - a_3 > \dots > a_n - a_{n-1} > a_n - a_n,$$

$$\therefore a_n - a_1 = a_n$$

$$a_n - a_2 = a_{n-1}$$

$$a_n - a_3 = a_{n-2}$$

.....

$a_n - a_n = a_1$; 从而 $na_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$, $\therefore na_n - S_n = S_n$, $\therefore S_n = \frac{na_n}{2}$ 10 分

(III) 证明: 由 (II) 知, $\therefore a_5 - a_4 = a_2, a_5 - a_3 = a_3, \therefore a_5 = a_4 + a_2 = 2a_3$

$a_3 - a_2 = a_2, \therefore a_3 = 2a_2, a_4 = 3a_2, a_5 = 4a_2, \therefore$ 数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是以 0 为首项, 公差为 a_2 的等差数列。.....15 分



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯