丰台区 2017 ~ 2018 学年度第一学期期末练习

高三数学（理科）

2018. 01

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1\}$， $B=\{x\,|\,x^2<1\}$，则 $A\cup B=$

（A） $\{-1,1\}$　　　　（B） $\{-1,0,1\}$

（C） $\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$　　　　（D） $\{x\,|\,x\le 1\}$

（2）“ $x>1$ ” 是 “ $2^x>1$ ” 的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（3）在极坐标系 Ox 中，方程 $\rho=\sin\theta$ 表示的曲线是

（A）直线　　　　（B）圆

（C）椭圆　　　　（D）双曲线

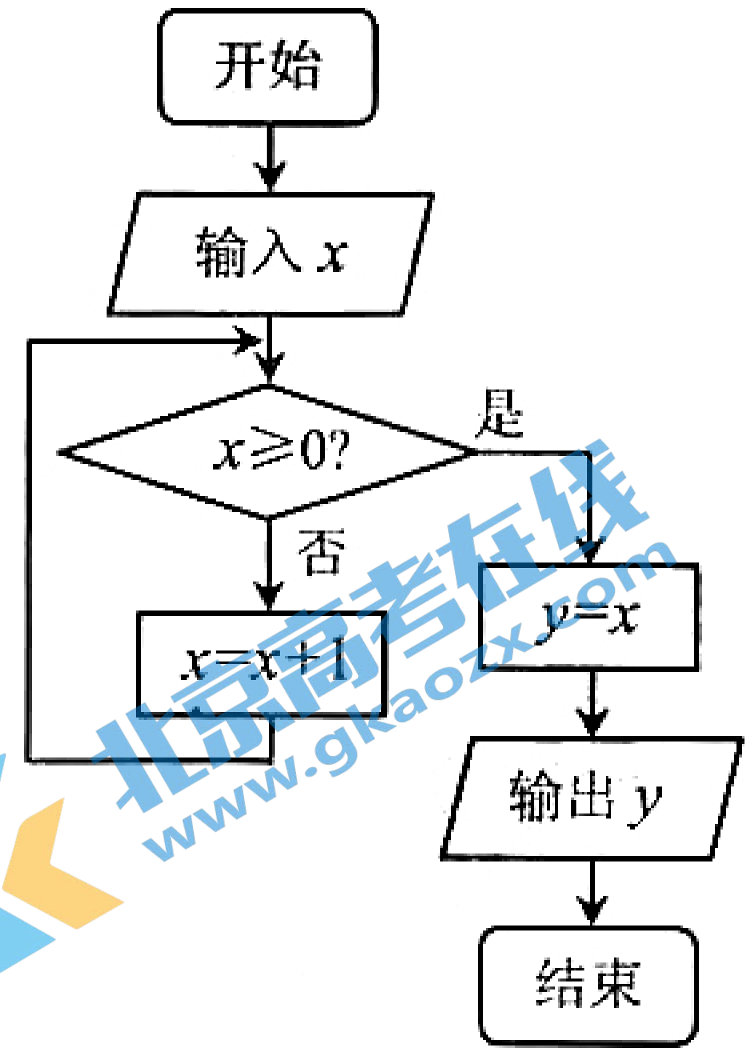
北京高考在线 www.gkaozx.com

(4) 若 x， y 满足 $\begin{cases} x+y\le 1, \\ x-y\le 1, \\ x\ge 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值是

(A) -2　　　　(B) -1

(C) 1　　　　(D) 2

(5) 执行如图所示的程序框图，如果输入的 x 的值在区间 $[-2,-1.5)$ 内，那么输出的 y 属于



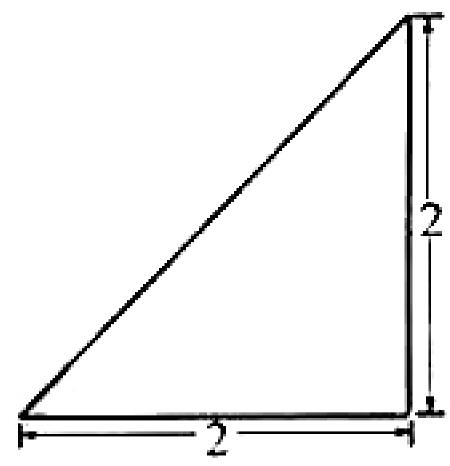
(A) $[0,0.5)$　　　　(B) $(0,0.5]$

(C) $(0.5,1]$　　　　(D) $[0.5,1)$

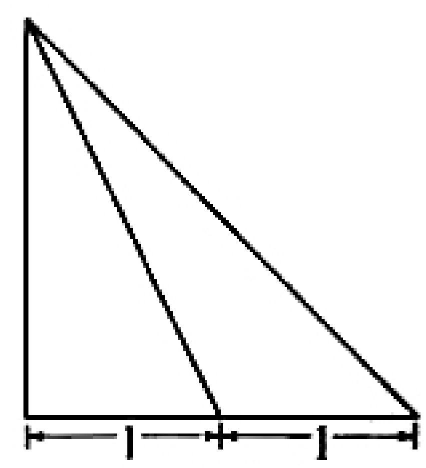
(6) 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长的棱的棱长为

(A) 2　　　　(B) $\sqrt{5}$

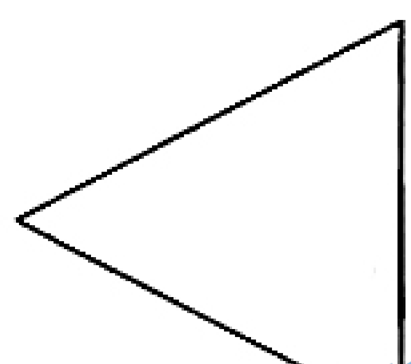
(C) $2\sqrt{2}$　　　　(D) 3



正视图



侧视图



俯视图

(7) 过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0，\ b>0)$ 的一个焦点 F 作一条与其渐近线垂直的直线，垂足为 A， O 为坐标原点，若 $|OA|=\dfrac{1}{2}|OF|$，则此双曲线的离心率为

(A) $\sqrt{2}$　　　　(B) $\sqrt{3}$　　　　(C) 2　　　　(D) $\sqrt{5}$

(8) 全集 $U=\{(x,\ y)\,|\,x\in\mathbf{Z},\ y\in\mathbf{Z}\}$，非空集合 $S\subseteq U$，且 S 中的点在平面直角坐标系 xOy 内形成的图形关于 x 轴、y 轴和直线 $y=x$ 均对称．下列命题：

①若 $(1,3)\in S$，则 $(-1,-3)\in S$；

②若 $(0,4)\in S$，则 S 中至少有 8 个元素；

③若 $(0,0)\notin S$，则 S 中元素的个数一定为偶数；

④若 $\{(x,y)\,|\,x+y=4,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}\subseteq S$，则 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=4,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}\subseteq S$．

其中正确命题的个数是

(A) 1　　　　(B) 2　　　　(C) 3　　　　(D) 4

北京高考在线 www.gkaozx.com

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知单位向量 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$____.

（10）若复数 $z=(1+\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})$ 在复平面内所对应的点在虚轴上，则实数 $a=$____.

（11）在 $(2-x)^5$ 的展开式中，x^3 项的系数是____（用数字作答）.

（12）等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，且 a_2，a_4，a_8 成等比数列，那么 $a_1=$____，数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和 $S_9=$____.

（13）能够说明“方程 $(m-1)x^2+(3-m)y^2=(m-1)(3-m)$ 的曲线是椭圆”为假命题的一个 m 的值是____.

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & 0<x<\pi, \\ \sqrt{x}, & x\ge\pi, \end{cases}$ $g(x)=f(x)-kx\ (k\in\mathbf{R})$.

① 当 $k=1$ 时，函数 $g(x)$ 有____个零点；

② 若函数 $g(x)$ 有三个零点，则 k 的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

在△ABC 中，$\sqrt{3}\sin 2B=2\sin^2 B$.

（Ⅰ）求角 B；

（Ⅱ）若 $a=4$，$S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$，求 b 的值.

北京高考在线 www.gkaozx.com

（16）（本小题共 13 分）

某校为了鼓励学生热心公益，服务社会，成立了“慈善义工社”．2017 年 12 月，该校“慈善义工社”为学生提供了 4 次参加公益活动的机会，学生可通过网络平台报名参加活动．为了解学生实际参加这 4 次活动的情况，该校随机抽取 100 名学生进行调查，数据统计如下表，其中“√”表示参加，“×”表示未参加．

学生人数 \ 公益活动	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次
30	×	×	√	√
20	×	√	×	√
15	√	√	√	√
12	√	√	√	×
10	×	√	×	×
a	√	×	×	×
b	×	×	×	×

根据表中数据估计，该校 4000 名学生中约有 120 名这 4 次活动均未参加．

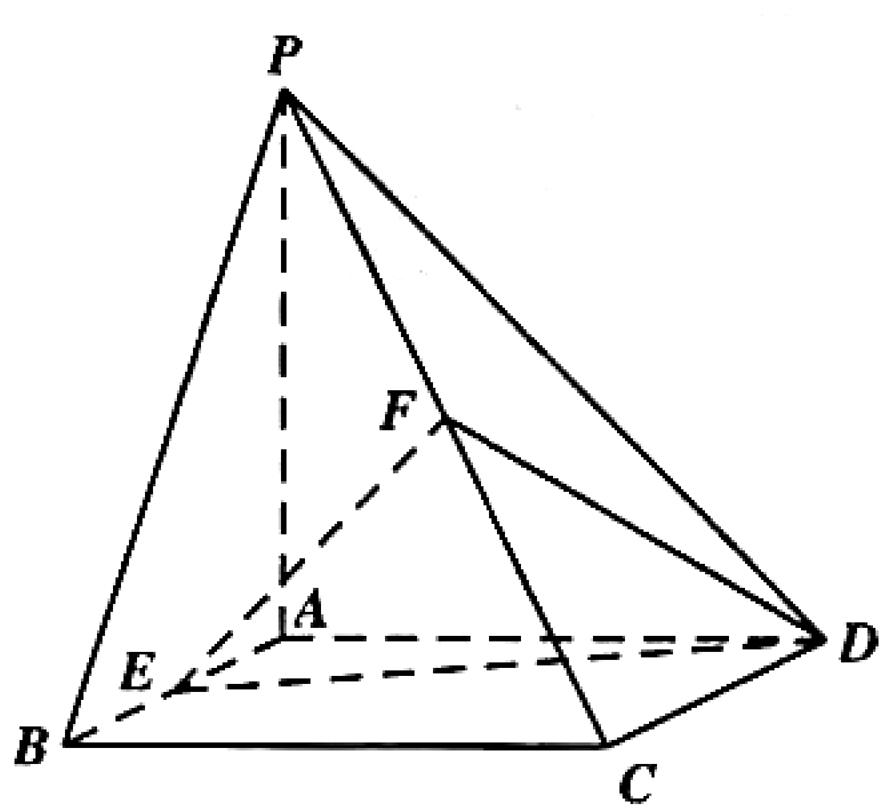
（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）从该校 4000 名学生中任取一人，试估计其 2017 年 12 月恰参加了 2 次学校组织的公益活动的概率；

（Ⅲ）已知学生每次参加公益活动可获得 10 个公益积分，任取该校一名学生，记该生 2017 年 12 月获得的公益积分为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望 $E(X)$．

（17）（本小题共 14 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，E，F 分别是 AB，PC 的中点，$PA=AD=2$，$CD=\sqrt{2}$．



（Ⅰ）求证：EF // 平面 PAD；

（Ⅱ）求 PC 与平面 EFD 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 BC 上是否存在一点 M，使得平面 $PAM\perp$ 平面 EFD？若存在，求出 $\dfrac{BM}{BC}$ 的值；若不存在，请说明理由．

北京高考在线 www.gkaozx.com

（18）（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax-a^2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（19）（本小题共 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离和它到直线 $x=-1$ 的距离相等，记点 P 的轨迹为 C.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）设点 A 在曲线 C 上，x 轴上一点 B（在点 F 右侧）满足 $|AF|=|FB|$. 平行于 AB 的直线与曲线 C 相切于点 D，试判断直线 AD 是否过定点？若过定点，求出定点坐标；若不过定点，请说明理由.

（20）（本小题共 13 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_1，a_2 是整数，且 $a_n=\begin{cases}5a_{n-1}-3a_{n-2}, & a_{n-1}\cdot a_{n-2}\text{为偶数},\\ a_{n-1}-a_{n-2}, & a_{n-1}\cdot a_{n-2}\text{为奇数},\end{cases}$ $(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geq 3)$.

（Ⅰ）若 $a_1=1$，$a_2=2$，写出 a_3，a_4，a_5 的值；

（Ⅱ）若在数列 $\{a_n\}$ 的前 2018 项中，奇数的个数为 t，求 t 的最大值；

（Ⅲ）若数列 $\{a_n\}$ 中，a_1 是奇数，$a_2=3a_1$，证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，a_n 不是 4 的倍数.

北京高考在线 www.gkaozx.com

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

获取更多期末试题，请扫描二维码

长按识别关注

丰台区 2017—2018 学年度第一学期期末练习 2018.01

高三数学（理科）答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	D	A	D	C	C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\dfrac{1}{2}$　　10. 1　　11. -40　　12. 2，90

13. $m\in(-\infty,1]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$ 中任取一值即为正确答案　　14. 1，$(0,\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}]$

注：第 12，14 题第一个空 2 分；第二个空 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（15）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}\sin 2B=2\sin^2 B$，

所以 $2\sqrt{3}\sin B\cos B=2\sin^2 B$.

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.　　………………6 分

（Ⅱ）由 $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$，$a=4$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，

得 $\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot c\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$.

解得 $c=6$.

由余弦定理可得 $b^2=4^2+6^2-2\times 4\times 6\times\cos\dfrac{\pi}{3}=28$，

解得 $b=2\sqrt{7}$.　　………………13 分

（16）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）依题意 $\dfrac{b}{100}=\dfrac{200}{4000}$，所以 $b=3$.

因为 $a=100-(12+20+15+30+10+3)=10$，

所以 $a=10$，$b=3$.　　………………4 分

（Ⅱ）设“从该校所有学生中任取一人，其 2017 年 12 月恰参加了 2 次学校组织的公益活动”为事件 A，

则 $P(A)=\dfrac{20+30}{100}=\dfrac{1}{2}$.

所以从该校所有学生中任取一人，其2017年12月恰参加了2次学校组织的公益活动的概率约为$\frac{1}{2}$.　　　　　　　　　　…………………8分

(Ⅲ) X 可取0，10，20，30，40.　　　　　　　　　　…………………9分

$P(X=0)=\frac{3}{100}=0.03$;　　$P(X=10)=\frac{20}{100}=0.2$;

$P(X=20)=\frac{50}{100}=0.5$;　　$P(X=30)=\frac{12}{100}=0.12$;

$P(X=40)=\frac{15}{100}=0.15$.

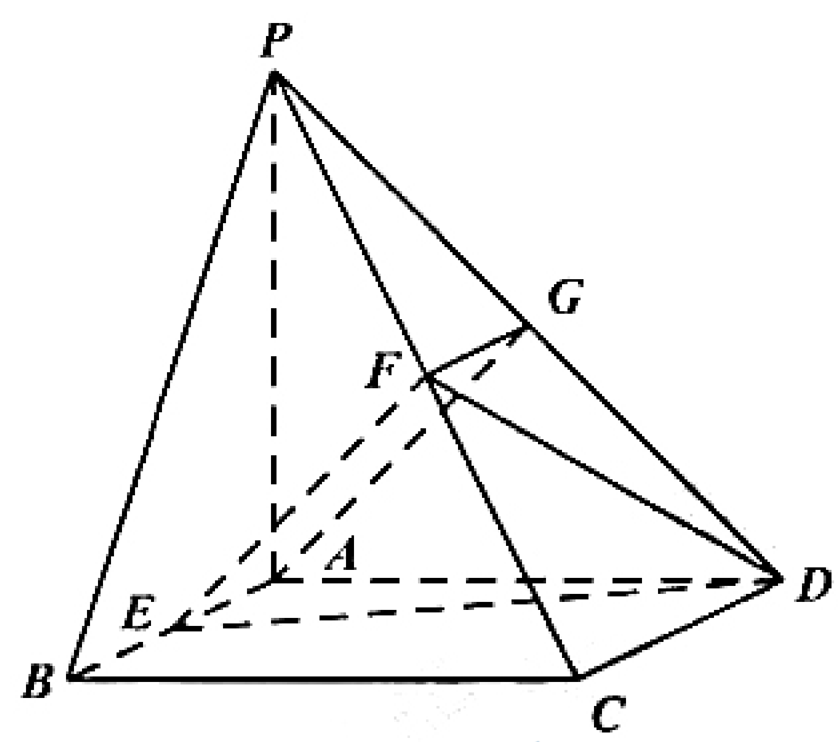
所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	10	20	30	40
P	0.03	0.2	0.5	0.12	0.15

…………………12分

所以 $E(X)=0\times0.03+10\times0.2+20\times0.5+30\times0.12+40\times0.15=21.6$.　　…………………13分

(17)(本小题共14分)



(Ⅰ) 证明：取 PD 中点 G，连接 AG，FG.

因为 F，G 分别是 PC，PD 的中点，

所以　$FG//CD$，且　$FG=\frac{1}{2}CD$.

因为 $ABCD$ 是矩形，E 是 AB 中点，

所以　$AE//FG$，$AE=FG$.

所以 $AEFG$ 为平行四边形.

所以　$EF//AG$.

又因为　$AG\subset$平面 PAD，$EF\not\subset$平面 PAD，

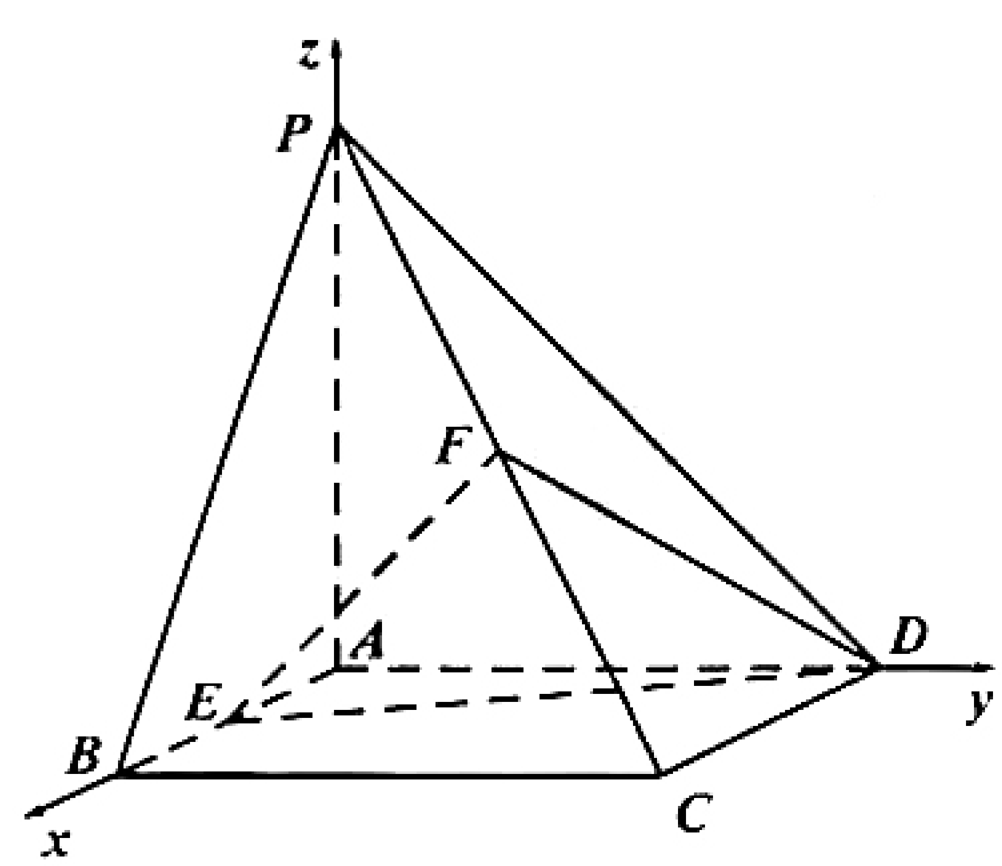
所以　$EF//$平面 PAD.　　　　　　　　　　…………………5分

(Ⅱ) 解：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，

所以　$PA\perp AB$，$PA\perp AD$，

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp AD$.

如图建立直角坐标系 $Axyz$，



所以　$E(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$F(\frac{\sqrt{2}}{2},1,1)$，$D(0,2,0)$，

所以　$\overrightarrow{EF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-2,0)$.

设平面 EFD 的法向量为　$\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}y+z=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x-2y=0\end{cases}$.

令　$y=1$，所以 $\begin{cases}z=-1\\ x=2\sqrt{2}\end{cases}$，　所以　$\vec{n}=(2\sqrt{2},1,-1)$.　　…………………8分

北京高考在线 www.gkaozx.com

又因为 $\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2},2,-2)$，

设 PC 与平面 EFD 所成角为 θ，

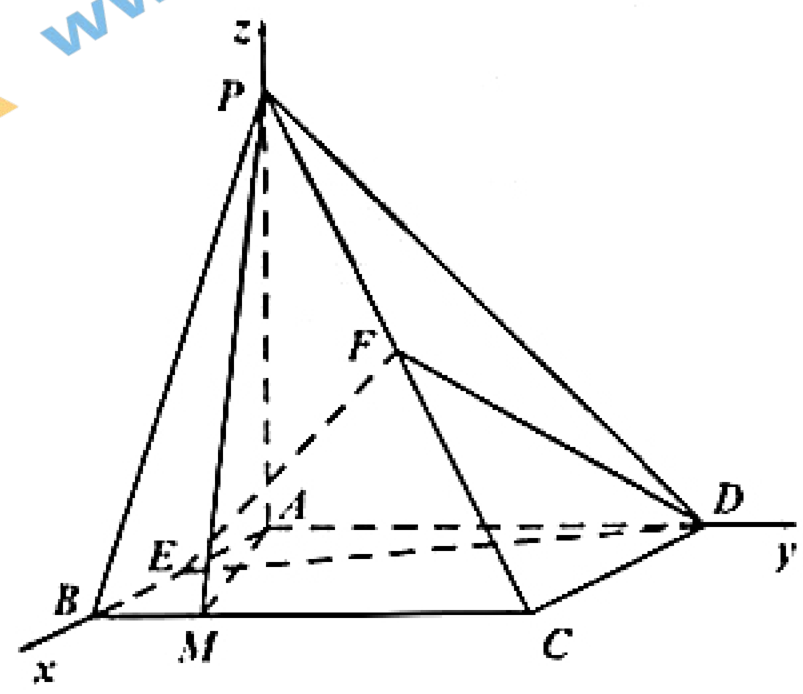
所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{4+2+2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}$.

所以 PC 与平面 EFD 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$. ………………10 分

（Ⅲ）解：因为侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，

所以只要在 BC 上找到一点 M，使得 $DE\perp AM$，即可证明平面 $PAM\perp$ 平面 EFD.

设 BC 上存在一点 M，则 $M(\sqrt{2},t,0)\ (t\in[0,2])$，



所以 $\overrightarrow{AM}=(\sqrt{2},t,0)$.

因为 $\overrightarrow{ED}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},2,0)$，

所以令 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，即 $-1+2t=0$，所以 $t=\dfrac{1}{2}$.

所以在 BC 存在一点 M，使得平面 $PAM\perp$ 平面 EFD，且 $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{1}{4}$. ………………14 分

（18）（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{2x^2-ax-a^2}{x}=\frac{(x-a)(2x+a)}{x}.$$

由 $f'(x)=0$，可得 $x=a$ 或 $x=-\dfrac{a}{2}$. ………………4 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，没有单调递减区间； ………………5 分

当 $a>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,a)$，单调递增区间是 $(a,+\infty)$. ………………6 分

当 $a<0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,-\frac{a}{2})$	$-\frac{a}{2}$	$(-\frac{a}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,-\frac{a}{2})$，单调递增区间是 $(-\frac{a}{2},+\infty)$． ……………………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2>0$，符合题意.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,a)$，单调递增区间是 $(a,+\infty)$，

所以 $f(x)\geq 0$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geq 0$，即 $f(a)\geq 0$，

所以 $a^2-a^2-a^2\ln a\geq 0$，所以 $0<a\leq 1$． ……………………10 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,-\frac{a}{2})$，单调递增区间是 $(-\frac{a}{2},+\infty)$，

所以 $f(x)\geq 0$ 恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geq 0$，即 $f(-\frac{a}{2})\geq 0$．

所以 $\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}-a^2\ln(-\frac{a}{2})\geq 0$，所以 $-2e^{\frac{3}{4}}\leq a<0$． ……………………12 分

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-2e^{\frac{3}{4}},1]$． ……………………13 分

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为动点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离和它到直线 $x=-1$ 的距离相等，

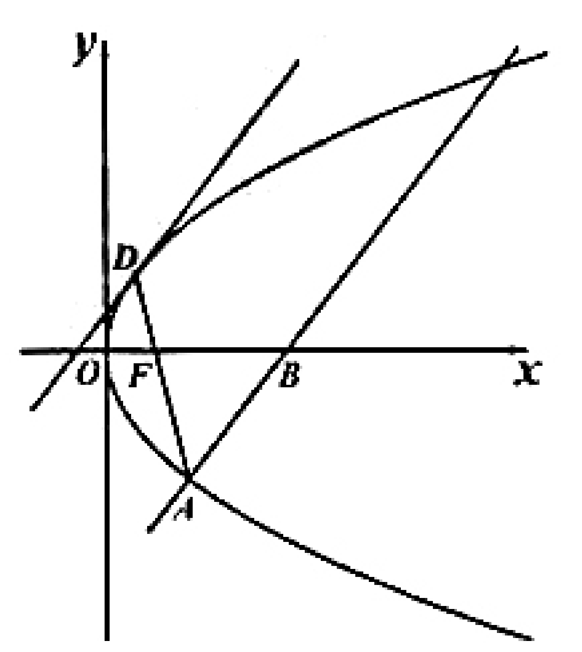
所以动点 P 的轨迹是以点 $F(1,0)$ 为焦点，直线 $x=-1$ 为准线的抛物线.

设 C 的方程为 $y^2=2px$，

则 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$．

所以 C 的轨迹方程为 $y^2=4x$． ……………………5 分

（Ⅱ）设 $A(\frac{m^2}{4},m)$，则 $B(\frac{m^2}{4}+2,0)$，



所以直线 AB 的斜率为 $k=\frac{m}{-2}=-\frac{m}{2}$．

设与 AB 平行，且与抛物线 C 相切的直线为 $y=-\frac{m}{2}x+b$，

由 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=-\frac{m}{2}x+b \end{cases}$ 得 $my^2+8y-8b=0$，

由$\Delta=64-4\cdot m\cdot 8b=0$ 得 $b=-\dfrac{2}{m}$.

所以$y=-\dfrac{4}{m}$，所以点 $D(\dfrac{4}{m^2},-\dfrac{4}{m})$.

当$\dfrac{m^2}{4}\neq\dfrac{4}{m^2}$，即$m\neq\pm2$时，直线$AD$的方程为$y-m=\dfrac{m+\dfrac{4}{m}}{\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{4}{m^2}}(x-\dfrac{m^2}{4})$，

整理得$y=\dfrac{4m}{m^2-4}(x-1)$，

所以直线AD过点$(1,0)$. ………………12 分

当 $\dfrac{m^2}{4}=\dfrac{4}{m^2}$，即 $m=\pm2$时，直线AD的方程为 $x=1$，过点$(1,0)$.

综上所述，直线AD过定点$(1,0)$. ………………14 分

（20）（本小题共 13 分）

（Ⅰ）解：$a_3=5a_2-3a_1=7$，

$a_4=5a_3-3a_2=29$，

$a_5=a_4-a_3=22$.

所以$a_3=7$，$a_4=29$，$a_5=22$. ………………3 分

（Ⅱ）解：（ⅰ）当a_1，a_2都是偶数时，$a_1\cdot a_2$是偶数，代入$5a_{n-1}-3a_{n-2}$得到a_3是偶数；

因为$a_2\cdot a_3$是偶数，代入$5a_{n-1}-3a_{n-2}$得到a_4是偶数；

如此下去，可得到数列$\{a_n\}$中项的奇偶情况是偶，偶，偶，偶，…

所以前 2018 项中共有 0 个奇数.

（ⅱ）当a_1，a_2都是奇数时，$a_1\cdot a_2$是奇数，代入$a_{n-1}-a_{n-2}$得到a_3是偶数；

因为$a_2\cdot a_3$是偶数，代入$5a_{n-1}-3a_{n-2}$得到a_4是奇数；

因为$a_3\cdot a_4$是偶数，代入$5a_{n-1}-3a_{n-2}$得到a_5是奇数；

如此下去，可得到数列$\{a_n\}$中项的奇偶情况是奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶，…

所以前 2018 项中共有 1346 个奇数.

（ⅲ）当a_1是奇数、a_2是偶数时，

理由同（ii），可得数列$\{a_n\}$中项的奇偶情况是奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，…

所以前 2018 项中共有 1345 个奇数.

（iv）当a_1是偶数、a_2是奇数时，

理由同（ii），可得数列$\{a_n\}$中项的奇偶情况是偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，…

所以前 2018 项中共有 1345 个奇数.

综上所述，前 2018 项中奇数的个数t的最大值是 1346. ……………………8 分

（III）证明：因为a_1是奇数，

所以由（II）知，a_n不可能都是偶数，只能是偶奇奇，奇偶奇，奇奇偶三种情况.

因为a_1是奇数，且$a_2=3a_1$，所以a_2也是奇数.

所以$a_3=a_2-a_1=2a_1$为偶数，且不是 4 的倍数.

因为$a_4=5a_3-3a_2=a_1$，

所以前 4 项没有 4 的倍数.

假设存在最小正整数$t(t>3)$，使得a_t是 4 的倍数，

则a_{t-1}，a_{t-2}均为奇数，所以a_{t-3}一定是偶数.

由于$a_{t-1}=5a_{t-2}-3a_{t-3}$，且$a_t=a_{t-1}-a_{t-2}$，

将这两个式子作和，可得$3a_{t-3}=4a_{t-2}-a_t$.

因为a_t是 4 的倍数，所以a_{t-3}也是 4 的倍数，

与t是最小正整数使得a_t是 4 的倍数矛盾.

所以假设不成立，即对任意$n\in\mathbf{N}^*$，a_n不是 4 的倍数. ……………………13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）