甘肃省一月份高考诊断考试·数学参考答案

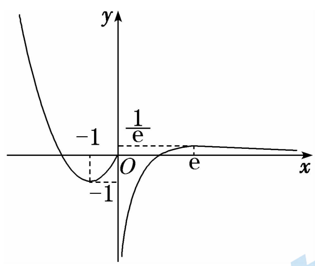
1. 选 A　$A=\{x \mid y=\sqrt{4x-1}\}=\left\{x \,\middle|\, x\geqslant\frac{1}{4}\right\}$，由 $x^2-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$，即 $B=(-1,3)$，所以 $A\cap B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{4}\leqslant x<3\right\}=\left[\frac{1}{4},3\right)$. 故选 A.

2. 选 D　因为 $(3-\mathrm{i})z=1-2\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{3+\mathrm{i}-6\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限. 故选 D.

3. 选 B　因为 a_2,a_8 是方程 $x^2+mx-8=0$ 的两根，所以 $a_2+a_8=-m,a_2a_8=-8,\Delta=m^2+32>0$. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_8=a_4+a_6=2a_5$，又 $a_4+a_6=a_5^2+1$，所以 $2a_5=a_5^2+1$，所以 $a_5=1$，所以 $-m=2a_5=2$，所以 $m=-2$. 故选 B.

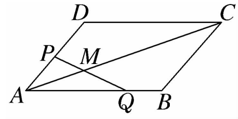
4. 选 A　众数是最高矩形的中点横坐标，因此众数在第二列的中点处. 因为直方图在右边拖尾，所以平均数大于中位数，在第三、四列的位置，因此有众数<中位数<平均数. 故选 A.

5. 选 B　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，
当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f(x)$ 单调递减；
当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)$ 单调递增.
所以当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)_{\min}=f(-1)=-1$.
当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，
当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；
当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减.
所以当 $x>0$ 时，$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.
画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示：



因为函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个零点，
所以 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，
由图可知 $-1<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$.
所以 m 的取值范围为 $\left(-1,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 故选 B.

6. 选 C　设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AQ}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\boldsymbol{b},\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.
设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PM}=\mu\overrightarrow{PQ}$，
则 $\overrightarrow{AM}=2\lambda\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\lambda\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{PM}=\mu\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}$.



因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\mu\boldsymbol{a}=(1-\mu)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，
所以 $\begin{cases}2\lambda=1-\mu,\\ \frac{4}{3}\lambda=\mu,\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{3}{10}$，
所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$，即 $\frac{AM}{AC}=\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{10}$. 故选 C.

7. 选 B　因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=1-2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{25}$.

8. 选 D　令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{\ln x}{x},g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{e}}}=1$.
由 $f(x)=xg(x)$，得 $f'(x)=g(x)+xg'(x)=g(x)+\ln x$，$f''(x)=g'(x)+\frac{1}{x}=\frac{\ln x+1}{x}$.
当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增. 所以 $f'(x)_{\min}=f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\ln\frac{1}{\mathrm{e}}=0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 既无极大值也无极小值.

9. 选 ABD　设 $f(x)=A\sin(2\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，
由图象可知 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}T$，解得 $T=\pi$，A 正确；
因为 $\omega>0$，所以 $2\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，解得 $\omega=1$，
故 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$.
将 $\left(\frac{\pi}{12},A\right)$ 代入解析式得 $A\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=A$，
因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.
因为函数 $f(x)$ 经过点 $(0,\sqrt{3})$，所以 $A\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 $A=2$，$f(x)$ 的最大值为 2，B 正确；
由上述分析知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$，点 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 的对称中心，
直线 $x=\frac{5\pi}{6}$ 不是对称轴，C 错误；
当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，
因为 $y=\sin z$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ 上单调递增，D 正确. 故选 ABD.

10. 选 ACD　对于 A，由 $2ab=a\cdot 2b\leqslant\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，即 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，当且仅当 $a=2b$，且 $a+2b=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，取等号，所以 A 正确；

对于 B，因为 $a^2+b^2=(1-2b)^2+b^2=5b^2-4b+1=5\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$，当且仅当 $b=\frac{2}{5}$ 时，a^2+b^2 取到最小值 $\frac{1}{5}$，所以 B 错误；

对于 C，由 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{4}=8$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，且 $a+2b=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，取等号，所以 C 正确；

对于 D，$2^a+4^b\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 4^b}=2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=2b$，且 $a+2b=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，取等号，所以 D 正确．故选 ACD.

11. 选 AB　由抛物线的定义可得 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=5+2=7$，故 A 正确；

当过抛物线 C 的焦点且与 x 轴垂直时弦长最短，此时弦长为 4，故 B 正确；

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，于是得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

当 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 时，$y_1=-2y_2$，而 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，解得 $y_2=\pm\sqrt{2}$，$B\left(\frac{1}{2},\pm\sqrt{2}\right)$，$k=\pm 2\sqrt{2}$，

倾斜角不是 $\frac{\pi}{3}$，故 C 错误；

由 $F(1,0)$，$M(-1,0)$，则 $|AF|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(my_1+1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(1+m^2)y_1^2}$，

$|BF|=\sqrt{(x_2-1)^2+y_2^2}=\sqrt{(my_2+1-1)^2+y_2^2}=\sqrt{(1+m^2)y_2^2}$，

$|AM|=\sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{(my_1+1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{(1+m^2)y_1^2+4my_1+4}$，

$|BM|=\sqrt{(x_2+1)^2+y_2^2}=\sqrt{(my_2+1+1)^2+y_2^2}=\sqrt{(1+m^2)y_2^2+4my_2+4}$，

由 $|AF|\cdot|BM|=|BF|\cdot|AM|$，则 $\left(\frac{|AF|}{|BF|}\right)^2=\left(\frac{|AM|}{|BM|}\right)^2$，

可得 $\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{(1+m^2)y_1^2+4my_1+4}{(1+m^2)y_2^2+4my_2+4}$，化简可得 $(my_1y_2+y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

由 $y_1\neq y_2$，则 $my_1y_2+y_1+y_2=0$，将 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ 代入，则 $-4m+4m=0$ 恒成立，故 D 错误．故选 AB.

12. 选 ACD　设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h，因为 $V_{A\text{-}A_1BC}=V_{A_1\text{-}ABC}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AA_1$，$S_{\triangle ABC}=8$，$AA_1=8$，$S_{\triangle A_1BC}=24$，所以 $h=\frac{8}{3}$，即点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\frac{8}{3}$，A 正确；

以 A 为原点，AB,AC,AA_1 所在直线为 x,y,z 轴建系（图略），则 $C(0,4,0)$，$D(2,0,0)$，$E(0,2,0)$，$A_1(0,0,8)$，设 $Q(\lambda,4-\lambda,\mu)$，则 $\overrightarrow{CQ}=(\lambda,-\lambda,\mu)$，平面 A_1DE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(4,4,1)$，$\overrightarrow{CQ}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 不平行，所以不存在点 Q，使得 $CQ\perp$ 平面 A_1DE，B 错误；

三棱柱的外接球 O 即为以 AB,AC,AA_1 为邻边的长方体的外接球，当 OD 与过点 D 的截面垂直时，截面的面积最小，

球心 $O(2,2,4)$，$DO=2\sqrt{5}$，$AO=2\sqrt{6}$，则过点 D 作球的截面，截面半径的最小值为 $\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{5})^2}=2$，所以截面的面积最小为 4π，C 正确；

过点 A_1 作 $A_1H\perp B_1C_1$ 于 H（图略），则 $A_1H=2\sqrt{2}$，$HQ=\sqrt{A_1Q^2-A_1H^2}=\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}$，

则点 Q 的轨迹是以点 H 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的一段圆弧，其圆心角为 π，点 Q 的轨迹长即为 $2\sqrt{2}\pi$，D 正确.

13. **解析**：由函数 $f(x)=\frac{a^x}{a^x-1}+m$，可得 $f(-x)=\frac{a^{-x}}{a^{-x}-1}+m=-\frac{1}{a^x-1}+m$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\frac{a^x}{a^x-1}+m-\frac{1}{a^x-1}+m=0$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

14. **解析**：设球的半径为 R，则圆柱的底面半径为 R，母线长为 $2R$.

则球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，所以 $R=\sqrt{3}$.

所以圆柱表面积为 $2\pi R^2+2\pi R\times 2R=6\pi R^2=18\pi$.

答案：18π

15. **解析**：因为 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 6，所以 $|BF_1|+|F_1F_2|-|AB|-|AF_2|=|F_1F_2|-(|AF_2|-|AF_1|)=2c-2a=6$.

又点 F_1,F_2 是双曲线 C_2：$\frac{x^2}{4a^2}-\frac{y^2}{4b^2}=1$ 的左、右顶点，所以 $c=2a$，所以 $a=3$，$c=6$，$b=3\sqrt{3}$，

所以双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$.

答案：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

16. **解析**：若甲在第 $(n-1)$ 天选择了 A 餐厅，那么在第 n 天有 40% 的可能性选择 A 餐厅，

若甲在第 $(n-1)$ 天选择了 B 餐厅，那么在第 n 天有 60% 的可能性选择 A 餐厅，

所以第 n 天选择 A 餐厅的概率

$P_n=0.4P_{n-1}+0.6(1-P_{n-1})(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

$P_n=-0.2P_{n-1}+0.6$，所以 $P_n-0.5=-0.2(P_{n-1}-0.5)$.

又由题意得，$P_1=1$，所以 $\{P_n-0.5\}$ 是以 0.5 为首项，-0.2 为公比的等比数列，

所以 $P_n-0.5=0.5\times(-0.2)^{n-1}$，

所以 $P_n=0.5+0.5\times(-0.2)^{n-1}$.

答案：$0.5+0.5\times(-0.2)^{n-1}$

17. **解**:(1)因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A>0$.

由正弦定理可得 $-2\cos B\sin A=\sin C\cos B+\sin B\cos C$

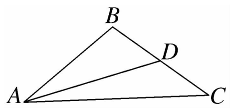
$=\sin(B+C)=\sin A$,

所以 $\cos B=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………2 分

又 $B\in(0,\pi)$,故 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………4 分

(2)在△ABD 中,$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\angle ADB}$,

所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{c\sin B}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ……………………6 分



结合 $B=\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $\angle ADB=\dfrac{\pi}{4}$,

所以 $\angle BAD=\angle DAC=\dfrac{\pi}{12}$,

所以 $\angle ACB=\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$, ……………………………8 分

所以△ABC 是等腰三角形,且 $a=c$,

所以 $b=2a\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{6}$. ……………………………10 分

18. **解**:(1)证明:因为 $AD/\!/BC$,$AD\not\subset$平面 PBC,$BC\subset$平面 PBC,所以 $AD/\!/$平面 PBC. ……………………2 分

又因为平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$,$AD\subset$平面 PAD,

所以 $AD/\!/l$. ……………………………………3 分

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,$AD\subset$平面 $ABCD$,所以 $AD\perp PA$.

又因为 $AD\perp AB$,$AB\cap PA=A$,

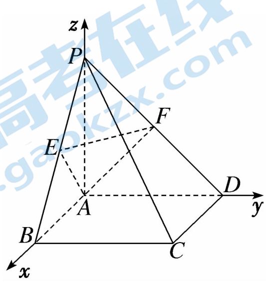
所以 $AD\perp$平面 PAB. ……………………………5 分

所以 $l\perp$平面 PAB. ……………………………6 分

(2)由(1)知,AB,AD,AP 两两相互垂直,如图,以点 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系. 设 $AB=2$,则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,$E(1,0,1)$,$F(0,1,1)$,$\overrightarrow{AE}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$. ……………7 分

设平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

即 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x+z=0,\\ y+z=0.\end{cases}$



令 $x=1$,则 $y=1$,$z=-1$,得

$\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$, ………………9 分

又平面 PAB 的一个法向量为

$\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$, ……………10 分

所以平面 AEF 与平面 PAB 夹角的余弦值等于 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}\times1}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………12 分

19. **解**:(1)由题意得 2×2 列联表:

	男	女	合计
喜爱看足球比赛	50	10	60
不喜爱看足球比赛	10	30	40
合计	60	40	100

……………………(2 分)

零假设为 H_0:喜爱观看足球比赛与性别无关联.

根据列联表中的数据计算得

$\chi^2=\dfrac{100\times(50\times30-10\times10)^2}{60\times40\times60\times40}=\dfrac{1\,225}{36}\approx34.028>10.828=x_{0.001}$. ……………………………4 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为喜爱观看足球比赛与性别有关联. ………5 分

(2)按照分层随机抽样的方式抽取 8 人,其中男生 2 人,女生 6 人, ……………………………………6 分

则 X 的可能取值为 0,1,2, ……………………………7 分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^2}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$,$P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\dfrac{3}{7}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_8^2}=\dfrac{1}{28}$, ……………………………10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{28}$

……………………11 分

$E(X)=0\times\dfrac{15}{28}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{2}$. ……………………12 分

20. **解**:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$. ………1 分

当 $n\geqslant2$ 时,$S_n=2a_n-2$,$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$, ……………………………2 分

即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$,所以 $\{a_n\}$ 是首项、公比均为 2 的等比数列,故 $a_n=2^n$. ……………………………4 分

又 $a_n\cdot b_n=2n-1$,故 $b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}=\dfrac{2n-1}{2^n}$. ……………6 分

(2)$b_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$,则 $T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,①

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$,② ……………………7 分

①−②,得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{2^{n+1}}$,

所以 $T_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$. ……………………………9 分

不等式 $\lambda\geqslant n(3-T_n)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

即转化为 $\lambda\geqslant\dfrac{2n^2+3n}{2^n}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

令 $f(n)=\dfrac{2n^2+3n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $f(n)_{\max}\leqslant\lambda$, ………10 分

又 $f(n+1)-f(n)=\dfrac{2n^2+7n+5}{2^{n+1}}-\dfrac{2n^2+3n}{2^n}=\dfrac{-2n^2+n+5}{2^{n+1}}$,

当 $n=1$ 时，$f(n+1)-f(n)>0$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n+1)-f(n)<0$，

所以 $f(1)<f(2)>f(3)>f(4)>\cdots$，

则 $\lambda\geqslant f(n)_{\max}=f(2)=\dfrac{7}{2}$.

所以实数 λ 的取值范围为 $\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right)$. ……………………12 分

21. **解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=(x+2)\ln(x+1)$，

$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+2}{x+1}$，……………………1 分

$f(0)=0$，$f'(0)=2$，……………………3 分

所以 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$. ……4 分

(2)令 $g(x)=f(x)-x=(x+a)\ln(x+1)-x$，

因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

则 $g'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x+a}{x+1}-1\geqslant 0$，即 $g'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{a-1}{x+1}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，……………………6 分

$g''(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{a-1}{(x+1)^2}=\dfrac{x+2-a}{(x+1)^2}$，$x\in(0,+\infty)$，……7 分

当 $a\leqslant 2$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，$g'(x)>g'(0)=a-1\geqslant 0$，解得 $a\in[1,2]$；……………………9 分

当 $a>2$ 时，若 $x\in(0,a-2)$，则 $g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

若 $x\in(a-2,+\infty)$，则 $g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

$g'(x)_{\min}=g'(a-2)=\ln(a-1)+\dfrac{a-1}{a-1}=\ln(a-1)+1\geqslant 0$，

解得 $a\in(2,+\infty)$. ……………………11 分

综上，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………12 分

22. **解**：(1)由题意得 $\begin{cases}b=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $a^2=4$，$b^2=1$，……………………2 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………4 分

(2)**法一**：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为点 $(4,2)$ 与 M,N 三点共线，所以 $\dfrac{y_1-2}{x_1-4}=\dfrac{y_2-2}{x_2-4}$，

所以 $\begin{cases}x_1-4=\lambda(x_2-4),\\ y_1-2=\lambda(y_2-2)\end{cases}$（其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\lambda\neq 0$），

所以 $\begin{cases}x_1=\lambda x_2+4(1-\lambda),\\ y_1=\lambda y_2+2(1-\lambda),\end{cases}$

所以 $[\lambda x_2+4(1-\lambda)]^2+4[\lambda y_2+2(1-\lambda)]^2=4$，

又 $x_2^2+4y_2^2=4$，

整理可得 $(\lambda-1)(2\lambda x_2+4\lambda y_2-9\lambda+7)=0$，……………6 分

当 $\lambda=1$ 时，$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，不合题意；

故 $2\lambda x_2+4\lambda y_2-9\lambda+7=0$，得 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{2x_2+4y_2-9}{-7}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=\dfrac{1}{2}x_0$，所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1-\frac{1}{2}x_0}{x_1-x_0}\cdot\dfrac{y_2-\frac{1}{2}x_0}{x_2-x_0}=\dfrac{4x_2+y_2-4-(2x_2+4y_2-9)\cdot\frac{1}{2}x_0}{(x_2+16y_2-8)-(2x_2+4y_2-9)x_0}\cdot\dfrac{y_2-\frac{1}{2}x_0}{x_2-x_0}=\dfrac{y_2(1-2x_0)+x_2(-x_0+4)-4+\frac{9}{2}x_0}{y_2(16-4x_0)+x_2(-2x_0+1)-8+9x_0}\cdot\dfrac{y_2-\frac{1}{2}x_0}{x_2-x_0}$，……………………9 分

若 k_1k_2 为定值，则根据约分可得

$\dfrac{-x_0+4}{1}=\dfrac{-4+\frac{9}{2}x_0}{-x_0}$ 且 $\dfrac{1}{16-4x_0}=\dfrac{-\frac{1}{2}x_0}{-8+9x_0}$，

解得 $x_0=\dfrac{1}{2}$. ……………………10 分

当 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时，$P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，

此时 $k_1k_2=\dfrac{\frac{7}{2}x_2-\frac{7}{4}}{14y_2-\frac{7}{2}}\cdot\dfrac{y_2-\frac{1}{4}}{x_2-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$.

所以当 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 时，$k_1k_2=\dfrac{1}{4}$ 为定值. ……………12 分

法二：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，直线 MN：$y=k(x-4)+2(k\neq 0)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-4)+2,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $x^2+4[k(x-4)+2]^2-4=0$，

因为 x_1,x_2 为方程 $x^2+4[k(x-4)+2]^2-4=0$ 的两根，

所以 $x^2+4[k(x-4)+2]^2-4=(1+4k^2)(x-x_1)(x-x_2)$，

则 $x_0^2+4[k(x_0-4)+2]^2-4=(1+4k^2)(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)$，……………………6 分

由 $y=k(x-4)+2$，得 $x=\dfrac{y-2}{k}+4$，

由 $\begin{cases}x=\dfrac{y-2}{k}+4,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $\left(\dfrac{y-2}{k}+4\right)^2+4y^2-4=0$，

同理可得 $(y_0-2+4k)^2+4k^2y_0^2-4k^2=(1+4k^2)(y_0-y_1)\cdot(y_0-y_2)$，……………………7 分

则 $k_1k_2=\dfrac{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$=\dfrac{(1+4k^2)(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(1+4k^2)(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$=\dfrac{(y_0-2+4k)^2+4k^2y_0^2-4k^2}{x_0^2+4[k(x_0-4)+2]^2-4}$

$=\dfrac{(4y_0^2+12)k^2+(8y_0-16)k+y_0^2-4y_0+4}{4(x_0^2-8x_0+16)k^2+4(4x_0-16)k+x_0^2+12}$，……9 分

若 k_1k_2 为定值，则必有 $\dfrac{4y_0^2+12}{4(x_0^2-8x_0+16)}=\dfrac{8y_0-16}{4(4x_0-16)}$

$=\dfrac{y_0^2-4y_0+4}{x_0^2+12}$，……………………10 分

结合点 P 在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上，即 $y_0=\dfrac{1}{2}x_0$，

解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2},\\ y_0=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 所以点 P 坐标为 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，$k_1k_2=\dfrac{1}{4}$.

综上所述，当 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 时，$k_1k_2=\dfrac{1}{4}$ 为定值. ……12 分