

育英学校 2024 届高三年级统一练习（一）

数 学

第一部分 选择题（共 40 分）

一、选择题。（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A = \{0, a\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 a 可以是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2. $\left(\frac{1}{x} - x\right)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数是 ()

- A. -210 B. -120 C. 120 D. 210

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60° , 且与椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 有相等的焦距, 则 C 的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中正确的是 ()

- A. $b^2 < a^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $\frac{b}{a} > 1$ D. $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

5. 函数 $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}$ 的零点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

6. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A 、 B 两点, 交 C 的准线于 D 、 E 两点. 已知 $|AB| = 4\sqrt{2}$,

$|DE| = 2\sqrt{5}$, 则 C 的焦点到准线的距离为

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

7. 已知 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为共面的三个单位向量, 且 $\vec{i} \perp \vec{j}$, 则 $(\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{j} + \vec{k})$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 3]$ B. $[-2, 2]$
 C. $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$ D. $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

8. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, 则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 设 $0 < p < 1$ ，随机变量 ξ 的分布列如图，则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

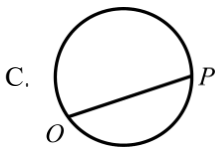
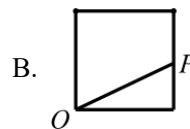
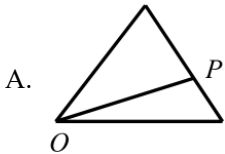
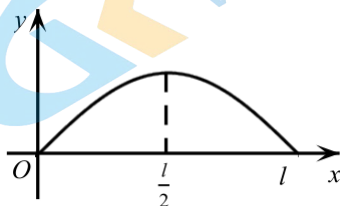
A. $D(\xi)$ 减小

B. $D(\xi)$ 增大

C. $D(\xi)$ 先减小后增大

D. $D(\xi)$ 先增大后减小

10. 点 P 从 O 点出发，按逆时针方向沿周长为 l 的图形运动一周， O, P 两点的距离 y 与点 P 所走路程 x 的函数关系如图所示，那么点 P 所走的图形是 ()



第二部分 非选择题 (共 110 分)

二、填空题. (每小题 5 分, 共 25 分)

11. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 1$, $a_1 + a_3 = 6$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

12. 已知不等式 $|x-m| < 1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, 则 m 的取值范围是_____.

13. 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与曲线 C_2 关于直线 $y = -x$ 对称, C_1 与 C_2 分别在第一、二、三、四象限交于点 P_1, P_2, P_3, P_4 . 若四边形 $PP_2P_3P_4$ 的面积为 4, 则点 P_1 的坐标为_____, C_1 的离心率为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & x \leq m \\ x - 4, & x > m \end{cases}$.

①当 $m=0$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点个数为_____.

②如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 那么实数 m 的取值范围为_____.

15. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 下列命题正确的有_____. (写出所有正确命题的编号)

① $f(x)$ 是奇函数;

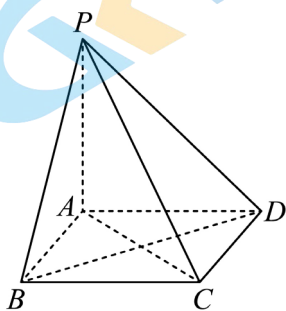
② $f(x)$ 在 R 上是单调递增函数;

③ 方程 $f(x) = x^2 + 2x$ 有且仅有 1 个实数根;

④ 如果对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > kx$, 那么 k 的最大值为 2.

三、简答题. (共 85 分)

16. 如图, 棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = 2, BD = 2\sqrt{2}$.



(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求二面角 $P-CD-B$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 PBD 的距离.

17. 已知函数 $f(x) = 4a \cos x \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$.

(I) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递增, 求 m 的最大值.

18. 某学校为了解学生的体质健康状况, 对高一、高二两个年级的学生进行体质健康测试. 现从两个年级学生中各随机抽取 20 人, 将他们的测试数据用茎叶图表示如下:

高一	高二
6 4 3	9 0 5 8
9 6 2 3	8 1 4 5 8

9	8	5	2	1	7	2	3	3	9
9	7	7	6	4	6	4	5	7	8
	8	3	0		5	0	2	6	
					4	0	2		

《国家学生体质健康标准》的等级标准如下表。规定：测试数据 ≥ 60 ，体质健康为合格。

等级	优秀	良好	及格	不及格
测试数据	[90, 100]	[80, 89]	[60, 79]	[0, 59]

- (1) 从该校高二年级学生中随机抽取一名学生，试估计这名学生体质健康合格的概率；
- (2) 从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，求选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率；
- (3) 设该校高一学生测试数据的平均数和方差分别为 \bar{x}_1, s_1^2 ，高二学生测试数据的平均数和方差分别为 \bar{x}_2, s_2^2 ，试比较 \bar{x}_1 与 \bar{x}_2 、 s_1^2 与 s_2^2 的大小。（只需写出结论）

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上。若椭圆 C 上存在点 P ，使得 $\angle APB = 90^\circ$ ，求点 B 横坐标的取值范围。

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ 。

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；
- (II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时，求证： $x - 6 \leq f(x) \leq x$ ；
- (III) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)| (a \in \mathbf{R})$ ，记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$ ，当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值。

21. 给定数列 $\{a_n\}$ ，若满足 $a_1 = a (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ ，对于任意的 $n, m \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{n+m} = a_n \cdot a_m$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为“指数型数列”。

(1) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 5 \times 3^{n-1}, b_n = 4^n$, 试判断数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是不是“指数型数列”;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_n a_{n+1} + 3a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 判断数列 $\{\frac{1}{a_n} + 1\}$ 是不是“指数型数列”. 若是, 请给出证明, 若不是, 请说明理由;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是“指数型数列”, 且 $a_1 = \frac{a+1}{a+2} (a \in \mathbb{N}^*)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 中任意三项都不能构成等差数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通