2024 北京大兴高三（上）期末

数　　学

本试卷共 9 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U=\{x|x>1\}$，集合 $A=\{x|x\geq 2\}$，则 $C_U A=$

A. $\{x|1<x\leq 2\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|x\leq 1\}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot(z+\mathrm{i})=1$，则复数 z 的虚部是

A. -2　B. 2　C. -1　D. 0

3. 在 $(x^2-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为

A. -15　B. 15　C. -20　D. 20

4. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ $(\lambda>0)$，则 $\boldsymbol{a}=$

A. $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$　B. $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$　C. $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$　D. $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

5. 已知函数 $f(x)=2^x-1$，则不等式 $f(x)\leq x$ 的解集为

A. $(-\infty,2]$　B. $[0,1]$　C. $[1,+\infty)$　D. $[1,2]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“$C=\frac{\pi}{2}$” 是 “$\sin^2 A+\sin^2 B=1$” 的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7. 已知定点 $M(1,3)$ 和抛物线 $C:x^2=8y$，F 是抛物线 C 的焦点，N 是抛物线 C 上的点，则 $|NF|+|NM|$ 的最小值为

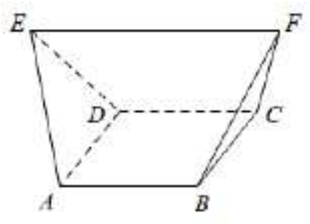
A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

8. 已知 $a>b>0$ 且 $ab=10$，则下列结论中不正确的是

A. $\lg a+\lg b>0$　　B. $\lg a-\lg b>0$

C. $\lg a\cdot\lg b<\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\lg a}{\lg b}>1$

9. 木楔在传统木工中运用广泛. 如图，某木楔可视为一个五面体，其中四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $\triangle ADE$，$\triangle BCF$ 均为等边三角形，$EF\,//\,CD$，$EF=4$，则该木楔的体积为



A. $\sqrt{2}$　　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　　D. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

10. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，集合 $T=\{t\,|\,t=\sin a_n, n\in\mathbf{N}^*\}$. 则

A. T 不可能有无数个元素

B.当且仅当 $d=0$ 时，T 只有1个元素

C.当 T 只有 2 个元素时，这 2 个元素的乘积有可能为 $\dfrac{1}{2}$

D.当 $d=\dfrac{2\pi}{k}$，$k\geq 2$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，T 最多有 k 个元素，且这 k 个元素的和为 0

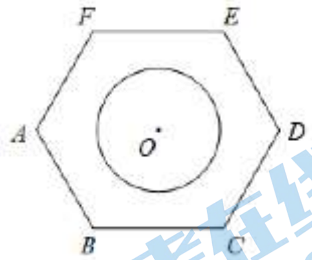
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=1$，$a_2\cdot a_4=16$，则 $a_5=$_________.

12. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的一条渐近线方程为 $2x-y=0$，则 $b=$_________.

13. 能够说明“设 a,b,c 是任意实数. 若 $a>b>c$，则 $ab>c^2$”是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为_________.



14. 如图是六角螺母的横截面，其内圈是半径为1的圆 O，外框是以 O 为中心，边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$，则 O 到线段 AC 的距离为_________；若 P 是圆 O 上的动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是_________.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 满足如下性质：（ i ）若将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位，则所得的图象关于 y 轴对称；（ ii ）若将 $f(x)$ 图象上的所有点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$，再向左平移 $\dfrac{1}{2}$ 个单位，则所得的图象关于原点对称. 给出下列四个结论：

① $f(1)=f(3)$；　　　② $f(0)=0$；

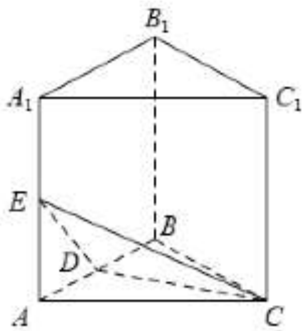
③ $f(2)+f(4)=0$；　　　④ $f(-\dfrac{1}{2})f(\dfrac{11}{2})\leq 0$.

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$CA=CB=\sqrt{5}$，$AA_1=AB=2$，D,E 分别为 AB,AA_1 的中点.



（Ⅰ）求证：平面 $CDE \perp$ 平面 ABB_1A_1；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

17.（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=2$.

（Ⅰ）若 $c=2\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（Ⅱ）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在，求 $\angle A$.

条件①：$\angle B=2\angle A$；　条件②：$\angle B=\dfrac{\pi}{3}+\angle A$；　条件③：$\angle C=2\angle A$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 13 分）

为了解客户对 A,B 两家快递公司的配送时效和服务满意度情况，现随机获得了某地区客户对这两家快递公司评价的调查问卷. 已知 A,B 两家公司的调查问卷分别有 120 份和 80 份，全部数据统计如下：

快递公司	A 快递公司		B 快递公司	
项目 / 评价分数　份数	配送时效	服务满意度	配送时效	服务满意度
$85 \le x \le 95$	29	24	16	12
$75 \le x < 85$	47	56	40	48
$65 \le x < 75$	44	40	24	20

假设客户对 A,B 两家快递公司的评价相互独立. 用频率估计概率.

（Ⅰ）从该地区选择 A 快递公司的客户中随机抽取 1 人，估计该客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率；

（Ⅱ）分别从该地区 A 和 B 快递公司的样本调查问卷中，各随机抽取 1 份，记 X 为这 2 份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分的份数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记评价分数 $x \ge 85$ 为“优秀”等级，$75 \le x < 85$ 为“良好”等级，$65 \le x < 75$ 为“一般”等级. 已知小王比较看重配送时效的等级，根据该地区 A,B 两家快递公司配送时效的样本评价分数的等级情况，你认为小王选择 A,B 哪家快递公司合适？说明理由.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过点 $T(4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N，直线 BM 与直线 $x=1$ 相交于点 P，直线 AN 与 y 轴相交于点 Q. 求证：$\triangle OAQ$ 与 $\triangle OTP$ 的面积之比为定值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax+\ln\frac{1-x}{1+x}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 0，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a=4$ 时，求 $f(x)$ 的零点个数；

（Ⅲ）证明：$0\le a\le 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件.

21.（本小题 15 分）

若各项为正的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中 d 为非零常数，则称数列 $\{a_n\}$ 为 D 数列. 记 $b_n=a_{n+1}-a_n$.

（Ⅰ）判断无穷数列 $a_n=\sqrt{n}$ 和 $a_n=2^n$ 是否是 D 数列，并说明理由；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：数列 $\{b_n\}$ 中存在小于 1 的项；

（Ⅲ）若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：存在正整数 n，使得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>2024$.

大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　（2）A　（3）B　（4）D　（5）B

（6）A　（7）C　（8）D　（9）D　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）16　（12）2

（13）$2,0,-1$（答案不唯一）　（14）1　$[6-2\sqrt{3},6+2\sqrt{3}]$

（15）① ③ ④

注：第（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；

第（15）题只写一个且正确 2 分，只写两个且正确 3 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

所以 $CD\perp BB_1$．　……1 分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 D 为 AB 的中点，$CA=CB=\sqrt{5}$，

所以 $CD\perp AB$．　……1 分

所以 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1．　……1 分

因为 $CD\subset$ 平面 CDE，

所以平面 $CDE\perp$ 平面 ABB_1A_1．　……1 分

（Ⅱ）取 A_1B_1 的中点 D_1，连结 D_1F．

因为 D 为 AB 的中点，

所以在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$DD_1//BB_1$．

所以 $DD_1\perp$ 平面 ABC．　……1 分

所以 $DD_1\perp AB$，$DD_1\perp DC$．

由（Ⅰ）知 $CD\perp AB$．

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $D(0,0,0)$，$B(-1,0,0)$，$B_1(-1,0,2)$，$E(1,0,1)$，$C(0,2,0)$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$．　……2 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \end{cases}$$ 即 $\begin{cases} 2z=0, \\ x+2y=0. \end{cases}$ ……1 分

令 $y=1$，则 $x=-2$．

于是 $\boldsymbol{n}=(-2,1,0)$．……1 分

又 $\overrightarrow{CE}=(1,-2,1)$，……1 分

设直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CE}\rangle|=|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CE}|}|$ ……2 分

$$=|\frac{(-2)\times1+1\times(-2)+0\times1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}|$$

$$=\frac{2\sqrt{30}}{15}.$$ ……1 分

所以直线 CE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$．……1 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由余弦定理知，

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$ ……1 分

$$=\frac{1^2+2^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times1\times2}$$

$$=-\frac{3}{4}.$$ ……1 分

在△ABC 中，$C\in(0,\pi)$．

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$ ……1 分

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$ ……1 分

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ ……1 分

$$=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$ ……1 分

（Ⅱ）选择条件②：$\angle B=\dfrac{\pi}{3}+\angle A$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，……2 分

知 $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin(A+\frac{\pi}{3})}$．

所以 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=2\sin A$．……1 分

所以 $\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}=2\sin A$． ⋯⋯2 分

所以 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$． ⋯⋯1 分

因为在 $\triangle ABC$ 中， $A\in(0,\pi)$，

所以 $\angle A=\frac{\pi}{6}$． ⋯⋯1 分

选择条件③： $\angle C=2\angle A$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$， ⋯⋯2 分

知 $\frac{1}{\sin A}=\frac{c}{\sin 2A}$．

所以 $\frac{1}{\sin A}=\frac{c}{2\sin A\cos A}$． ⋯⋯1 分

所以 $c=2\cos A$． ⋯⋯1 分

由余弦定理知 $c=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$．

所以 $c=\sqrt{3}$． ⋯⋯1 分

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ⋯⋯1 分

因为在 $\triangle ABC$ 中， $A\in(0,\pi)$，

所以 $\angle A=\frac{\pi}{6}$． ⋯⋯1 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据题中数据，该地区参与 A 快递公司调查的问卷共120份，

样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的问卷共 $29+47=76$ 份，

所以样本中对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的频率为 $\frac{76}{120}=\frac{19}{30}$，

估计该地区客户对 A 快递公司配送时效的评价不低于 75 分的概率 $\frac{19}{30}$． 3 分

（Ⅱ） X 的所有可能取值为 $0,1,2$． ⋯⋯1 分

记事件 C 为“从该地区 A 快递公司的样本调查问卷中随机抽取1份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”，事件 D 为“从该地区 B 快递公司的样本调查问卷中随机抽取1份，该份问卷中的服务满意度评价不低于 75 分”．

由题设知，事件 C,D 相互独立，且

$P(C)=\frac{24+56}{120}=\frac{2}{3}$， $P(D)=\frac{12+48}{80}=\frac{3}{4}$． ⋯⋯1 分

所以 $P(X=0)=P(\overline{C}\overline{D})=(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{12}$， ⋯⋯1 分

$P(X=1)=P(\overline{C}D\cup C\overline{D})=(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})=\frac{5}{12}$， ⋯⋯1 分

$P(X=2)=P(CD)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$. ……1 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{2}=\frac{17}{12}$. ……2 分

（III）答案不唯一. ……3 分

答案示例 1：小王选择 A 快递公司合适，理由如下：

根据样本数据，估计 A 快递公司配送时效评价为 “优秀”的概率是 $\frac{29}{120}$，估计 B 快递公司配送时效评价为“优秀”的概率是 $\frac{1}{5}$，因为 $\frac{29}{120}>\frac{1}{5}$，故小王选择 A 快递公司合适.

答案示例 2：小王选择 B 快递公司合适，理由如下：

由（Ⅰ）知，估计 A 快递公司配送时效评价为 “良好”以上的概率是 $\frac{19}{30}$；

由样本数据可知，估计 B 快递公司配送时效评价为 “良好”以上的概率是 $\frac{16+40}{80}=\frac{56}{80}=\frac{7}{10}$，因为 $\frac{19}{30}<\frac{7}{10}$，故小王选择 B 快递公司合适.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

由题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ 解得 $c=\sqrt{3}$. ……2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=1$. ……1 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……1 分

（Ⅱ）依题意，直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=k(x-4)(k\neq 0)$. ……1 分

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$. ……1 分

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，则

$\Delta>0$ 且 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+1}$， $x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2+1}$. ……1 分

所以直线 MB 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，所以 $P(1,\frac{-y_1}{x_1-2})$. ……2 分

直线 NA 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$，所以 $Q(0,\frac{2y_2}{x_2+2})$． ……1 分

所以 ΔOAQ 的面积为 $S_{\Delta OAQ}=\frac{1}{2}\times 2\times|y_Q|=|\frac{2y_2}{x_2+2}|$， ……1 分

ΔOTP 的面积为 $S_{\Delta OTP}=\frac{1}{2}\times 4\times|y_P|=|\frac{2y_1}{x_1-2}|$． ……1 分

所以 $\frac{S_{\Delta OAQ}}{S_{\Delta OTP}}=|\frac{2y_2}{x_2+2}|\times|\frac{x_1-2}{2y_1}|=|\frac{y_2(x_1-2)}{y_1(x_2+2)}|=|\frac{k(x_2-4)(x_1-2)}{k(x_1-4)(x_2+2)}|$

$=|\frac{x_1x_2-4x_1-2x_2+8}{x_1x_2+2x_1-4x_2-8}|=|\frac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+8-2x_1}{x_1x_2-4(x_1+x_2)-8+6x_1}|$ ……1 分

$=|\frac{\frac{64k^2-4}{4k^2+1}-2\times\frac{32k^2}{4k^2+1}+8\times\frac{4k^2+1}{4k^2+1}-2x_1}{\frac{64k^2-4}{4k^2+1}-4\times\frac{32k^2}{4k^2+1}-8\times\frac{4k^2+1}{4k^2+1}+6x_1}|$

$=|\frac{\frac{32k^2+4}{4k^2+1}-2x_1}{\frac{-3(32k^2+4)}{4k^2+1}+6x_1}|$ ……1 分

$=\frac{1}{3}$ ． ……1 分

所以 ΔOAQ 与 ΔOTP 的面积之比为定值．

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=ax+\ln\frac{1-x}{1+x}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$．

所以 $f'(x)=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+a$． ……2 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 0，

所以 $f'(0)=0$． ……1 分

所以 $a=2$． ……1分

（Ⅱ）当 $a=4$ 时，$f(x)=4x+\ln\frac{1-x}{1+x}$．

因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$， ……1 分

且 $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-4x=-\ln\frac{1-x}{1+x}-4x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数． ……1 分

以下讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的零点个数．

$f'(x)=\frac{-4x^2+2}{(1-x)(1+x)}$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$． ……1 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 的情况如下：

x	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

因为 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上没有零点. ⋯⋯1 分

因为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$，且 $f(1-\frac{1}{e^4})<0$，

由 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 上单调递减和函数零点存在定理知，

$f(x)$ 在区间 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 内存在唯一零点.

综上，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在唯一零点. ⋯⋯1 分

因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在 3 个零点. ⋯⋯1 分

（Ⅲ）当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$-ax^2\leqslant 0$，$a-2\leqslant 0$，

故 $f'(x)=\frac{-ax^2+a-2}{(1-x)(1+x)}\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减.

所以 $0\leqslant a\leqslant 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分条件. ⋯⋯3 分

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{x^2-3}{(1-x)(1+x)}$.

因为当 $x\in(-1,1)$ 时，$x^2-3<0,(1-x)(1+x)>0$，

故当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减.

所以 $0\leqslant a\leqslant 2$ 不是 $f(x)$ 为单调函数的必要条件. ⋯⋯2 分

所以 $0\leqslant a\leqslant 2$ 是 $f(x)$ 为单调函数的充分而不必要条件.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）数列 $a_n=\sqrt{n}$ 是 D 数列.

理由如下：$a_{n+1}^2-a_n^2=(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2=1$ 满足 D 数列定义. ⋯⋯2 分

数列 $a_n=2^n$ 不是 D 数列.

理由如下：$a_{n+1}^2-a_n^2=(2^{n+1})^2-(2^n)^2=2^{2n+2}-2^{2n}=3\cdot 2^{2n}$ 不是常数. ⋯⋯2 分

（Ⅱ）以下证明：$d>0$.

假设 $d<0$，由 $a_{n+1}^2-a_n^2=d$ 知 $\{a_n^2\}$ 为等差数列，故 $a_n^2=a_1^2+(n-1)d$.

因为$\{a_n\}$是各项为正的无穷数列，

当n取大于$[\frac{-a_1^2}{d}]+1$的整数时，$a_n^2 \leqslant a_1^2+([\frac{-a_1^2}{d}]+2-1)d<0$，

与已知矛盾，所以假设不成立，所以$d>0$．

以下证明：$\{a_n\}$是递增数列．

因为$d>0$，$a_{n+1}^2=a_n^2+d>a_n^2$，且$\{a_n\}$是各项为正的无穷数列，

所以$a_{n+1}>a_n$．所以$\{a_n\}$是递增数列．

以下证明：$\forall t>0$，$\exists k\in \mathbf{N}^*$，当$n\geqslant k$时，$a_n>t$．

若$t<a_1$，当$n>1$时，显然$a_n>t$．

若$t\geqslant a_1$，取$k=[\frac{t^2-a_1^2}{d}]+2$，

当$n\geqslant k$时，$a_n^2\geqslant a_1^2+([\frac{t^2-a_1^2}{d}]+2-1)d>t^2$，即$a_n>t$成立．

因为$b_n=a_{n+1}-a_n=\frac{d}{a_{n+1}+a_n}<\frac{d}{2a_n}$，

取$t=\frac{d}{2}$，当$n\geqslant k$时，$a_n>t$，此时，$b_n<\frac{d}{2\cdot\frac{d}{2}}=1$．

所以若$\{a_n\}$是D数列，则数列$\{b_n\}$中存在小于1的项．…5分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$\exists k\in \mathbf{N}$，当$n\geqslant k$时，$b_n<1$，即$a_{n+1}<a_n+1$，

以此类推，$0<a_{k+m}<a_{k+m-1}+1<a_{k+m-2}+2<\cdots<a_k+m$，$m\in\mathbf{N}^*$．

所以$\frac{1}{a_{k+m}}>\frac{1}{a_k+m}$，$m\in\mathbf{N}^*$．设此时$2^{s-1}\leqslant a_k<2^s$，$s\in\mathbf{N}^*$，令$n=k+m$．

所以$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum_{i=k}^{k+m}\frac{1}{a_i}>\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_k+1}+\frac{1}{a_k+2}+\cdots+\frac{1}{a_k+m}$

$>\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+m}$．

因为$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^s-1)}>\frac{2^s}{2^s+2^s}=\frac{1}{2}$，

所以当$m=2^{s+2\times2024}-1$，$m\in\mathbf{N}^*$，

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}>\sum_{i=k}^{k+m}\frac{1}{a_i}>\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\frac{1}{2^s+2}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^{s+2\times2024}-1)}$

$=(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s+1}+\cdots+\frac{1}{2^s+(2^s-1)})+(\frac{1}{2^{s+1}}+\frac{1}{2^{s+1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{s+1}+(2^{s+1}-1)})+$

$\cdots+(\frac{1}{2^{s+2\times2024}}+\frac{1}{2^{s+2\times2024}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{s+2\times2024}+(2^{s+2\times2024}-1)})>\frac{2\times2024}{2}=2024$．

所以存在正整数n，使得$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n}>2024$．……6分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！