2020 北京丰台高二（上）期末

数　　学

2020.01

（本试卷满分共 100 分，考试时间 90 分钟）

注意事项：

1.答题前，考生务必先将答题卡上的学校、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名,在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2.本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3.请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4.请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分(选择题共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.若 $a>b>0$，$c<0$，则有

A. $a-c>b-c$　　B. $b+c>a+c$　　C. $ac>bc$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

2.已知向量$\overrightarrow{OA}$=(1,0,1)，$\overrightarrow{OB}$=(2,1,-1),那么向量$\overrightarrow{AB}=$

A.(3,1,0)　　B.（-1，-1，2）　　C.（1，1，-2）　　D.$(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$

3.命题“$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x>x+1$”的否定是

A. $\forall x\in(-\infty,0]$，$e^x>x+1$　　B. $\forall x\in(-\infty,0]$，$e^x\le x+1$

C. $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$e^{x_0}>x_0+1$　　D. $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$e^{x_0}\le x_0+1$

4.已知 i 是虚数单位，$a,b\in$R，“$a=0$”是“复数$a+b$ i 是纯虚数”的

A.充分不必要条件 B.必要不充分条件 C.充分必要条件 D.既不充分也不必要条件

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-2a_n=0$，且$a_1+a_3+a_5=21$，那么$a_3+a_5+a_7=$

A. $\frac{21}{2}$　　B. 33　　C. 42　　D. 84

6.同学们都知道，在需要评委打分的比赛中，为防止极端值对平均分的影响，计算最终平均分的时候，需要去掉最高分和最低分.如果在某次比赛中，$n(n\ge3)$位评委所打分数去掉一个最高分算得平均分记为$\overline{A_1}$，去掉一个最低分算得平均分记为$\overline{A_2}$，同时去掉一个最高分和一个最低分算得平均分记为$\overline{A_3}$，那么$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，$\overline{A_3}$的大小关系为

A. $\overline{A_1}\ge\overline{A_3}\ge\overline{A_2}$　　B. $\overline{A_1}\ge\overline{A_2}\ge\overline{A_3}$　　C. $\overline{A_2}\ge\overline{A_1}\ge\overline{A_3}$　　D. $\overline{A_2}\ge\overline{A_3}\ge\overline{A_1}$

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f'(x_1)<f'(x_2)$ 则 x_1， x_2 的大小关系不可能为

A. $0<x_1<x_2$　　B. $0<x_2<x_1$　　C. $x_1<0<x_2$　　D. $x_2<0<x_1$

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，首项 $a_1=-24$. 若当且仅当 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，则 d 的取值可能是

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

9. 已知 $a>0$，$b>0$. 若 2 是 2^a 与 2^b 的等比中项，则 a^2+b^2 的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

10. 某同学解答一道导数题：“已知函数 $f(x)=\sin x$，曲线 $y=f(x)$ 在点(0，0)处的切线为 l. 求证：直线 l 在点(0，0)处穿过函数 $f(x)$ 的图象. ”

该同学证明过程如下：

证明：因为 $f(x)=\sin x$，
所以 $f'(x)=\cos x$.
所以 $f'(0)=1$.
所以曲线 $y=f(x)$ 在点(0，0)处的切线方程为 $y=x$.
若想证直线 l 在点(0，0)处穿过函数 $f(x)$ 的图象，
只需证 $g(x)=f(x)-x=\sin x-x$ 在 $x=0$ 两侧附近的函数值异号.
由于 $g'(x)=\cos x-1\le 0$，
所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 附近单调递减.
因为 $g(0)=0$，
所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 两侧附近的函数值异号.
也就是直线 l 在点(0，0)处穿过函数 $f(x)$ 的图象.

参考该同学解答上述问题的过程，请你解答下面问题：

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线为 l. 若 l 在点 P 处穿过函数 $f(x)$ 的图象, 则 a 的值为

A. 3　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 0　　D. −3

第二部分(非选择题共 60 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 已知 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$_______.

12. 不等式 $x(1-x)>0$ 的解集为_______.

13. 已知函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$，$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上的平均变化率分别为，k_1，k_2，那么 k_1，k_2 的大小关系为_______.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=2^n-cn$ （$n\geqslant1$，$n\in N^*$），且 $a_3=7$，则首项 a_1 的值是_______.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BD_1 与平面 A_1C_1D 所成角的大小为_______.

16. 有边长为 1 的正方形，取其对角线的一半作边，构成新的正方形，再取新正方形对角线的一半作边，构成正方形……如此形成一个边长不断缩小的正方形系列.

（1）从原始的正方形开始计数，到第 2 次构成新正方形时，共有 3 个正方形，第 3 个正方形的边长为_______；

（2）如果将这一过程延续下去，记前 n 个正方形面积的和为 S_n. 若 $\forall n\in N^*$，$S_n<m$，则整数 m 的最小值为_______.

三、解答题共 4 小题，共 36 分解应写出文学说明，演算步骤或证明过程

17. (本小题共 9 分)

已知函数 $f(x)=e^x-x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. （本小题共 9 分）

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=2$，$2a_1+a_3=5$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2a_n+2^{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

19.（本小题共 9 分）

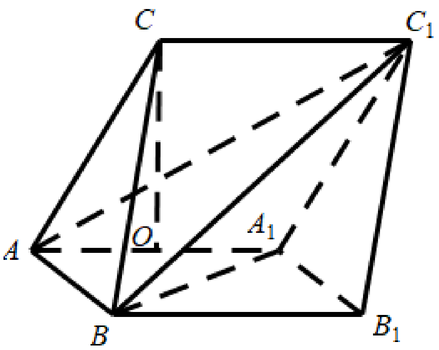
如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$平面 ABB_1A_1， $AC=AB=AA_1=2$.

$\angle CAA_1=\angle BAA_1=60^\circ$ ， O 为 AA_1 的中点.

（1）求证：$OC\perp$平面 ABB_1A_1；

（2）求证：直线 AB 与 A_1C_1 不垂直；

（3）求二面角 A_1-AB-C_1 的余弦值.



20.（本小题共 9 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+1$， $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（1）令函数 $g(x)=f(x)+f'(x)$，求 $g(x)$ 的最小值；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)f'(x)=a$ 恰有两个不同的实根 x_1， x_2.

（i）写出实数 a 的取值范围(不需要证明)；

（ii）证明：$|x_2-x_1|>\frac{1}{a}-1$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）