山东普高大联考 11 月联合质量测评

高三数学答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　2. C　3. B　4. C　5. D　6. B　7. C　8. D

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AC　10. AD　11. AC　12. BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0　14. $\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x$（答案不唯一）　15. -44　16. $(1-e^4, e^4-1)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 由条件可得 $\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\angle BAC}$，

由正弦定理得 $\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}$，$\therefore \sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　2 分

由题意，$\frac{\pi}{2}<\angle ABC<\pi$，$\therefore \angle ABC=\frac{2\pi}{3}$；　3 分

(2) 因为 $\frac{BC}{BA}=\frac{CO}{AO}$，所以 BO 是 $\angle ABC$ 的平分线.　4 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

$\therefore 28=4+BC^2-4BC\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得 $BC=4$，　6 分

由题意，$\angle DBC=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBC=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}BD=3\sqrt{3}$，

$\therefore BD=3$，　8 分

在 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理得：

$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$，

$\therefore CD=\sqrt{13}$.　10 分

18. 解：(1) 因为 $f'(x)=-3+\frac{1}{x}(x>0)$，　1 分

所以切线斜率为 $f'(1)=-2$，切点为 $(1,-3)$，　3 分

故所求切线方程为 $y-(-3)=-2(x-1)$，即 $2x+y+1=0$.　4 分

(2) 方法一：分离变量

由 $f(x)\leqslant ax^2-3x$ 得 $a\geqslant\frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，　6 分

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}(x>0)$，则 $a\geqslant g(x)_{max}$，

$g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，当 $g'(x)=0$ 时，$x=\sqrt{e}$，即：$g'(\sqrt{e})=0$，　8 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\sqrt{e}$ 时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，　10 分

故当 $x=\sqrt{e}$ 时，$g(x)$ 取最大值为 $\frac{1}{2e}$，　11 分

故 $a\geqslant\frac{1}{2e}$，即 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$.　12 分

方法二：分类讨论

由 $f(x)\leqslant ax^2-3x$ 得 $ax^2-\ln x\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $g(x)=ax^2-\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}$，　5 分

①当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)\leqslant0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g(1)=a\leqslant0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<0$，不合题意；　7 分

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，　8 分

令 $g'(x)>0$ 得 $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$，令 $g'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增，　10 分

故当 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时，$g(x)$ 取最小值 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}\geqslant0$，　11 分

故 $a\geqslant\frac{1}{2e}$，即 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$，

综上所述，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$.　12 分

19. 解：(1) 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}[n^2+n-(n-1)^2-(n-1)]=n$ 　2 分

当 $n=1$ 时也成立，所以 $a_n=n$； 　4 分

(2) 由(1)知，$b_n=3^n-1$， 　5 分

$c_n=\frac{3^{n+1}}{(3^n-1)\cdot(3^{n+1}-1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$ 　7 分

$\therefore c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^1-1}-\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$

$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{2(3^{n+1}-1)}$， 　10 分

$\because \frac{3}{2(3^{n+1}-1)}>0$，$\therefore \frac{3}{4}-\frac{3}{2(3^{n+1}-1)}<\frac{3}{4}$，即 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{3}{4}$. 　12 分

20. 解：(1) 因为 $DF//BC$，$DF\not\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $DF//$ 平面 ABC，

在正方形 $ACDE$ 中，$DE//AC$，$DE\not\subset$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $DE//$ 平面 ABC.

因为 $DE\cap DF=D$，DE、$DF\subset$ 平面 DEF，

所以平面 $DEF//$ 平面 ABC.

因为 $AE\perp$ 平面 ABC，所以 $AE\perp$ 平面 DEF. 　2 分

因为 $EF\subset$ 平面 DEF，所以 $AE\perp EF$. 　3 分

因为 $AE//CD$，所以 $EF\perp CD$.

由题意知，$DE=2$，$EF=DF=\sqrt{2}$，则 $DE^2=EF^2+DF^2$，所以 $EF\perp DF$. 　4 分

因为 $CD\cap DF=D$，CD、$DF\subset$ 平面 $BCDF$，

所以 $EF\perp$ 平面 $BCDF$. 　5 分

又 $EF\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BCDF\perp$ 平面 BEF. 　6 分

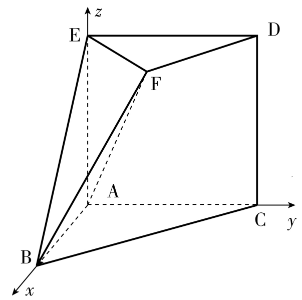
(2) 因为 $AB\perp AC$，$AE\perp$ 平面 ABC

所以以 A 为原点，以 AB，AC，AE 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$E(0,0,2)$，$F(1,1,2)$， 　7 分

则 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,2)$. 　8 分

设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 ABF 的法向量，

则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，



$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，即 $\begin{cases}2x_1=0,\\-x_1+y_1+2z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=2$，

则 $\overrightarrow{n_1}=(0,2,-1)$ 为平面 ABF 的一个法向量. 　9 分

设 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 BEF 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_2+2z_2=0,\\-x_2+y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$，

则 $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)$ 为平面 BEF 的一个法向量， 　10 分

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{-3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以平面 ABF 与平面 EBF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 　12 分

21. 解：(1) 设该地区从 2023 年开始的年非环保垃圾排放量构成数列 $\{a_n\}$.

当 $n\leqslant 5$ 时，$\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=100-10=90$，公差为 -10 的等差数列，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=90-10(n-1)=100-10n$； 　2 分

当 $n\geqslant 6$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是以 a_6 为首项，公比为 $\frac{4}{5}$ 的等比数列，

所以 $a_n=50\times(\frac{4}{5})^{n-5}$， 　4 分

所以，该地区从 2023 年开始的年非环保垃圾排放量的表达式为

$a_n=\begin{cases}100-10n, 1\leqslant n\leqslant 5,\\50\times(\frac{4}{5})^{n-5}, n\geqslant 6.\end{cases}$ 　5 分

(2) S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $M_n=\frac{S_n}{n}$. 　6 分

由于 $M_{n+1}-M_n=\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}$

$=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=\frac{(a_{n+1}-a_1)+(a_{n+1}-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)}{n(n+1)}$ 　8 分

由(1)知，$1\leqslant n\leqslant 5$ 时，$a_n=100-10n$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列， 　9 分

$n\geqslant 6$ 时，$a_n=50\times(\frac{4}{5})^{n-5}$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列， 　10 分

且 $a_6<a_5$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列， 11 分

于是 $a_{n+1}-a_1<0, a_{n+1}-a_2<0, \cdots, a_{n+1}-a_n<0$，因此 $M_{n+1}-M_n<0$，

所以数列 $\{M_n\}$ 为递减数列.

所以认为治理措施有效. 12 分

22. 解：(1) $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立等价于 $e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$ 恒成立，

构造函数 $h(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$h'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$， 2 分

①当 $-\frac{\pi}{4}<x<0$ 时，$0<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，$1<\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$，$e^x<1$，

所以 $h'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ 上递减. 3 分

②当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，$-1<\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，$e^x\geqslant e^0=1$，

所以 $h'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增. 4 分

③当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$e^x>e^1>\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，

所以 $h'(x)=e^x-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上递增. 5 分

所以 $h(x)\geqslant h(0)=e^0-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=0$，

即 $h(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$，$f(x)\geqslant g(x)$. 6 分

(2) 当 $x>-\frac{\pi}{4}$ 时，不等式 $f(x)+g(x)\geqslant 2ax+4(a\in R)$ 恒成立，

即 $x>-\frac{\pi}{4}$ 时，不等式 $e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-ax\geqslant 0(a\in R)$ 恒成立， 7 分

构造函数 $M(x)=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-ax\left(x>-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $M(x)\geqslant 0$，

由于 $M(x)\geqslant 0$ 且 $M(0)=0$，所以当 $x=0$ 时，$M(x)$ 取得最小值，

由于 $M(x)$ 是可导函数，且 $M'(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a$，

则 $x=0$ 是函数 $M(x)$ 的极小值点，

所以 $M'(0)=e^0+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-a=2-a=0$，解得 $a=2$. 8 分

下面证明当 $a=2$ 时，$x=0$ 为 $M(x)$ 的极小值点：

此时 $M(x)=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-2x\left(x>-\frac{\pi}{4}\right)$，

$M'(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$，

令 $N(x)=M'(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$，

$N'(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

由(1)可知，当 $x>-\frac{\pi}{4}$ 时，$N'(x)=e^x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$，

所以 $N(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},+\infty\right)$ 上递增， 9 分

$N(0)=M'(0)=e^0+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-2=0$，

所以在区间 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，$M'(x)<0$，$M(x)$ 递减；

在区间 $(0,+\infty)$，$M'(x)>0$，$M(x)$ 递增， 10 分

所以 $x=0$ 是 $M(x)$ 的极小值点，符合题意. 11 分

所以 a 的取值集合是 $\{2\}$. 12 分