河北省高三年级 2 月联考
数　　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{x\mid x^2<4,x\in U\}$，则 $\complement_U A=$

A. $\{3\}$　　B. $\{-2,2\}$

C. $\{-2,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2^x-1, & x\geq 0,\\ \log_2|x|+1, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(1))=$

A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. -1

3. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的斜率为 2，焦距为 $2\sqrt{5}$，则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设 $p:x^2-x-6<0$，$q:(x+2)\cdot|x-5|<0$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知定义在 $[-1,3]$ 上的函数 $f(x)$ 满足对于任意的 $x_1,x_2\in[-1,3]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$，则不等式 $f(1-2x)\geq f(x+1)$ 的解集为

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,1]$

C. $[-1,0]$　　D. $[0,+\infty)$

6. 某校举行校园歌手大赛，5 名参赛选手的得分分别是 9，8.7，9.3，x，y. 已知这 5 名参赛选手的得分的平均数为 9，方差为 0.1，则 $|x-y|=$

A. 0.5　　B. 0.6

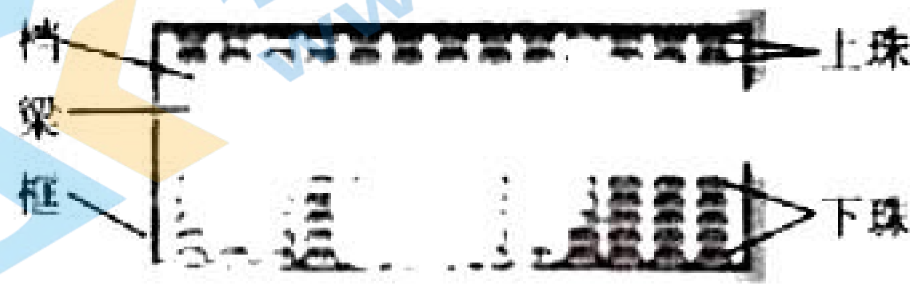
C. 0.7　　D. 0.8

7. 已知半径为 1 的球 O 的球面上有三点 A,B,C，且 $AB=\sqrt{2}$，$\angle ACB=60°$，则球面上的点到平面 ABC 的距离的最大值为

A. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{6-\sqrt{30}}{6}$　　D. $\dfrac{6+\sqrt{30}}{6}$

8. 算盘起源于中国,迄今已有 2600 多年的历史,是中国古代的一项伟大的发明. 在阿拉伯数字出现前,算盘是世界广为使用的计算工具. 下图展示的是一把算盘的初始状态,自右向左分别表示个位、十位、百位、千位、……,上面一粒珠子(简称上珠)代表 5,下面一粒珠子(简称下珠)代表 1,五粒下珠的大小等于同组一粒上珠的大小. 例如,个位拨动一粒上珠,十位拨动一粒下珠至梁上,表示数字 15. 现将算盘的个位、十位、百位、千位分别随机拨动一粒珠子至梁上,设事件 A 为"表示的四位数至多含 2 个数字 5",则 $P(A)=$



A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{11}{16}$　　D. $\frac{3}{4}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{1-i}=3i$,且 $|z+a|=5$,则实数 a 的值可以是

A. -1　　B. 1　　C. -7　　D. 7

10. 已知函数 $f(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$,将 $f(x)$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到 $g(x)$ 的图象,则

A. $g(x)$ 是偶函数

B. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},0)(k\in \mathbf{Z})$ 对称

C. $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增

D. $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$ 上的值域是 $[-\sqrt{3},1]$

11. 已知抛物线 $C:y^2=-4x$ 的焦点为 F,准线与 x 轴的交点为 D,过点 D 且斜率为 k 的直线 l 与 C 相交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,则

A. $0<k<2$

B. 直线 AF,BF 可能垂直

C. $y_1y_2=2x_1x_2$

D. 当 $k=\frac{2}{3}$ 时,$\triangle ABF$ 的面积为 $2\sqrt{5}$

12. 已知 $\frac{\ln x}{x}-2^{y-1}<\frac{\ln(y-1)}{y-1}-2^x(0<x<e,1<y<e+1)$,下面结论正确的是

A. $e^{x-y+1}<1$　　B. $e^{x-y}>\frac{1}{2}$

C. $\ln|x-y|<0$　　D. $\ln|x-y|>0$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(t-8,t)$,$\boldsymbol{b}=(3,1)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $t=$ ___▲___.

14. 已知直线 $l:2x-y-2=0$ 被圆 $C:x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $m=$ ___▲___.

15. 已知 $a>-1$,$ab+b=4$,则 $a+b$ 的最小值为 ___▲___.

16. 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在平面 BC_1D 上运动，则 $|A_1P|+|D_1P|$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $4S_n=a_n^2+2a_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{a_n(a_n+2)}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\dfrac{1}{4}$.

18.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\cos C+2b\cos B+c\cos A=0$.

（1）求 B；

（2）若 $b=3$，D 是 AC 边上一点，且 $BD=CD=1$，求$\triangle ABC$ 的面积.

19.（12 分）

小明是一名篮球运动爱好者，为提高篮球水平，决定在假期针对篮球运动的五个基本技术：运球、传球、带球过人、对抗和投篮进行训练. 假设小明每天只训练一项，为增加趣味性，计划每天(从第二天起)都是从前一天未训练的四个项目中等可能地随机选一项训练.

（1）求小明第一天训练未选择“带球过人”且第三天训练的是“带球过人”的概率；

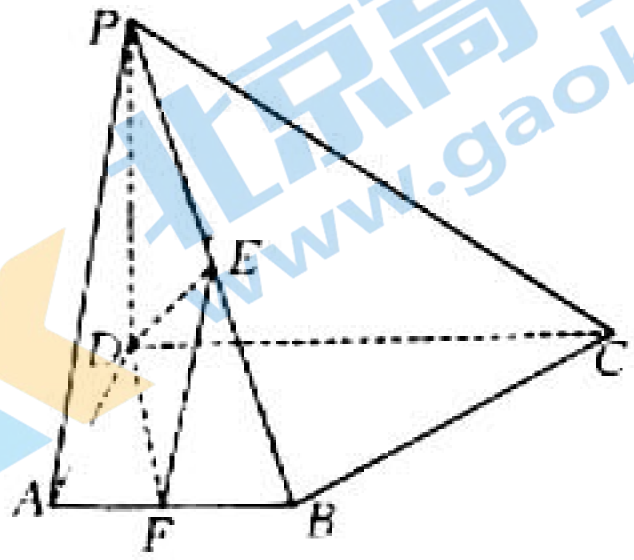
（2）若小明仅进行了七天训练，五个项目均有训练，且第一天训练的是“投篮”，第二天训练的是“运球”，且后面还有训练“投篮”. 设变量 X 为七天训练中“投篮”项训练的天数减去“运球”项训练的天数，求 X 的分布列及数学期望.

20.(12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是直角梯形,$AD\perp AB$,$AB/\!/CD$,$PB=CD=2AB=2AD$,$PD=\sqrt{2}AB$,$PC\perp DE$,E 是棱 PB 的中点.

(1)证明:$PD\perp$平面 $ABCD$.

(2)若$AF=\lambda AB$,求平面 DEF 与平面 PAD 夹角的余弦值的最大值.



1.(12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,E 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,斜率为 k 的直线 l 过 E 的左焦点,且直线 l 与椭圆 E 相交于 A,B 两点.

(1)若 $k=1$, $|AB|=\frac{8}{3}$,求椭圆 E 的标准方程;

(2)若$\frac{|AF_2|}{|AF_1|}=5$,$\frac{|BF_2|}{|BF_1|}=\frac{1}{2}$,$k<0$,求 k 的值.

2.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax+e^2-7$.

(1)当 $a=2$ 时,求曲线 $y=f(x)$在 $x=2$ 处的切线方程;

(2)若对任意的 $x\geqslant 0$,$f(x)\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 恒成立,求 a 的取值范围.

河北省高三年级2月联考

数学参考答案

1. C　因为 $A=\{-1,0,1\}$，所以 $\complement_U A=\{-2,2,3\}$.

2. B　由题意可得 $f(1)=1-2-1=-2$，则 $f(f(1))=f(-2)=2$.

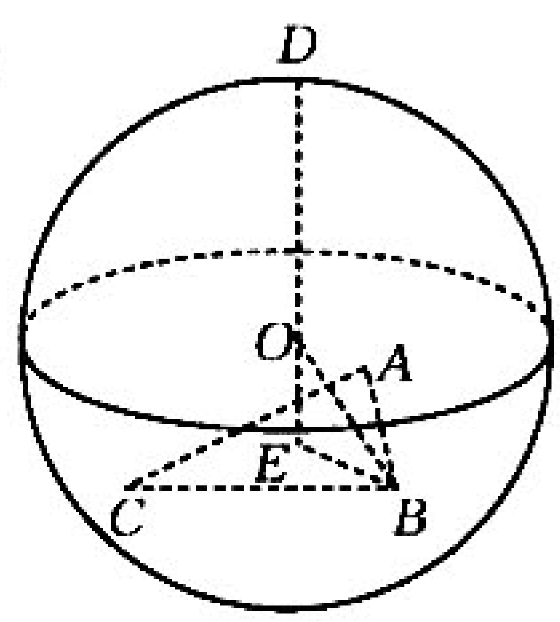
3. A　因为 $\frac{b}{a}=2$，$2c=2\sqrt{5}$，所以 $b=2a$，$c=\sqrt{5}$，由 $a^2+b^2=c^2$，得 $5a^2=5$，解得 $a=1$.

4. D　由 $x^2-x-6<0$ 得 $-2<x<3$，即 p：$-2<x<3$，q：$x<-2$，所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

5. B　由题意知 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}-1\leq 1-2x\leq 3,\\ -1\leq x+1\leq 3,\\ 1-2x<x+1,\end{cases}$ 解得 $0<x\leq 1$.

6. D　由题意可得 $\begin{cases}9+8.7+9.3+x+y=9\times 5,\\ 0+0.3^2+0.3^2+(x-9)^2+(y-9)^2=0.1\times 5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=18,\\ x^2+y^2=162.32,\end{cases}$ 则 $2xy=161.68$，从而 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=0.64$，故 $|x-y|=0.8$.

7. A　如图，作 $OE\perp$ 平面 ABC，垂足为 E，连接 OB，BE，则 $BO=1$，BE 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 因为 $AB=\sqrt{2}$，$\angle ACB=60^\circ$，由正弦定理得 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 延长 EO 交球于点 D，则点 D 到平面 ABC 的距离最大，最大距离为 $OD+OE=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$.



8. C　现将算盘的个位、十位、百位、千位分别随机拨动一粒珠子至梁上，每个珠子有两种情况：1和5，所以共有 $2^4=16$ 种情况. 其中四位数含2个数字5的有1155，1515，1551，5511，5115，5151，共6种；四位数含1个数字5的有1115，1151，1511，5111，共4种；四位数不含数字5的有1111，共1种. 所以 $P(A)=\frac{11}{16}$.

9. BC　因为 $z=3i(1-i)=3+3i$，所以 $z+a=3+a+3i$，由 $|z+a|=5$ 得 $a+3=4$ 或 $a+3=-4$，解得 $a=1$ 或 $a=-7$.

10. BC　由题意可得 $g(x)=2\cos[2(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，则A错误. 令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，则B正确. 令 $2k\pi-\pi\leq 2x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$x\in[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$. 因为 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]\subsetneqq[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$，所以 $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，则C正确. 当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$，则 $2\cos(2x+\frac{\pi}{3})\in[-\sqrt{3},2]$，故D错误.

11. BD　直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，联立方程组得 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $ky^2-4y+4k=0$. 因为直线 l 与 C 相交，所以 $\Delta=16-16k^2>0$，解得 $-1<k<1$，且 $k\neq 0$，A错误；因为 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=4$，$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，所以 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=x_1x_2+y_1y_2-x_1-x_2+1=8-\frac{4}{k^2}$，当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，B正确；由以上知 $y_1y_2=4$，$x_1x_2=1$，可知C错误；当 $k=\frac{2}{3}$ 时，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times|DF|\times|y_1-y_2|=\sqrt{(\frac{4}{k})^2-16}=2\sqrt{5}$，D正确.

12. AD　将原不等式变形得 $\frac{\ln x}{x}+2^x<\frac{\ln(y-1)}{y-1}+2^{y-1}$，设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<e)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，可知 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，所以函数 $y=\frac{\ln x}{x}+2^x$ 在 $(0,e)$ 上也单调递增，所以 $x<y-1$，即 $x-y+1<0$，A 正确. 因为 $x-y<-1$，所以 $e^{x-y}<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，B 错误. 由 $x-y<-1$，得 $|x-y|>1$，所以 C 错误，D 正确.

13. 6　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $3t-24+t=0$，解得 $t=6$.

14. 4　由题意可得圆 C 的圆心 $C(1,-2)$，半径 $r=\sqrt{5-m}$，则 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为直线 l 被圆 C 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $2\sqrt{5-m-\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $m=4$.

15. 3　因为 $ab+b=4$，所以 $b=\frac{4}{a+1}$，所以 $a+b=a+1+\frac{4}{a+1}-1\geq 2\sqrt{4}-1=3$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立.

16. $\sqrt{33}$　因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，所以 $A_1C\perp$ 平面 BC_1D. 设 A_1C 与平面 BC_1D 的交点为 M，则 $\overrightarrow{A_1M}=2\overrightarrow{MC}$. 以点 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系(图略)，因为 $AB=3$，所以 $M(2,2,1)$，则 A_1 关于平面 BC_1D 对称的点 $Q(4,4,-1)$，故 $|A_1P|+|D_1P|=|PQ|+|D_1P|\geq|D_1Q|=\sqrt{33}$.

17. (1)解：由 $4S_n=a_n^2+2a_n$，得 $4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}(n\geq2)$，两式相减得 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，…… 2 分

整理可得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. …… 3 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq2)$. …… 4 分

在 $4S_n=a_n^2+2a_n$ 中，令 $n=1$，可得 $a_1=2$， …… 5 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=2n$. …… 6 分

(2)证明：由(1)知 $b_n=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， …… 8 分

所以 $T_n=\frac{1}{4}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$，

即 $T_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n+1})$， …… 9 分

因为 $\frac{1}{n+1}>0$，所以 $T_n<\frac{1}{4}$. …… 10 分

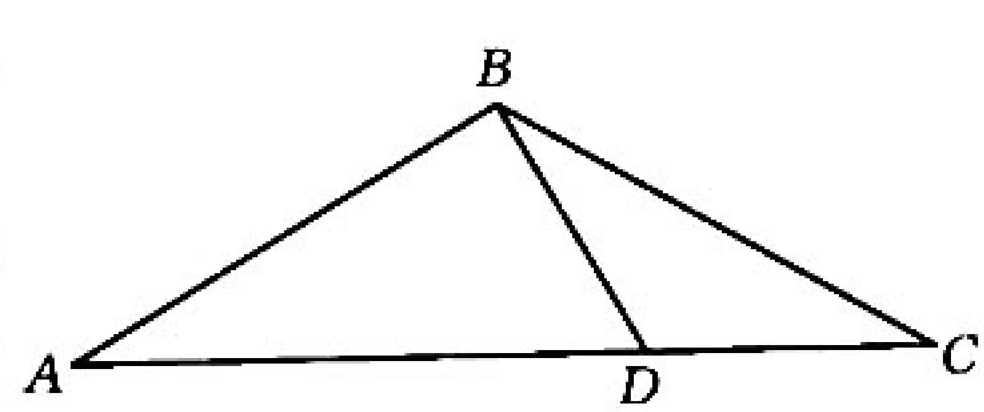
18. 解：(1)因为 $a\cos C+c\cos A+2b\cos B=0$，

所以 $\sin A\cos C+\cos A\sin C+2\sin B\cos B=0$，即 $\sin(A+C)=-2\sin B\cos B$. …… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+C)=\sin B=-2\sin B\cos B$， …… 4 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，解得 $B=\frac{2\pi}{3}$. …… 5 分

(2)因为 $b=3$，$BD=CD=1$，所以 $AD=2$. …… 6 分



设 $\angle ADB=\alpha$，则 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\alpha$，$BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cos(\pi-\alpha)$， …… 8 分

整理得 $c^2=5-4\cos\alpha$，$a^2=2+2\cos\alpha$，所以 $2a^2+c^2=9$. …… 9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}$，即 $9=a^2+c^2+ac$， …… 10 分

所以 $9=a^2+c^2+ac=2a^2+c^2$，解得 $a=c=\sqrt{3}$， …… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. …… 12 分

19. 解:(1)小明第一天训练未选择"带球过人",且第三天训练的是"带球过人"的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$. ·· 4 分

(2)由题意知"投篮"项最多训练 3 天,所以 X 的可能取值为 0,1,2.

$X=0$ 即"2 天投篮 2 天运球",有 $C_4^1A_4^4=96$ 种情形, ······························ 5 分

$X=1$ 即"2 天投篮 1 天运球",有 $C_3^1A_3^3C_4^2=108$ 种情形, ······························ 7 分

$X=2$ 即"3 天投篮 1 天运球",有 $A_3^3C_4^2=36$ 种情形, ······························ 8 分

所以 $P(X=0)=\frac{96}{96+108+36}=\frac{2}{5}$, $P(X=1)=\frac{108}{96+108+36}=\frac{9}{20}$,

$P(X=2)=\frac{36}{96+108+36}=\frac{3}{20}$. ······························ 10 分

X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$

·· 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{3}{20}=\frac{3}{4}$. ······························ 12 分

20. (1)证明:连接 BD.

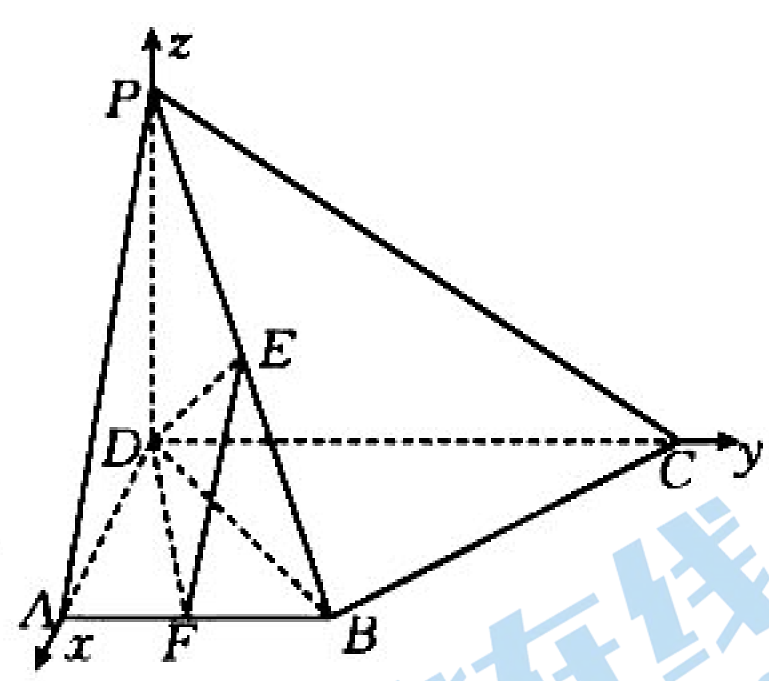
因为 $AB=AD$,且 $AB\perp AD$,所以 $BD=\sqrt{2}AB$.

因为 $PD=\sqrt{2}AB$,所以 $PD=BD$.

因为 E 是棱 PB 的中点,所以 $DE\perp PB$.

因为 $DE\perp PC$, $PC,PB\subset$平面 PBC,且 $PC\cap PB=P$,所以 $DE\perp$平面 PBC.

因为 $BC\subset$平面 PBC,所以 $DE\perp BC$. ······························ 2 分



由题意可得 $BC=BD=\sqrt{2}AB$,则 $BC^2+BD^2=CD^2$,故 $BC\perp BD$.

因为 $BD,DE\subset$平面 PBD,且 $BD\cap DE=D$,所以 $BC\perp$平面 PBD.

因为 $PD\subset$平面 PBD,所以 $BC\perp PD$. ······························ 4 分

因为 $PD=BD=\sqrt{2}AB$, $PB=2AB$,所以 $PB^2=PD^2+BD^2$,所以 $PD\perp BD$. ······························ 5 分

因为 $BD,BC\subset$平面 $ABCD$,且 $BD\cap BC=B$,所以 $PD\perp$平面 $ABCD$. ······························ 6 分

(2)解:以 D 为坐标原点,分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.设 $AB=2$,则 $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $D(0,0,0)$, $E(1,1,\sqrt{2})$, $P(0,0,2\sqrt{2})$.

从而 $\overrightarrow{DE}=(1,1,\sqrt{2})$, $\overrightarrow{PA}=(2,0,-2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{PB}=(2,2,-2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$.

因为 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}=(0,2\lambda,0)$,所以 $F(2,2\lambda,0)$,所以 $\overrightarrow{DF}=(2,2\lambda,0)$. ······························ 8 分

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x+y+\sqrt{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=2x+2\lambda y=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{2}\lambda$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}\lambda,-\sqrt{2},1-\lambda)$. ······························ 9 分

平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$, ······························ 10 分

设平面 DEF 与平面 PAD 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}$.

因为 $3\lambda^2-2\lambda+3=3(\lambda-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}\geq\frac{8}{3}$,所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+3}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$. ······························ 12 分

21. 解:(1)因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $a=\sqrt{2}c$,由 $a^2=b^2+c^2$,得 $b=c=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. ······························ 1 分

因为 $F_1(-c,0)$，$k=1$，所以直线 l 的方程为 $y=x+\frac{\sqrt{2}a}{2}$， …………………………………… 2分

将直线方程代入椭圆方程 $x^2+2y^2=a^2$ 并整理得 $3x^2+2\sqrt{2}ax=0$． …………………………… 3分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{2}a}{3}$，$x_1x_2=0$． …………………………………… 4分

所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4a}{3}=\frac{8}{3}$，解得 $a=2$． …………………… 5分

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． ………………………………………………………… 6分

(2)由(1)易得直线 l 的方程为 $y=k(x+\frac{\sqrt{2}a}{2})$，椭圆 E 的方程为 $x^2+2y^2=a^2$， ………………………… 7分

将直线方程代入椭圆方程并整理得 $(1+2k^2)x^2+2\sqrt{2}k^2ax+(k^2-1)a^2=0$． ………………………… 8分

由条件得，$|AF_2|=5|AF_1|$，$|BF_1|=2|BF_2|$，

又因为 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，

可得 $|AF_1|=\frac{a}{3}$，$|BF_1|=\frac{4a}{3}$，所以 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|=\frac{5a}{3}$． ……………………………… 9分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{2}k^2a}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{(k^2-1)a^2}{1+2k^2}$， …………………………… 10分

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\frac{2\sqrt{2}k^2a}{1+2k^2})^2-\frac{4(k^2-1)a^2}{1+2k^2}}=\frac{2(1+k^2)a}{1+2k^2}=\frac{5a}{3}$， ………………… 11分

整理得 $4k^2=1$，又因为 $k<0$，所以 $k=-\frac{1}{2}$． ……………………………………………… 12分

22．解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-2x+e^2-7$，则 $f'(x)=e^x-2$， …………………………………… 1分

从而 $f(2)=2e^2-11$，$f'(2)=e^2-2$， …………………………………………………………………… 2分

故所求切线方程为 $y-(2e^2-11)=(e^2-2)(x-2)$，即 $y=(e^2-2)x-7$． ………………………………… 4分

(2)对任意的 $x\geqslant0$，$f(x)\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 恒成立等价于对任意的 $x\geqslant0$，$e^x-ax+e^2-7\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 恒成立．

①当 $x=0$ 时，$e^2-6\geqslant0$ 显然成立． …………………………………………………………………… 5分

②当 $x>0$ 时，不等式 $e^x-ax+e^2-7\geqslant\frac{7}{4}x^2$ 等价于 $4a\leqslant\frac{4e^x-7x^2+4e^2-28}{x}$．

设 $g(x)=\frac{4e^x-7x^2+4e^2-28}{x}$，则 $g'(x)=\frac{4(x-1)e^x-7x^2-4e^2+28}{x^2}$． ………………………………… 6分

设 $h(x)=4(x-1)e^x-7x^2-4e^2+28$，则 $h'(x)=4xe^x-14x=2x(2e^x-7)$． ……………………………… 7分

当 $x\in(0,\ln\frac{7}{2})$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(\ln\frac{7}{2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,\ln\frac{7}{2})$ 上单调递减，在 $(\ln\frac{7}{2},+\infty)$ 上单调递增． …………………………………… 8分

因为 $h(0)=4(6-e^2)<0$，所以 $h(\ln\frac{7}{2})<0$，且 $h(2)=0$， ………………………………………………… 9分

则当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增．

则 $g(x)_{\min}=g(2)=4e^2-28$． ……………………………………………………………………………… 11分

故 $a\leqslant e^2-7$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,e^2-7]$． ………………………………………………………… 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯