2023 北京五中高三 3 月月考

数　　学

一、选择题：共 10 题，每题 4 分，共 40 分．在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 设集合 $A=\{1，2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 8

2. 设复数 z 满足 $\dfrac{z}{1-\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$，则它的共轭复数 $\overline{z}$ 的虚部为（　）.

A. -1　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

3. 双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 过点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，且离心率为 $\sqrt{2}$，则该双曲线的标准方程为（　）

A. $x^2-y^2=1$　　B. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

C. $y^2-x^2=1$　　D. $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　）

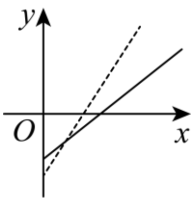
A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

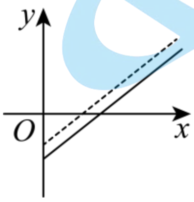
5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，设 $p:d<0$；$q:\{S_n\}$ 是递减数列，则 p 是 q 的（　）.

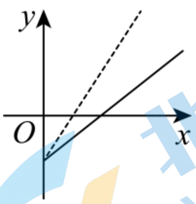
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

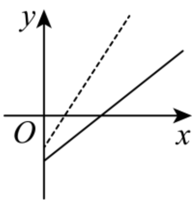
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 图中实线是某景点收支差额 y 关于游客量 x 的图像，由于目前亏损，景点决定降低成本，同时提高门票价格，决策后的图像用虚线表示，以下能说明该事实的是（　）

A.


B.


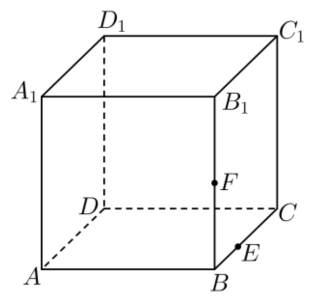
C.


D.


7. P 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点，点 P 到抛物线准线和对称轴的距离分别为 10 和 6，则 $p=$（　）

A. 2　　B. 4　　C. 4 或 9　　D. 2 或 18

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 上的动点，F 为棱 B_1B 的中点，则下列选项正确的是（　）



A. 直线 A_1D_1 与直线 EF 相交

B. 当 E 为棱 BC 上的中点时，则点 E 在平面 AD_1F 的射影是点 F

C. 存在点 E，使得直线 AD_1 与直线 EF 所成角为 30°

D. 三棱锥 $E-ADF$ 的体积为定值

9. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是(　　)

A. -2　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. -1

10. 在平面直角坐标系中，A, B 是直线 $x+y=m$ 上的两点，且 $|AB|=10$.若对于任意点 $P(\cos\theta,\sin\theta)(0\le\theta<2\pi)$，存在 A, B 使 $\angle APB=90^\circ$ 成立，则 m 的最大值为（　）

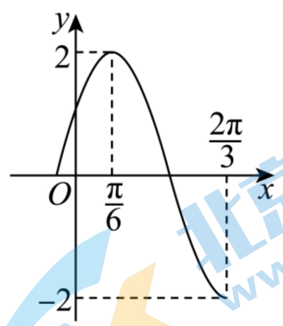
A. $3\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

二、填空题：共 5 题，每题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_2 x}$ 的定义域为______.

12. 设 $(x-1)^{21}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{21}x^{21}$，则 $a_0=$__________；$a_{10}+a_{11}=$__________.

13. 已知函数 f $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A,\omega>0,|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{T}{4}$（T 为 $f(x)$ 的最小正周期）个单位长度得到 $g(x)$ 的图象，则 $g(0)=$______.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, x>0\end{cases}$，若 $a=0$，函数 $f(x)$ 的单调增区间为__________；若 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值，则实数 a 的取值范围为__________.

15. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正整数 T，对于任意正整数 n 都有 $a_{n+T}=a_n$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，周期为 T. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=m(m>0)$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, a_n>1\\ \dfrac{1}{a_n}, 0<a_n\le 1\end{cases}$ 现给出以下命题：

①若 $a_3=4$，则 m 可以取 3 个不同的值

②若 $m=\sqrt{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列

③ $\forall T\in \mathrm{N}^*$ 且 $T\ge 2$，存在 $m>1$，$\{a_n\}$ 是周期为 T 的数列

④ $\exists m\in \mathrm{Q}$ 且 $m\ge 2$，数列 $\{a_n\}$ 是周期数列.其中所有真命题的序号是______.

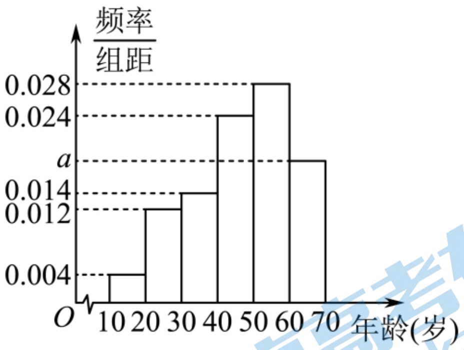
三、解答题：共 6 题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a=2$，$2\sin A=\sin C$.

（1）求 c 的长；

（2）若 $\cos C=\dfrac{1}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 非物质文化遗产（简称“非遗”）是优秀传统文化的重要组成部分，是一个国家和民族历史文化成就的重要标志．随着短视频这一新兴媒介形态的兴起，非遗传播获得广阔的平台，非遗文化迎来了发展的春天．为研究非遗短视频受众的年龄结构，现从各短视频平台随机调查了 1000 名非遗短视频粉丝，记录他们的年龄，将数据分成 6 组：$[10,20),[20,30),[30,40),[40,50),[50,60),[60,70]$，并整理得到如下频率分布直方图：

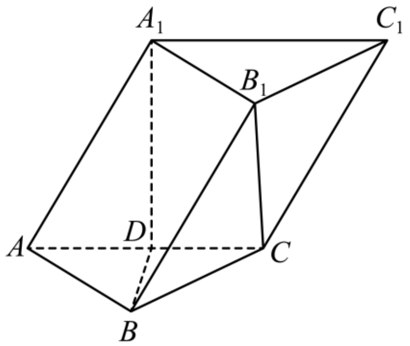


（1）求 a 的值；

（2）从所有非遗短视频粉丝中随机抽取 2 人，记取出的 2 人中年龄不超过 40 岁的人数为 X，用频率估计概率，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$；

（3）在频率分布直方图中，用每一个小矩形底边中点的横坐标作为该组粉丝年龄的平均数，估计非遗短视频粉丝年龄的平均数为 m，若中位数的估计值为 n，写出 m 与 n 的大小关系.（结论不要求证明）

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，侧面 $AA_1C_1C\perp$ 底面 ABC, D 为 AC 中点，$AB=BC=\sqrt{2}, AA_1=\sqrt{5}$.



（1）求证：$BD\perp A_1D$；

（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $A-CC_1-B$ 的余弦值.

条件①：$A_1C_1\perp B_1C$；条件②：$AA_1=B_1C$.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,0)$，其右焦点为 $F(1,0)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 P 为椭圆 C 上一动点（不在 x 轴上），M 为 AP 中点，过原点 O 作 AP 的平行线，与直线 $x=t(t>1)$ 交于点 Q. 问 t 能否为定值，使得 $OM\perp FQ$？若是定值，求出该 t 值；若不是定值，请说明理由.

20. 设函数 $f(x)=x(x^2-3x+a)$，$a\in \mathrm{R}$

（1）当 $a=-9$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为减函数，求 a 的取值范围；

（3）若函数在区间 $(0,2)$ 内存在两个极值点 x_1，x_2，且 $|f(x_1)-f(x_2)|>|f(x_1)+f(x_2)|$，求 a 的取值范围.

21. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数.且对于 $\forall i,j\in \mathbf{N}^*, i<j$，都存在 $k>j$，使得 $a_k=a_ia_j-a_i-a_j$，则称数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P.

（1）判断下列数列是否满足性质 P，并说明理由.

① $a_n=n, n=1,2,3,\cdots$；

② $b_n=n+2, n=1,2,3,\cdots$.

（2）若数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，且 $a_1=1$，求证：集合 $\{n\in \mathbf{N}^* |\ a_n=3\}$ 为无限集；

（3）若周期数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

参考答案

一、选择题：共 10 题，每题 4 分，共 40 分．在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：因为 $A\cup B=\{1,2,3\}$，$A=\{1,2\}$，所以 $B=\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$,故选 C.

考点：并集及其运算；集合的包含关系判断及应用

点评：此题考查了并集及其运算，以及集合的包含关系判断及应用，熟练掌握并集的定义是解本题的关键．

2.【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的四则运算得到 $z=3+\mathrm{i}$，再由共轭复数的概念得到 $\overline{z}=3-\mathrm{i}$，即可判断其虚部.

【详解】解：由复数 z 满足 $\dfrac{z}{1-\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$，可得 $z=(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=3+\mathrm{i}$，

则 $\overline{z}=3-\mathrm{i}$，

所以它的共轭复数 $\overline{z}$ 的虚部为 -1，

故选：A.

3.【答案】C

【解析】

【分析】将点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 代入得出 a,b 关系，由离心率得出 a,c 关系，结合双曲线关系式即可求解.

【详解】将 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 代入双曲线标准方程得 $\dfrac{3}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$，又 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=2$，$c^2=a^2+b^2$，联立解得

$a^2=1,b^2=1$，故双曲线的标准方程为 $y^2-x^2=1$.

故选：C

4.【答案】B

【解析】

【分析】分别求出选项的函数解析式，再利用奇函数的定义即可.

【详解】由题意可得 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$，

对于 A，$f(x-1)-1=\dfrac{2}{x}-2$ 不是奇函数；

对于 B，$f(x-1)+1=\dfrac{2}{x}$ 是奇函数；

对于 C，$f\left(x+1\right)-1=\dfrac{2}{x+2}-2$，定义域不关于原点对称，不是奇函数；

对于 D，$f\left(x+1\right)+1=\dfrac{2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，不是奇函数.

故选：B

【点睛】本题主要考查奇函数定义，考查学生对概念的理解，是一道容易题.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列的前 n 项和以及单调数列的定义分析判断.

【详解】充分性：若 $d<0$，则 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，此时无法判断 a_{n+1} 的正负，

例如 $d=-1,a_1=4$，则 $a_n=4-\left(n-1\right)=5-n$，即 $a_{n+1}=5-\left(n+1\right)=4-n$，

可知当 $n\le 3$ 时，$a_{n+1}>0$；当 $n=4$ 时，$a_{n+1}=0$；当 $n\ge 5$ 时，$a_{n+1}<0$；

故 $d<0$ 无法得出 $\left\{S_n\right\}$ 是递减数列，充分性不成立；

必要性：若 $\left\{S_n\right\}$ 是递减数列，则 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}<0$，

反证：假设 $d>0$，则 $a_{n+1}=a_1+nd$，

当 $n>-\dfrac{a_1}{d}$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{n+1}=a_1+nd>a_1-d\times\dfrac{a_1}{d}=0$，

这与对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}<0$ 相矛盾，故假设不成立；

例如 $d=0,a_1=-1$，则 $a_{n+1}=-1<0$，即 $d=0$ 成立；

例如 $d=-1<0,a_1=0$，则 $a_{n+1}=0-n=-n<0$，即 $d<0$ 成立；

故 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}<0$，此时 $d\le 0$，不能推出 $d<0$，必要性不成立；

综上所述：p 是 q 的既不充分也不必要条件.

故选：D.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据直线的纵截距表示成本，倾斜角与门票价格的关系判断.

【详解】对于 A，当 $x=0$ 时，虚线 y 值减小，说明成本提高了，不满足题意，A 错误；

对于 B，两函数图象平行，说明票价不变，不合题意，B 错误；

对于 C，当 $x=0$ 时，y 值不变，说明成本不变，不满足题意，C 错误；

对于 D，当 $x=0$ 时，虚线 y 值变大，说明成本见减小，又因为虚线的倾斜角变大，

说明提高了门票的价格，符合题意，D 正确，

故选:D.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 可得准线 l 的方程为：$x=-\frac{p}{2}$，设点 $P(x,y)$，再由点 P 到抛物线准线和对称轴的距离分别为 10 和 6，可得 $x+\frac{p}{2}=10$，$y=\pm 6$，再与抛物线方程 $y^2=2px(p>0)$，联立解方程组，即可求解.

【详解】解：由题意可得：抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线 l 的方程为：$x=-\frac{p}{2}$

设点 $P(x,y)$，又因点 P 到抛物线准线和对称轴的距离分别为 10 和 6，

所以有 $\begin{cases} x+\frac{p}{2}=10 \\ y=\pm 6 \\ y^2=2px \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ p=18 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=9 \\ p=2 \end{cases}$，

即 p 的值分别为 18 或 2.

故选：D.

【点睛】本题考查了抛物线的标准方程及其性质，考查理解辨析能力及运算求解能力，属于基础题.

8. 【答案】D

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理可得 $A_1D_1//$ 平面 B_1C_1CB，进而可判断 A；

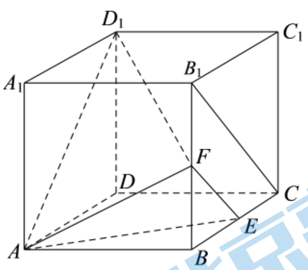
利用勾股定理和反证法即可判断 B；建立如图空间直角坐标系，利用向量法和反证法即可判断 C；根据等体积法即可判断 D.

【详解】A：由题意知，$A_1D_1//B_1C_1$，$B_1C_1\subset$ 平面 B_1C_1CB，$A_1D_1\not\subset$ 平面 B_1C_1CB

所以 $A_1D_1//$ 平面 B_1C_1CB，

又 $EF\subset$ 平面 B_1C_1CB，所以 A_1D_1 与 EF 不相交，故 A 错误；

B：连接 AD_1、D_1F、AF、AE、CB_1，如图，



当点 E 为 BC 的中点时，$EF//CB_1$，又 $AD_1\perp CB_1$，所以 $EF\perp AD_1$，

若点 E 在平面 AD_1F 的射影为 F，则 $EF\perp$ 平面 AD_1F，垂足为 F，

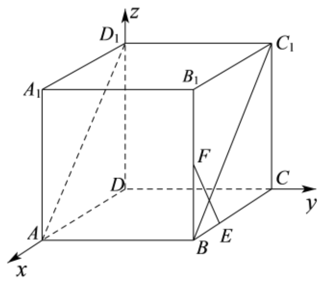
所以 $EF\perp AF$，设正方体的棱长为 2，则 $AE=AF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，

在$\triangle AEF$中，$AF^2+EF^2\neq AE^2$，所以$\angle AFE\neq 90^\circ$，

即$EF\perp AF$不成立，故B错误；

C：建立如图空间直角坐标系$D-xyz$，连接BC_1，则$AD_1//BC_1$，

所以异面直线EF与AD_1所成角为直线EF与BC_1所成角，



设正方体的棱长为2，若存在点$E(a,2,0)(0\leq a\leq 2)$使得EF与BC_1所成角为30°，

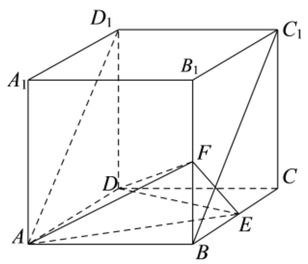
则$B(2,2,0)$，$F(2,2,1)$，$C_1(0,2,2)$，所以$\overrightarrow{EF}=(2-a,0,1),\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，

所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}=2a-2$，又$\left|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}\right|=\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cos 30^\circ$，

得$|2a-2|=2\sqrt{2}\times\sqrt{(2-a)^2+1}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a=4\pm\sqrt{3}$，

不符合题意，故不存在点E使得EF与AD_1所成角为30°，故C错误；

D：如图，



由等体积法可知$V_{E-ADF}=V_{F-ADE}$，

又$V_{F-ADE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ADE}\cdot BF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AD\times AB\times BF$，

AD、AB、BF为定值，所以V_{F-ADE}为定值，

所以三棱锥$E-ADF$的体积为定值，故D正确.

故选：D.

9.【答案】B

【解析】

【分析】根据条件建立坐标系，求出点的坐标，利用坐标法结合向量数量积的公式进行计算即可.

【详解】建立如图所示的坐标系，以BC中点为坐标原点，

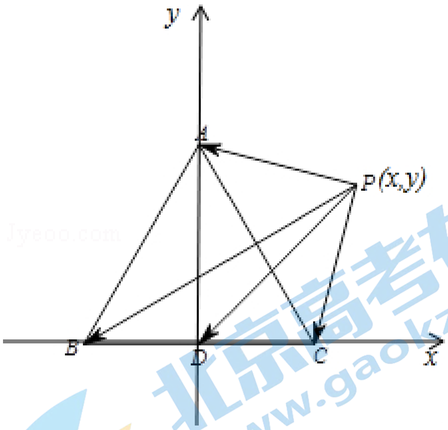
则$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，

则 $\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2\sqrt{3}y+2y^2=2[x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{3}{4}]$

$\therefore$ 当 $x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，取得最小值 $2\times(-\frac{3}{4})=-\frac{3}{2}$，

故选：B.



10.【答案】B

【解析】

【分析】可得 P 是圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点，且需存在 A，B，使点 P 又在以 $|AB|$ 为直径的圆上，故只需满足圆 $x^2+y^2=1$ 上点到直线 $x+y=m$ 的最远距离小于等于 5 即可求出.

【详解】设 $P(x,y)$，则 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$，满足 $x^2+y^2=1$，

则点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

又存在 A，B 使 $\angle APB=90^\circ$ 成立，则点 P 又在以 $|AB|$ 为直径的圆上，

$\because P$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上任意一点，A，B 是直线 $x+y=m$ 上的两点，

则应满足圆 $x^2+y^2=1$ 上点到直线的最远距离小于等于 5，

原点到直线的距离为 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，

则只需满足 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}+1\le 5$，解得 $m\in\left[-4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right]$.

故选：B.

二、填空题：共 5 题，每题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$(0,2]$

【解析】

【分析】根据定义域的求法：$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}\left(g(x)\ge 0\right)$（$n$ 为偶数）、$f(x)=\log_a g(x)\left(g(x)>0\right)$.

【详解】由题意得$\begin{cases}x>0\\1-\log_2 x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\0<x\leq 2\end{cases}\Rightarrow 0<x\leq 2$

【点睛】常见函数定义域的求法：

$f\left(x\right)=\sqrt[n]{g\left(x\right)}\left(g\left(x\right)\geq 0\right)$（$n$为偶数）

$f\left(x\right)=\log_a g\left(x\right)\left(g\left(x\right)>0\right)$

$\dfrac{g\left(x\right)}{f\left(x\right)}\left(f\left(x\right)\neq 0\right)$

12.【答案】 ①. -1 ②. 0

【解析】

【分析】令 $x=0$ 即可求 a_0；利用二项展开式的通项分别求 x^{10} 和 x^{11} 的系数，由组合数得性质即可得 $a_{10}+a_{11}$.

【详解】由题意，令 $x=0$ 可得 $\left(0-1\right)^{21}=a_0$，所以 $a_0=-1$；

$\left(x-1\right)^{21}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_{21}^{r}x^{21-r}\left(-1\right)^{r}$，

令 $21-r=10$，即 $r=11$ 得 $a_{10}=\mathrm{C}_{21}^{11}\left(-1\right)^{11}=-\mathrm{C}_{21}^{11}$，

令 $21-r=11$，即 $r=10$ 得 $a_{11}=\mathrm{C}_{21}^{10}\left(-1\right)^{10}=\mathrm{C}_{21}^{10}$，

所以 $a_{10}+a_{11}=-\mathrm{C}_{21}^{11}+\mathrm{C}_{21}^{10}=0$，

故答案为：-1； 0

13.【答案】$-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据图象求出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，根据图象平移结论求函数 $g\left(x\right)$ 的解析式，再求 $g\left(0\right)$.

【详解】由图可知 $A=2$，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore T=\pi$，$\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$．又 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$，

所以 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，又 $|\varphi|\leq\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore f\left(x\right)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore g\left(x\right)=2\cos\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(2x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore g(0)=2\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

故答案为：$-\sqrt{3}$.

14.【答案】 ①. $(1,+\infty)$ ②. $[0,2]$

【解析】

【分析】由导函数得到函数的单调区间，求出递增区间；分 $a<0$ 与 $a\geq 0$ 两种情况，结合函数单调性，且 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值，列出不等式，求出实数 a 的取值范围.

【详解】$a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2, x\leq 0\\ x+\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$，

当 $x\leq 0$ 时，$f'(x)=2x\leq 0$，故 $f(x)=x^2$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$f'\ x\ >0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $0<x<1$ 时，$f'\ x\ >0$，$f(x)$ 单调递减，

故函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)=(x-a)^2$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在 $(a,0)$ 上单调递增，

故 $f(a)<f(0)$，不满足 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值，舍去；

当 $a\geq 0$ 时，当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=(x-a)^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$f(0)=(0-a)^2=a^2$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$f'\ x\ >0$，当 $0<x<1$ 时，$f'\ x\ >0$，

故 $f(x)=x+\frac{1}{x}+a$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=a+2$，

令 $f(0)\leq f(1)$，即 $a^2-a-2=(a-2)(a+1)\leq 0$，解得 $-1\leq a\leq 2$，

又 $a\geq 0$，所以 $0\leq a\leq 2$，

所以实数 a 的取值范围是 $[0,2]$.

故答案为：$(1,+\infty)$，$[0,2]$

15.【答案】①②③

【解析】

【分析】①若 $a_3=4$，利用 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, a_n>1\\ \frac{1}{a_n}, 0<a_n\leq 1\end{cases}$，分别对 a_2，a_1 讨论即可得出；

②若 $m=\sqrt{2}$，可得 a_2，a_3，a_4，…，可得 $a_{n+3}=a_n$. 即可判断出数列 $\{a_n\}$ 是否为周期数列.

③由①可知正确.

④可用反证法证明不正确.

【详解】解：①若 $a_3=4$，$\because a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, a_n>1\\ \dfrac{1}{a_n}, 0<a_n\le 1\end{cases}$，

$\therefore$ 当 $a_2>1$ 时，$a_2-1=a_3=4$，解得 $a_2=5$．当 $a_1=m>1$ 时，$a_1-1=a_2=5$，解得 $a_1=6$；当 $0<a_1=m<1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}=a_2=5$，解得 $a_1=\dfrac{1}{5}$．

当 $0<a_2<1$ 时，$\dfrac{1}{a_2}=a_3=4$，解得 $a_2=\dfrac{1}{4}$．当 $a_1=m>1$ 时，$a_1-1=a_2=\dfrac{1}{4}$，解得 $a_1=\dfrac{5}{4}$．当 $0<a_1=m<1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}=a_2=\dfrac{1}{4}$，解得 $a_1=4$，此时不符合条件，应舍去.

综上可得：m 可以取 3 个不同的值：6，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{5}{4}$．因此①正确.

②若 $m=\sqrt{2}$，则 $a_2=a_1-1=\sqrt{2}-1$，$\therefore a_3=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，$\therefore a_4=a_3-1=\sqrt{2}$．

…，可得 $a_{n+3}=a_n$．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列，正确.

③对任意的 $T\in N^*$ 且 $T\ge 2$，存在 $m>1$，使得 $\{a_n\}$ 是周期为 T 的数列，由①可知正确.

④假设存在 $m\in Q$ 且 $m\ge 2$，使得数列 $\{a_n\}$ 是周期数列．则当 $m=2$ 时，$a_2=a_1-1=1$，$\therefore$ $a_3=\dfrac{1}{a_2}=1=\ldots=a_n(n\ge 2)$，此时数列 $\{a_n\}$ 不是周期数列.

当 $m>2$ 时，当 $0<m-k\le 1$ 时，$a_{k+1}=a_1-k=m-k$．$\therefore a_{k+2}=\dfrac{1}{a_{k+1}}=\dfrac{1}{m-k}>1$．若 $a_{k+2}=a_i$，$1\le i\le k+1$，则 $\dfrac{1}{m-k}=m-(i-1)$，化为 $m^2-m(k+i-1)+ki-k-1=0$，则 $\Delta=(k+i-1)^2-4(ki-k-1)$ 不为平方数，因此假设不正确．可知④不正确.

综上可知：只有①②③正确.

故答案为：①②③.

【点睛】本题考查了数列的周期性、分类讨论思想方法，考查了推理能力和计算能力，属于难题.

三、解答题：共 6 题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）4　（2）$\sqrt{15}$

【解析】

【分析】（1）根据题意利用正弦定理运算求解；

（2）先利用余弦定理求得 $b=4$，再根据面积公式运算求解.

【小问 1 详解】

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，则 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$，

注意到 $\sin C=2\sin A, a=2$，

故 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{2\times 2\sin A}{\sin A}=4$.

【小问 2 详解】

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $4^2=2^2+b^2-2\times 2\times b\times \dfrac{1}{4}$，

整理得 $b^2-b-12=0$，解得 $b=4$ 或 $b=-3$（舍去），

可知 $b=c>a$，即 $B=C>A$，

且 $\cos C=\dfrac{1}{4}>0$，即 C 为锐角，满足 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

可得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times \dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

17. 【答案】（1） $a=0.018$

（2）分布列详见解析，$E(X)=0.6$

（3） $n>m$

【解析】

【分析】（1）根据频率之和为1求得 a.

（2）根据二项分布的知识求得分布列以及数学期望.

（3）根据平均数、中位数的求法求得 m,n，并比较出两者的大小关系.

【小问 1 详解】

$(0.004+0.012+0.014+0.024+0.028+a)\times 10=1$，

解得 $a=0.018$.

【小问 2 详解】

不超过 40 岁的人的频率为 $(0.004+0.012+0.014)\times 10=0.3$，

所以 $X\sim B(2,0.3)$， X 的可能取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=C_2^0\times 0.3^0\times 0.7^2=0.49$，

$P(X=1)=C_2^1\times 0.3^1\times 0.7^1=0.42$，

$P(X=2)=C_2^2\times 0.3^2\times 0.7^0=0.09$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.49	0.42	0.09

所以 $E(X)=2\times0.3=0.6$.

【小问 3 详解】

$m=15\times0.04+25\times0.12+35\times0.14+45\times0.24+55\times0.28+65\times0.18=46.4$ 岁.

$0.04+0.12+0.14=0.3, 0.04+0.12+0.14+0.24=0.54$,

所以 $n=40+\dfrac{0.2}{0.24}\times10=40+\dfrac{25}{3}=\dfrac{145}{3}>m$.

18.【答案】(1)证明见解析

(2)$\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1)根据面面垂直的性质可得 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C,再根据线面垂直的性质即可得证;

(2)选①,取 A_1C_1 的中点 E,连接 B_1E,CE,证明 $AC\perp A_1D$,再以点 D 为原点,建立空间直角坐标系,利用向量法求解即可.

选②,取 A_1C_1 的中点 E,连接 B_1E,CE,DE,利用勾股定理证明 $AD\perp A_1D$,再以点 D 为原点,建立空间直角坐标系,利用向量法求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $AB=BC$, D 为 AC 中点,

所以 $BD\perp AC$,

又因为面 $AA_1C_1C\perp$ 面 ABC,面 $AA_1C_1C\cap$ 面 $ABC=AC$, $BD\subset$ 面 ABC,

所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C,

又 $A_1D\subset$ 平面 AA_1C_1C,所以 $BD\perp A_1D$;

【小问 2 详解】

选①,取 A_1C_1 的中点 E,连接 B_1E,CE,

则 $A_1E\,//\,DC$ 且 $A_1E=DC$,

所以四边形 A_1DCE 为平行四边形,所以 $A_1D\,//\,CE$,

因为 $A_1B_1=B_1C_1$, E 为 A_1C_1 的中点,

所以 $A_1C_1\perp B_1E$,

又 $A_1C_1\perp B_1C, B_1C\cap B_1E=B_1, B_1C, B_1E\subset$ 平面 CB_1E,

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 CB_1E,

又 $AC\,//\,A_1C_1$,所以 $AC\perp$ 平面 CB_1E,

又 $CE \subset$ 平面 CB_1E，所以 $AC \perp CE$，

因为 $A_1D \parallel CE$，所以 $AC \perp A_1D$，

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，

由 $AB = BC = \sqrt{2}, AA_1 = \sqrt{5}$，得 $AC = 2, A_1D = 2$，

则 $D(0,0,0), B(0,1,0), C(-1,0,0), C_1(-2,0,2)$，

则 $\overrightarrow{CB} = (1,1,0), \overrightarrow{CC_1} = (-1,0,2)$，

因为 $BD \perp$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $\overrightarrow{DB} = (0,1,0)$ 即为平面 AA_1C_1C 的一条法向量，

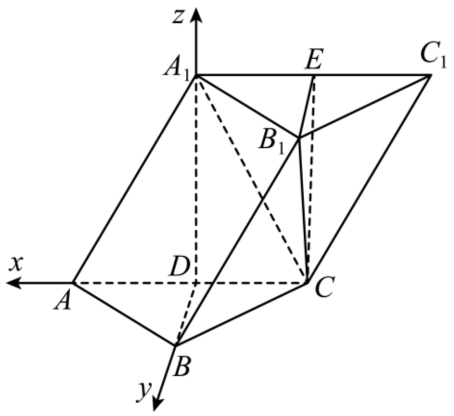
设平面 BCC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则有 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -x + 2z = 0 \end{cases}$，可取 $\vec{n} = (2,-2,1)$，

则 $\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{DB} \rangle = \dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DB}|} = \dfrac{-2}{1 \times 3} = -\dfrac{2}{3}$，

由图可知，二面角 $A - CC_1 - B$ 为锐二面角，

所以二面角 $A - CC_1 - B$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.



选②，取 A_1C_1 的中点 E，连接 B_1E, CE, DE，

则 $A_1E \parallel DC$ 且 $A_1E = DC$，

所以四边形 A_1DCE 为平行四边形，所以 $A_1D \parallel CE$ 且 $A_1D = CE$，

因为 $C_1E \parallel DC$ 且 $C_1E = DC$，

所以四边形 A_1DCE 为平行四边形，所以 $BD \parallel B_1E$ 且 $BD = B_1E$，

又因为 $BD \perp A_1D$，所以 $CE \perp B_1E$，

又 $AA_1 = B_1C = \sqrt{5}$，$BD = B_1E = 1$，

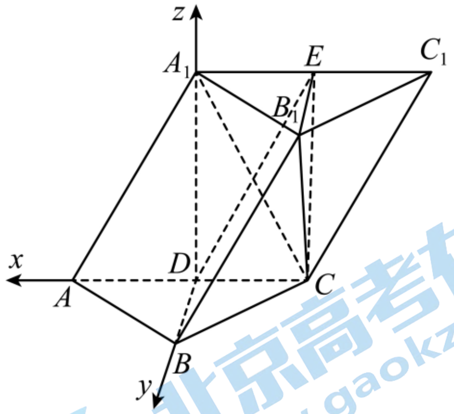
所以$CE=2$，则$A_1D=CE=2$，

在$\triangle ADA_1$中，因为$AD^2+A_1D^2=A_1A^2$，

所以$AD\perp A_1D$，

如图，以点D为原点，建立空间直角坐标系，

下同选①的答案.



19. 答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）t能为定值，使得$OM\perp FQ$，$t=4$.

【解析】

【分析】（1）根据题意得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}=1\\c=1\end{cases}$，再结合$b^2=a^2-c^2$即可得答案；

（2）设$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，进而得$M\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，$Q\left(t,\frac{ty_0}{x_0+2}\right)$，再计算斜率即可得

$k_{OM}\cdot k_{FQ}=\frac{ty_0^2}{(t-1)(x_0^2-4)}$，最后结合$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$即可得答案.

【小问 1 详解】

解：因为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,0)$，其右焦点为$F(1,0)$

所以$\begin{cases}\frac{4}{a^2}=1\\c=1\end{cases}$，即$a^2=4,c=1$，所以$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

【小问 2 详解】

解：设$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，则$M\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，

所以 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$，

所以过原点 O 与 AP 的平行的线的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}x$，

所以 $Q\left(t,\dfrac{ty_0}{x_0+2}\right)$，

所以 $k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$， $k_{FQ}=\dfrac{\dfrac{ty_0}{x_0+2}}{t-1}=\dfrac{ty_0}{(t-1)(x_0+2)}$，

所以 $k_{OM}\cdot k_{FQ}=\dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot\dfrac{ty_0}{(t-1)(x_0+2)}=\dfrac{ty_0^2}{(t-1)(x_0^2-4)}$，

因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，故 $y_0^2=3\left(1-\dfrac{x_0^2}{4}\right)=\dfrac{3(4-x_0^2)}{4}$，

假设存在 t 能为定值，使得 $OM\perp FQ$，

所以 $k_{OM}\cdot k_{FQ}=\dfrac{ty_0^2}{(t-1)(x_0^2-4)}=\dfrac{t\dfrac{3(4-x_0^2)}{4}}{(t-1)(x_0^2-4)}=\dfrac{3t}{4(1-t)}=-1$，解得 $t=4$

所以 t 能为定值，使得 $OM\perp FQ$，$t=4$.

20.【答案】(1) $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.

(2) $a\le 0$

(3) $0<a<\dfrac{9}{4}$

【解析】

【分析】(1)把 $a=-9$ 代入求导，再求出导函数大于 0 的不等式解集即可；

(2)由函数 $f(x)$ 的导函数在 $(1,2)$ 上恒小于等于 0 即可出 a 的范围；

(3)根据给定条件可得函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内的两个极值一正一负，再列出不等式求解即得.

【小问 1 详解】

当 $a=-9$ 时，$f(x)=x(x^2-3x-9)$，则 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，由 $f'(x)>0$ 解得：

$x<-1$ 或 $x>3$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)=x(x^2-3x+a)$，则 $f'(x)=3x^2-6x+a$，因函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为减函数，则

$\forall x\in(1,2)$，$f'(x)\le 0$ 成立，

即 $\forall x\in(1,2)$，$3x^2-6x+a\le 0\Leftrightarrow a\le -3x^2+6x$，显然 $-3x^2+6x$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即

$\forall x\in(1,2)$，$-3x^2+6x>0$，则 $a\le 0$，

所以 a 的取值范围是 $a\le 0$.

【小问 3 详解】

由(2)知，$f'(x)=3x^2-6x+a$，因函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内存在两个极值点 x_1，x_2，则 $f'(x)=0$ 在区间 $(0,2)$ 内有两个不等根 x_1，x_2，

即有 $\begin{cases} f'(0)=f'(2)=a>0 \\ f'(1)=-3+a<0 \end{cases}$，解得 $0<a<3$，且有 $x_1+x_2=2, x_1x_2=\dfrac{a}{3}$，

不妨令 $0<x_1<x_2<2$，则 $f'(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$，当 $0<x<x_1$ 或 $x_2<x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 x_1 处取得极大值 $f(x_1)$，在 x_2 取得极小值 $f(x_2)$，显然，$f(x_1)>f(x_2)$，

由 $|f(x_1)-f(x_2)|>|f(x_1)+f(x_2)|$ 两边平方得 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，

而 $f(x_1)\cdot f(x_2)=x_1(x_1^2-3x_1+a)\cdot x_2(x_2^2-3x_2+a)<0$，即 $(x_1^2-3x_1+a)(x_2^2-3x_2+a)<0$，

整理得：$(x_1x_2)^2-3x_1x_2(x_1+x_2)+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+9x_1x_2-3a(x_1+x_2)+a^2<0$，

把 $x_1+x_2=2, x_1x_2=\dfrac{a}{3}$ 代入上述不等式并整理得：$\dfrac{4}{9}a^2-a<0$，解得 $0<a<\dfrac{9}{4}$，

综上得 $0<a<\dfrac{9}{4}$，

所以实数 a 的取值范围是 $0<a<\dfrac{9}{4}$.

【点睛】含有多个变量的处理方法是减少变量的个数，减少变量方法有：

（1）若这些变量之间有关系可以用它们之间的关系消元，如在本题中不等式 $(x_1^2-3x_1+a)(x_2^2-3x_2+a)<0$ 含有三个变量，可以通过韦达定理 $x_1+x_2=2, x_1x_2=\dfrac{a}{3}$ 代入的办法消去 x_1，x_2，只剩下关系 a 的不等式.

（2）若这些变量之间没有关系可以通过构造比值或差值消元，如证明不等式 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时可变形为 $\dfrac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}<\dfrac{\frac{x_1}{x_2}+1}{2}$ 后构造 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$ 消元，只剩下关于 t 的不等式；证明不等式 $\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ 时可变形为 $\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1-x_2}+1}{2}$ 后构造 $t=x_1-x_2$ 消元，只剩下关于 t 的不等式.

21.【答案】（1）①不满足，②满足

（2）证明见详解　（3）$a_n = 0$ 或 $a_n = 3$

【解析】

【分析】（1）根据题意分析判断；

（2）根据题意先证 3 为数列 $\{a_n\}$ 中的项，再利用反证法证明集合 $\{n \in \mathbf{N}^* | \ a_n = 3\}$ 为无限集；

（3）先根据题意证明 $a_n \in \{0,2,3\}$，再分 $\{a_n\}$ 为常数列和非常数列两种情况，分析判断.

【小问 1 详解】

对①：取 $i=1$，对 $\forall j \in \mathbf{N}^*, j>1$，则 $a_i = a_1 = 1, a_j = j$，可得 $a_i a_j - a_i - a_j = j - 1 - j = -1$，

显然不存在 $k > j, k \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_k = -1$，故数列 $\{a_n\}$ 不满足性质 P；

对②：对于 $\forall i, j \in \mathbf{N}^*, i < j$，则 $b_i = i+2, b_j = j+2$，

故 $b_i b_j - b_i - b_j = (i+2)(j+2) - (i+2) - (j+2) = i \cdot j + i + j = (i \cdot j + i + j - 2) + 2$，

$\because i, j \in \mathbf{N}^*, i \ge 1, j \ge 2$，则 $i \cdot j + i + j - 2 \in \mathbf{N}^*$，且 $i \cdot j + i + j - 2 = i(j+1) + (j-2) \ge 3$，

$\therefore$ 存在 $k = i \cdot j + i + j - 2 \in \mathbf{N}^*, k > j$，使得 $b_k = (i \cdot j + i + j - 2) + 2 = b_i b_j - b_i - b_j$，故数列 $\{b_n\}$ 满足性质 P.

【小问 2 详解】

若数列 $\{a_n\}$ 满足性质 P，且 $a_1 = 1$，则有：

取 $i=1, j=j_1>1, j_1 \in \mathbf{N}^*$，均存在 $k_1 > j_1, k_1 \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_1} = a_1 a_{j_1} - a_1 - a_{j_1} = -1$，

取 $i=1, j=j_2>k_1, j_2 \in \mathbf{N}^*$，均存在 $k_2 > j_2 > k_1, k_2 \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_2} = a_1 a_{j_2} - a_1 - a_{j_2} = -1$，

取 $i=k_1, j=k_2>k_1$，均存在 $m_1 > k_2 > 1, m_1 \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{m_1} = a_{k_1} a_{k_2} - a_{k_1} - a_{k_2} = 3$，

故数列 $\{a_n\}$ 中存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_n = 3$，即 $\{n \in \mathbf{N}^* | \ a_n = 3\} \ne \varnothing$，

反证：假设 $\{n \in \mathbf{N}^* | \ a_n = 3\}$ 为有限集，其元素由小到大依次为 $n_1, n_2, \cdots, n_l \ (n_l > 1)$，

取 $i=1, j=n_l+1>n_l$，均存在 $k_L > n_l+1, k_L \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_L} = a_1 a_{n_l+1} - a_1 - a_{n_l+1} = -1$，

取 $i=1, j=k_L+1$，均存在 $k_{L+1} > k_L+1, k_{L+1} \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{k_{L+1}} = a_1 a_{k_L+1} - a_1 - a_{k_L+1} = -1$，

取 $i=k_L, j=k_{L+1}$，均存在 $n_{l+1} > k_{L+1} > n_l, n_{l+1} \in \mathbf{N}^*$，使得 $a_{n_{l+1}} = a_{k_L} a_{k_{L+1}} - a_{k_L} - a_{k_{L+1}} = 3$，

即 $n_{l+1} \in \{n \in \mathbf{N}^* | \ a_n = 3\}$ 这与假设相矛盾，故集合 $\{n \in \mathbf{N}^* | \ a_n = 3\}$ 为无限集.

【小问 3 详解】

设周期数列 $\{a_n\}$ 的周期为 $T \ge 1, T \in \mathbf{N}^*$，则对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，均有 $a_n = a_{n+T}$，

设周期数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_M, M \in \mathbf{N}^*, 1 \le M \le T-1$，最小项为 $a_N, N \in \mathbf{N}^*, 1 \le N \le T-1$，

即 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，均有 $a_N \le a_n \le a_M$，

若数列$\{a_n\}$满足性质P：

反证：假设$a_M \geq 4$时，取$i=M, j=M+T$，则$\exists k>M+T, k\in \mathbf{N}^*$，使得

$a_k=a_Ma_{M+T}-a_M-a_{M+T}=a_M^2-2a_M$，

则$a_k-a_M=a_M^2-3a_M=a_M\left(a_M-3\right)>0$，即$a_k>a_M$，

这对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$a_N\leq a_n\leq a_M$矛盾，假设不成立；则对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$a_n\leq 3$；

反证：假设$a_N\leq -2$时，取$i=N, j=N+T$，则$\exists k>N+T, k\in \mathbf{N}^*$，使得

$a_k=a_Na_{N+T}-a_N-a_{N+T}=a_N^2-2a_N\geq 4$，

这与对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$a_n\leq 3$矛盾，假设不成立，即对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$a_n\geq -1$；

综上所述：对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$-1\leq a_n\leq 3$，

反证：假设1为数列$\{a_n\}$中的项，由（2）可得：$-1,3$为数列$\{a_n\}$中的项，

$\because -1\times 3-(-1)-3=-5$，即$-5$为数列$\{a_n\}$中的项，

这与对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$-1\leq a_n\leq 3$相矛盾，即对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，均有$a_n\neq 1$，同理可证：$a_n\neq -1$，

$\because a_n\in \mathbf{Z}$，则$a_n\in\{0,2,3\}$，

当$T=1$时，即数列$\{a_n\}$为常数列时，设$a_n=a$，故对$\forall i,j\in \mathbf{N}^*, i<j$，都存在$k>j$，

使得$a_k=a_ia_j-a_i-a_j=a^2-2a=a$，解得$a=0$或$a=3$，即$a_n=0$或$a_n=3$符合题意；

当$T\geq 2$时，即数列$\{a_n\}$至少有两个不同项，则有：

①当$0,2$为数列$\{a_n\}$中的项，则$0\times 2-0-2=-2$，即-2为数列$\{a_n\}$中的项，但$-2\notin\{0,2,3\}$，不成立；

②当$0,3$为数列$\{a_n\}$中的项，则$0\times 3-0-3=-3$，即-3为数列$\{a_n\}$中的项，但$-3\notin\{0,2,3\}$，不成立；

③当$2,3$为数列$\{a_n\}$中的项，则$2\times 3-2-3=1$，即1为数列$\{a_n\}$中的项，但$1\notin\{0,2,3\}$，不成立；

综上所述：$a_n=0$或$a_n=3$.

【点睛】方法点睛：

（1）对于证明中出现直接证明不方便时，我们可以利用反证法证明；

（2）对于周期数列$\{a_n\}$满足性质P，证明思路：先逐步缩小精确a_n的取值可能，再检验判断.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。