

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

文科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{y | y = 2x, x \in A\}$, 则 $B \cap C =$

- A. $\{4, 6\}$ B. $\{4, 8\}$ C. $\{6, 8\}$ D. $\{4, 6, 8\}$

2. 已知 F_1 和 F_2 是双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$ 的两个焦点, $|F_1F_2| =$

- A. $\sqrt{7}$ B. 3 C. $2\sqrt{7}$ D. 6

3. 有两条不同的直线 m, n , 以及两个不同的平面 α, β , 下列说法正确的是

- A. 若 $m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \cap \beta = m, n \subset \alpha, n \perp m$, 则 $n \perp \beta$
 C. 若 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \perp n$ D. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 则 $m \perp n$

4. 已知 $b > 0$, 则“ $a > b + 1$ ”是“ $\sqrt{a} > \sqrt{b} + 1$ ”的

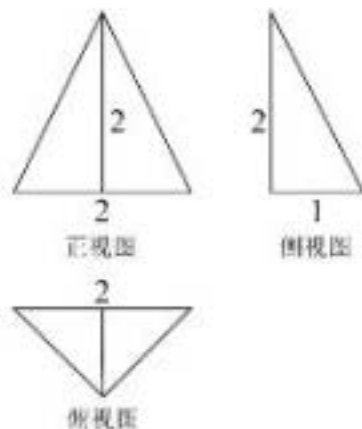
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1, a_3 \cdot a_5 = 16$, 则 $\frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3}$ 的值是

- A. 2 B. 4
 C. 8 D. 16

6. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积是

- A. $\frac{15}{4}$ B. $6 + 2\sqrt{6}$
 C. 6 D. $4 + 2\sqrt{6}$



(第 6 题图)

7. 将函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$ 先向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将图像上各点的横坐标压缩为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 则所得函数图像的一个对称中心为

- A. $(\frac{\pi}{12}, 0)$ B. $(-\frac{\pi}{12}, 1)$ C. $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ D. $(\frac{\pi}{12}, 1)$

8. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 向量 \vec{c} 满足 $|\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

9. 四面体 $ABCD$, AB, AC, AD 两两垂直, P, Q, R 分别是 AB, AC, AD 上的点, 且 $AP < AQ < AR$,

设二面角 $A-PQ-R, A-QR-P, A-RP-Q$ 的平面角分别为 α, β, γ , 则

- A. $\alpha > \beta > \gamma$ B. $\alpha > \gamma > \beta$ C. $\beta > \gamma > \alpha$ D. $\gamma > \beta > \alpha$

10. 已知 $a, b, c \in [\frac{1}{2}, 1]$, 则 $\frac{a^2 + 2b^2 + c^2}{ab + bc}$ 的取值范围是

- A. $[2, 3]$ B. $[\frac{5}{2}, 3]$ C. $[2, \frac{5}{2}]$ D. $[1, 3]$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, P 为椭圆上一点, $M(2, 1)$,

MF_1 平分角 $\angle PF_1F_2$, 则 $\triangle MPF_1$ 与 $\triangle MPF_2$ 的面积之和为

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + a (a \in \mathbf{R})$, 且 $|a_n| \leq 2$, 则 a 的取值范围是

- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 0]$ C. $[0, \frac{1}{4}]$ D. $[-2, \frac{1}{4}]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知复数 z 满足 $1 + 2z = i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $|z| =$ _____.

14. 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 与过定点 B 的动直线 $mx - y - 2m + 4 = 0$ 交于点

$P(x, y)$, 则 $|PA| \cdot |PB|$ 的最大值是 _____.

15. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，线段 BC 上的点 D 满足 $AD = CD$ ， $\tan B = \frac{12}{5}, c = 14, BD = 13$ ，则 $\tan C =$ _____.

16. $f(x) = x^4 - 6x^3 + rx^2 - 6x + 1$ 在 $(0, 3]$ 有且仅有三个零点，则实数 r 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

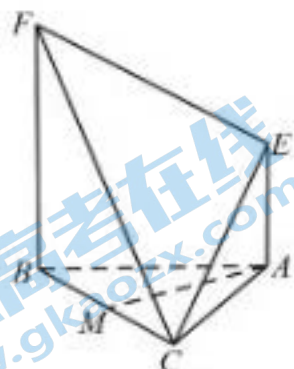
(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 甲、乙、丙三人各打靶一次，若甲打中的概率为 $\frac{1}{3}$ ，乙、丙打中的概率均为 $\frac{t}{4} (1 < t < 4)$ ，若甲、乙、丙都打中的概率是 $\frac{9}{48}$ 。

(1) 求 t 的值；

(2) 设 ξ 表示甲、乙两人中中靶的人数，求 ξ 的数学期望。

18. (12 分) 在如图所示的几何体中， $EA \perp$ 平面 $ABC, FB \perp$ 平面 $ABC, BA \perp AC$ ，且 $2AB = 2AC = 2AE = BF, M$ 是 BC 的中点。



(第 18 题图)

(1) 求证： $AM \perp FC$ ；

(2) 求 CE 与平面 FBC 所成角。

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n ，且 $a_n + \frac{1}{2} = \sqrt{2S_n + \frac{1}{4}}, n \in \mathbb{N}^+$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} (n \in \mathbb{N}^+)$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若对任意正整数 n ，都有 $T_n \geq 2n + m$ ，求实数 m 的取值范围。

20. (12 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ，焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，抛物线上动点 A 满足到抛物线内定点 $P(1, 1)$ 的距离与到焦点 F 的距离和 $|PA| + |AF|$ 的最小值为 2。

(1) 求抛物线的方程;

(2) 以 PA 为边作平行四边形 $PABC$, 使得 B, C 均在抛物线上, 求平行四边形 $PABC$ 的面积 S 的最小值.

21. (12分) 设函数 $f(x) = ax^2 - x \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若关于 x 的方程 $f'(x) = -1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的根 x_1, x_2 .

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_1 x_2 > e^2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10分) [选修 4—4: 极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 过点 $P(-1, -2)$, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho - \rho \cos^2 \theta - 8 \cos \theta = 0$.

(1) 求 C 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{|AB|^2}{|PA|^2 \cdot |PB|^2}$ 的最大值.

23. (10分) [选修 4—5: 不等式选讲]

已知不等式 $|x-5| + |x-7| \leq 4$ 的解集为 $[a, b]$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若 $x > 0, y > 0, bx + 3y = a$, 求 $\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}$ 的最小值.

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

文科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	D	B	B	C	C	D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 10

15. $\frac{4}{7}$

16. $\left(10, \frac{98}{9}\right)$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. 解：

（1）设事件 A 表示甲中靶， B 表示乙中靶， C 表示丙中靶，由已知条件可知：

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = P(C) = \frac{t}{4}, \text{ 由于 } A, B, C \text{ 是独立事件,}$$

$$\text{则 } P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{t}{4}\right)^2 = \frac{9}{48} \dots\dots 3 \text{ 分}$$

可得： $t = 3 \dots\dots 4 \text{ 分}$

（2） ξ 表示甲、乙两人中中靶的人数， ξ 的可能取值为 0, 1, 2，

$$P(\xi = 0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6} \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

即 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$E\xi = 1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. 解:

(1) $\because FB \perp$ 平面 $ABC, AM \subset$ 面 $ABC,$

$\therefore FB \perp AM \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$\because AB = AC, M$ 是 BC 的中点, $\therefore AM \perp BC, \because FB \cap BC = B,$

$\therefore AM \perp$ 面 $FBC \dots\dots\dots 4 \text{分}$

$\because FC \subset$ 面 $FBC, \therefore AM \perp FC \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 取 FC 中点 N , 连接 $MN, EN,$

$\because M$ 是 BC 的中点, N 是 FC 中点,

$\therefore MN$ 为 $\triangle FBC$ 的中位线,

$\therefore MN \parallel \frac{1}{2} FB, \because EA \parallel \frac{1}{2} FB, \therefore AMNE$ 为平行四边形,

$\therefore EN \parallel AM \dots\dots\dots 7 \text{分}$

由 (1) 已知 $AM \perp$ 面 $FBC, \therefore EN \perp$ 面 $FBC,$

$\therefore NC$ 是斜线 CE 在平面 FBC 内的射影, 则 CE 与平面 FBC 所成的角为 $\angle ECN$

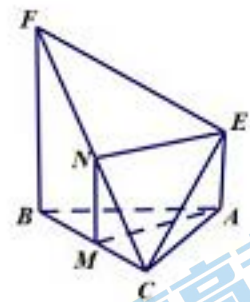
$\dots\dots\dots 9 \text{分}$

设 $2AB = 2AC = 2AE = BF = 2,$ 由 $\angle FBA = 90^\circ,$

可得 $EF = \sqrt{2}, EC = \sqrt{2}, FC = \sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{6},$

$\triangle EFC$ 为等腰三角形, $\therefore \cos \angle ECN = \frac{CN}{EC} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

可得: $\angle ECN = 30^\circ,$ 即: CE 与平面 FBC 所成角为 $30^\circ \dots\dots\dots 12 \text{分}$



19. 解:

$$(1) a_n + \frac{1}{2} = \sqrt{2S_n + \frac{1}{4}} \text{ 可化简为 } 2S_n = a_n^2 + a_n \text{ ①} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $n=1$ 时, 解得 $a_1=1$ 或 0 . 因为数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 所以 $a_1=1 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1} \text{ ②,}$$

$$\text{①-②, 则 } 2a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1},$$

$$\text{化简可得 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0,$$

$$\text{由于 } a_n > 0, a_n + a_{n-1} > 0, \text{ 则 } a_n - a_{n-1} = 1 (n \geq 2),$$

即数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 , 公差为 1 的等差数列, $a_n = n \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(1) b_n = \frac{2n+1}{2n-1} + \frac{2n-1}{2n+1} = 2 + \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1} = 2 + 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\text{从而 } T_n = 2n + 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2n + 2 - \frac{2}{2n+1} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } 2n + 2 - \frac{2}{2n+1} \geq 2n + m \text{ 对任意正整数 } n \text{ 成立, 则 } 2 - \frac{2}{2n+1} \geq m,$$

$$\text{即 } m \leq \left(2 - \frac{2}{2n+1}\right)_{\min}, \text{ 因为 } 2 - \frac{2}{2n+1} \text{ 随着 } n \text{ 增大而增大,}$$

$$\text{所以当 } n=1 \text{ 时, } 2 - \frac{2}{2n+1} = \frac{4}{3}, \text{ 所以实数 } m \text{ 的取值范围是 } m \leq \frac{4}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解:

$$(1) \text{ 抛物线 } y^2 = 2px \text{ 的准线 } l: x = -\frac{p}{2}, \text{ 过点 } A \text{ 做 } AA' \perp l, \text{ 垂足为 } A',$$

由抛物线的定义可知, $|PA| + |AF| = |PA| + |AA'|$, 过点 P 做 $PP' \perp l$, 垂足为 P' ,

$$\text{所以 } |PA| + |AF| = |PA| + |AA'| \geq |PP'| \dots\dots\dots 2 \text{ 分,}$$

$$\text{由题意: } |PP'| = 1 + \frac{p}{2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分,}$$

所以 $p=2$, 抛物线的方程为 $y^2=4x$ 4分

(2) 设 $l_{AC}: x=ty+a$, 与抛物线联立得: $y^2-4ty-4a=0$,

设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 由韦达定理: $\begin{cases} y_1+y_2=4t \\ y_1y_2=-4a \end{cases}, \Delta=16t^2+16a>0$ 6分

设 AC, PB 的交点为 G , 则 $G(2t^2+a, 2t)$,

由于 G 为 PB 的中点, 则 $B(4t^2+2a-1, 4t-1)$ 因为 B 在抛物线上,

代入抛物线可得: $(4t-1)^2=4(4t^2+2a-1)$, 即 $8a+8t-5=0$ (*),

此时 $\Delta=16t^2+16a=16t^2-16t+10>0$ 恒成立8分

对 $l_{AC}: x=ty+a$, 令 $y=1$, 则 $x=t+a$,

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} |t+a-1| \cdot |y_1-y_2| = \frac{1}{2} |t+a-1| \sqrt{16t^2+16a}$, 将 (*) 代入简化得:

$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \sqrt{16t^2-16t+10} = \frac{3}{4} \sqrt{t^2-t+\frac{5}{8}}$ 10分,

平行四边形 $PABC$ 的面积 $S=2S_{\triangle APC} = \frac{3}{2} \sqrt{t^2-t+\frac{5}{8}}$,

所以当 $t=\frac{1}{2}, S_{\min} = \frac{3}{8} \sqrt{6}$, 此时 $a=\frac{1}{8}$ 12分

21. 解:

(1) $a=1$ 时, $f(x)=x^2-x\ln x, f'(x)=2x-\ln x-1$, 则 $f'(1)=1$ 2分,

又 $f(1)=1$, 所以切点坐标为 $(1,1)$,

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=x$ 3分

(2) 由 $f'(x)=-1$, 得 $2ax-\ln x=0$, 即 x_1, x_2 是方程 $2ax-\ln x=0$ 的两根.

(i) 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x} (x>0)$, 则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 则 $g(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上为增函数, 在

区间 $(e, +\infty)$ 为减函数,5分

当 $0 < x \leq 1$ 时, $g(x) \leq 0$,

当 $1 < x \leq e$ 时, $0 < g(x) \leq \frac{1}{e}$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$ 且 $g(x) > 0$, 则当 $x \geq e$ 时, $0 < g(x) \leq \frac{1}{e}$ 6分,

则当 $0 < 2a < \frac{1}{e}$ 时, 关于 x 的方程 $2a = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有不同的两根,

故 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2e})$ 8分,

(ii) 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 (i) 知 $1 < x_1 < e < x_2$, 且 $2ax_1 = \ln x_1, 2ax_2 = \ln x_2$,

则 $2a(x_1 + x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = \ln(x_1 x_2)$, 即 $2a = \frac{\ln(x_1 x_2)}{x_1 + x_2}$,

$2a(x_2 - x_1) = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, 即 $2a = \frac{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{x_2 - x_1}$, 则有 $\frac{\ln(x_1 x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1}$,

即 $\ln(x_1 x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1}$, 要证 $x_1 x_2 > e^2$, 即证 $\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} > 2$,10分,

又 $\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} > 0$, 即证 $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1}$, 令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 即证 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} = 2 - \frac{4}{t+1}$,

设 $h(t) = \ln t + \frac{4}{t+1} - 2 (t > 1)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$,

即 $h(t)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则 $h(t) > h(1) = 0$,

即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立, 故有 $x_1 x_2 > e^2$ 12分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. 解:

(1) 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho - \rho \cos^2 \theta - 8 \cos \theta = 0$, 两边同时乘以 ρ ,

得 $\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \theta - 8\rho \cos \theta = 0$, 把互化公式代入可得: $x^2 + y^2 - x^2 - 8x = 0$,

即 $y^2 = 8x$, 所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = 8x$4 分

(2) 设直线 l 的倾斜角为 α ($\alpha \neq 0$),

可得参数方程为: $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha \\ y = -2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 代入抛物线方程可得:

$$\sin^2 \alpha \cdot t^2 - (4 \sin \alpha + 8 \cos \alpha)t + 12 = 0, \because \Delta > 0, \therefore 2 \sin 2\alpha + 3 \cos 2\alpha + 1 > 0,$$

$$\text{则 } t_1 + t_2 = \frac{4 \sin \alpha + 8 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, t_1 t_2 = \frac{12}{\sin^2 \alpha} > 0, \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{\left(\frac{4 \sin \alpha + 8 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \frac{4\sqrt{4 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha} \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{|AB|^2}{|PA|^2 \cdot |PB|^2} = \frac{|t_1 - t_2|^2}{|t_1 t_2|^2}$$

$$= \frac{16(4 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha)}{144} = \frac{4 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha}{9}$$

$$= \frac{3 \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha + 1}{9} \leq \frac{\sqrt{13} + 1}{9}, \text{ 此时符合直线 } l \text{ 与抛物线有两个交点,}$$

$$\therefore \frac{|AB|^2}{|PA|^2 \cdot |PB|^2} \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{13} + 1}{9} \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解:

(1) 当 $x \geq 7$ 时, $2x - 12 \leq 4$, 可得: $x \leq 8$, $\therefore 7 \leq x \leq 8$1 分

当 $5 < x < 7$ 时, $x - 5 + 7 - x = 2 \leq 4$ 恒成立, $\therefore 5 < x < 7$2 分

当 $x \leq 5$ 时, $12 - 2x \leq 4$, 可得: $x \geq 4$, $\therefore 4 \leq x \leq 5$3 分

综上所述, 不等式 $|x - 5| + |x - 7| \leq 4$ 的解集为 $[4, 8]$, 即 $a = 4, b = 8$4 分

(2) $8x + 3y = 4$,

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} \right) (8x + 3y) = \frac{1}{4} \left(7 + \frac{3y}{2x} + \frac{8x}{y} \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(7 + 2\sqrt{\frac{3y}{2x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) = \frac{7}{4} + \sqrt{3} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

当且仅当 $\begin{cases} \frac{3y}{2x} = \frac{8x}{y} \\ 8x + 3y = 4 \end{cases}$, 即 $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$ 时取等号,

故所求最小值为 $\frac{7}{4} + \sqrt{3} \dots\dots\dots 10 \text{分}$



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯