人大附中2022~2023学年度第二学期高一年级数学期中练习

2023年4月25日

制卷人：吴文庆　　审卷人：梁丽平

说明：本试卷共六道大题，共6页，满分150分，考试时间120分钟；

第Ⅰ卷（共18题，满分100分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

1. $\sin(-60^\circ)=$　　（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$　　（　　）

A. $\cos\alpha$　　B. $\sin\alpha$　　C. $-\cos\alpha$　　D. $-\sin\alpha$

3. 下列说法中不正确的是（　）

A. 向量的模可以比较大小

B. 平行向量就是共线向量

C. 对于任意向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，必有$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

D. 对于任意向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，必有$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\ge|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

4. 已知$\tan\alpha=2$，则$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. 2

5. 下列各组向量中，可以作为平面向量一组基底的是（　）

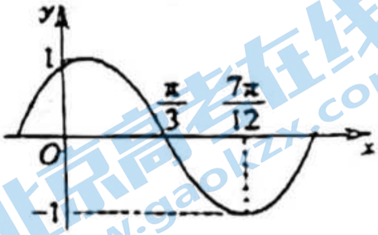
A. $\boldsymbol{e}_1=(0,0),\boldsymbol{e}_2=(1,-2)$　　B. $\boldsymbol{e}_1=(1,2),\boldsymbol{e}_2=(-1,-2)$

C. $\boldsymbol{e}_1=(2,3),\boldsymbol{e}_2=(4,6)$　　D. $\boldsymbol{e}_1=(1,3),\boldsymbol{e}_2=(2,-1)$

6. 设$a=\arcsin 1$，$b=\arccos 1$，$c=\arctan 1$，则　　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象如图所示，为得到 $g(x)=\sin 2x$ 的图象，只需将 $f(x)$ 图象上所有的点（　）



A．向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　B．向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

8. 已知 a 与 b 是非零向量，且 $a\neq\pm b$，则 $|a|=|b|$ 是 $a+b$ 与 $a-b$ 垂直的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

9. 人大附中举办了"阳春德泽·歌以咏志"春日合唱比赛大获成功，数学组想举办"响亮（谐音向量）学生音乐节"独唱比赛．想在独唱比赛取得好的成绩取决于三个要素：情感投入（a），唱歌技巧（b）和舞台效果（c）（单位：分）．每个参赛同学各有优势，最多只能分配 10 分到三个不同的要素中．根据经验，数学组老师约定三个要素 $a:b:c$ 为 $3:3:4$ 时会达到最佳效果.计分方式是计算参赛同学的三维要素向量 (a,b,c) 与 $(3,3,4)$ 的夹角余弦值，公式是 $\cos\theta=\dfrac{3a+3b+4c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+4^2}}$，该值越大，得分越高．

根据此规则，你认为下列四位参赛同学得分最高的是（　）

同学	情感投入（a）	唱歌技巧（b）	舞台效果（c）
A	6	3	1
B	1	4	4
C	2	3	4
D	2	4	3

A．同学 A　　B．同学 B　　C．同学 C　　D．同学 D

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $[t,t+1](t\in\mathbf{R})$ 上的最大值记为 $g(t)$，则 $g(t)$ 的最小值为（　）

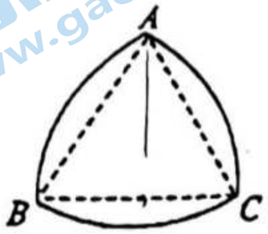
A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．-1　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．1

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.）

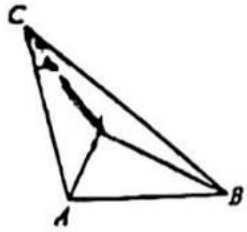
11. $f(x)=|\sin x|$ 的值域是__________.

12. $a=(\cos 45^\circ,\sin 45^\circ)$，$b=(\cos 75^\circ,\sin 75^\circ)$，则 a,b 的夹角为__________.

13. 数学中处处存在着美，机械学家莱洛发现的莱洛三角形（图中实线）就给人以对称的美感. 莱洛三角形的画法：先画等边三角形 ABC，再分别以点 A,B,C 为圆心，线段 AB 长为半径画圆弧，三段圆弧便围成了莱洛三角形. 若莱洛三角形的周长为 2π，则 $AB=$__________，等边三角形 ABC 的面积是__________.



14. 如图，点 O 为△ABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$__________.



15. 若函数 $f(x)$ 的图象上存在不同的两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，坐标满足关系 $|x_1x_2+y_1y_2|\geq\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，则称函数 $f(x)$ 与原点关联.

给出下列函数：

①$f(x)=2x$；　　②$f(x)=\sin x$；

③$f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$；　　④$f(x)=\ln x$.

其中与原点关联的所有函数为__________（填上所有正确答案的序号）.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

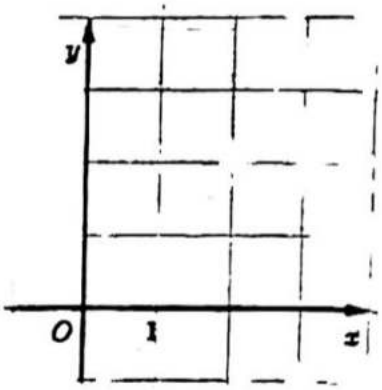
16.（本题 13 分）已知 $a=(2,0)$，$b=(2,3)$，

（1）已知 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{AB}=b$，在所给直角坐标系中标出 A,B 两点的位置；

（2）求 $(a+b)(a-b)$；

（3）求 $|2a+b|$；

（4）求 a 在 b 方向上的投影的数量.



17. （本题12分）某同学用"五点法"画函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$

在某一个周期内的图象时，列表并填入部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	a	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	b
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	2	c	-2	0

（1）请将上述数据补充完整，直接写出 a,b,c 的值并求出 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(x)$ 的对称轴；

（3）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值和最小值.

18.（本题10分）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π

（1）求 ω 的值；

（2）从下面四个条件中选择两个作为已知，使得 $f(x)$ 解析式存在且唯一，

求 $f(x)$ 的解析式.

（3）在（2）的条件下，求 $f(x)$ 的单调减区间.

条件①：$f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$；

条件②：$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增；

条件③：$f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$；

条件④：$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按前两个条件和第一个解答给分.

第 II 卷（共 8 道题，满分 50 分）

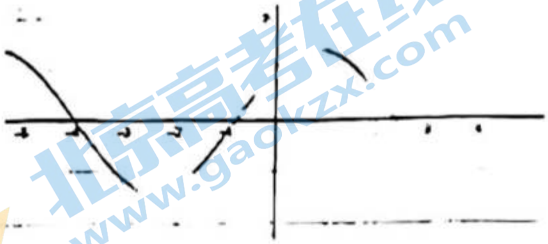
一、选择题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.）

19．方程 $\cos^2 x-\sin^2 x=1$ 的解集为（　　）

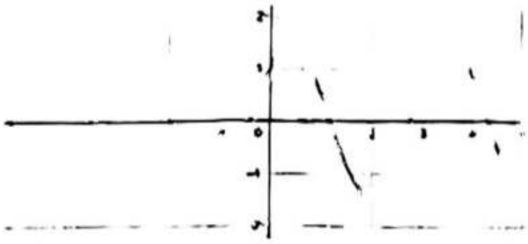
A．$\{x\,|\,x=2k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$　　B．$\{x\,|\,x=k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$

C．$\{x\,|\,x=\pi+2k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$　　D．$\left\{x\,|\,x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in \mathbf{Z}\right\}$

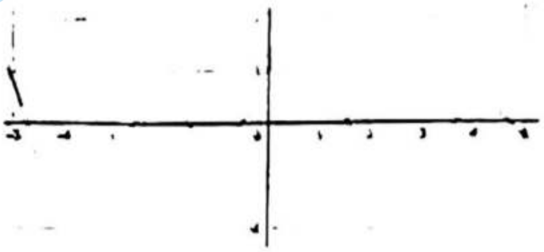
20．函数 $f(x)=\sin x+\cos 2x$ 的图象大致是（　　）



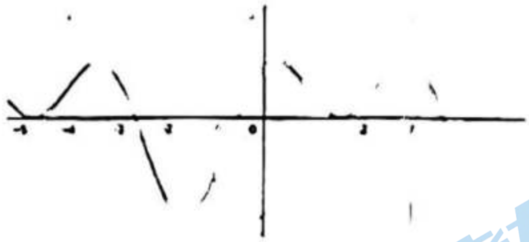
A.



B.



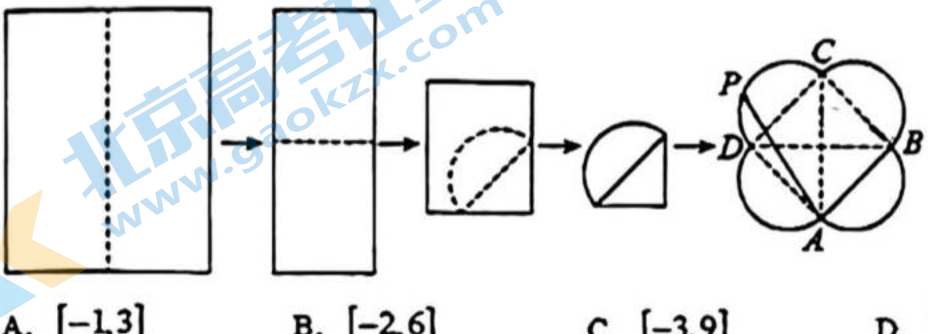
C.



D

21．剪纸是中国古老的传统民间艺术之一，剪纸时常会沿着纸的某条对称轴对折．将一张纸片先左右折叠，再上下折叠，然后沿半圆弧虚线裁剪，展开得到最后的图形，若正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 在四段圆弧上运动，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为

（　　）



A．$[-1,3]$　　B．$[-2,6]$　　C．$[-3,9]$　　D．$[-3,6]$

22. 若函数$f(x)=\dfrac{\lg(\sin x+4)}{\lg(\cos x+4)}$的最大值为$M$，最小值为$m$，则下列说法正确的是（ ）

A. $M=\log_3 4$　　B. $N=\log_5 4$

C. $M\cdot m=1$　　D. $M\cdot m>1$

二、填空题（共3小题，每小题5分，共15分，把答案填在答题纸上的相应位置.）

23. 化简$\sqrt{1+2\sin(\pi-1)\cos(\pi-1)}=$________.

24. 若$|a|=1,|b|=3$，则$|a+b|+|a-b|$的取值范围是________ ______

25. 在下列四个函数中任选两个相加可以得到6个新的函数：

①$y=\ln x$　②$y=e^x$　③$y=\sin x$　④$y=\cos x$

其中有无数个零点的所有函数为________________（写出完整的函数解析式）

三、解答题（本小题15分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.）

26. 集合$X=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbf{N}\}$称为三元有序数组集，对于$A_0=(a_0,b_0,c_0)\in X$，$a_0,b_0,c_0$互不相等，令$A_{i+1}=(a_{i+1},b_{i+1},c_{i+1})$，其中$a_{i+1}=|a_i-b_i|$，$b_{i+1}=|b_i-c_i|$，$c_{i+1}=|c_i-a_i|$，$i=0,1,2,3,\cdots$.

（1）当$A_0=(1,2,4)$时，试求出A_2和A_{2023}；

（2）证明：对于任意的$k\in\mathbf{N}$，A_k中的三个数a_k,b_k,c_k至多有一个为0；

（3）证明：存在$t\in\mathbf{N}^*$，当$i\geq t$时，向量$A_i=(a_i,b_i,c_i)$满足$a_ib_ic_i=0$.

人大附中 2022~2023 学年度第二学期高一年级数学期中练习

数学参考答案

I 卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　（2）B　（3）D　（4）B　（5）D

（6）D　（7）D　（8）C　（9）C　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[0,1]$　（12）30°

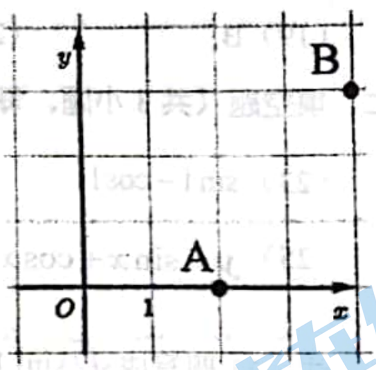
（13）2　$\sqrt{3}$　（第一空 3 分，第二空 2 分）　（14）8

（15）① ② ④　（全对 5 分，部分对 3 分，有错 0 分）

三、解答题（共 3 小题，共 35 分）

（16）（共 13 分）

解：（1）如右图……………………………………4 分



（2）$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$……………………5 分

$=|a|^2-|b|^2$……………………………………6 分

$=2^2-\left(\sqrt{2^2+(-3)^2}\right)^2=4-13=-9$……………………7 分

（3）$|2a+b|=\sqrt{|2a+b|^2}=\sqrt{(2a+b)^2}$……………………………………8 分

$=\sqrt{4a^2+4a\cdot b+b^2}=\sqrt{4\times4+4\times2\times2+13}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$……………………10 分

（2）（3）用坐标 $a+b=(4,3),a-b=(0,-3)$,……………………………………5 分

$(a+b)\cdot(a-b)=4\times0-3\times3=-9$……………………………………7 分

$2a+b=(6,3)$,……………………………………8 分

$|2a+b|=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$……………………………………10 分

（4）a 在 b 方向上的投影的数量为 $|a|\cos<a,b>=\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{2\times2+0\times3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$…13 分

（17）（共 12 分）

解：（1）$a=\frac{1}{12}\pi, b=\frac{13}{12}\pi, c=0$ ……………………………………3 分

因为 $T=\frac{13}{12}\pi-\frac{1}{12}\pi=\pi, T=\frac{2\pi}{\omega}$

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，……………………………………………………4 分

将 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$ 代入 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 得 $2x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$ ……………………5 分

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ ……………………………………………6 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

（2）令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，……………………………8 分

所以 $f(x)$ 对称轴为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ ……………………………………9 分

（3）因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ ……………………10 分

因为 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ 单调递增，（或由 $y=\sin x$ 的图象性质可得：）

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，

$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ ……………………………11 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，

$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$. ……………………………………12 分

（说明最值时没有指出自变量的范围两步合起来扣 1 分）

(18)(共 10 分)

解:(1)因为$T=\pi, T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$ ……2 分

(2)方案一:选择①,③ ……4 分

因为$f(x)$的值域是$[-2,2]$,所以$A=2$. ……5 分

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

因为$f(x)$的图象经过点$(0,1)$,所以$2\sin\varphi=1$,即$\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$. ……6 分

故$f(x)$的解析式为$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

方案二:选择条件①,④

因为$f(x)$的值域是$[-2,2]$,所以$A=2$.

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 因为$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{3}$对称,

所以$2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

所以$\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{6}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以$f(x)$的解析式为$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

方案三:选择条件③,④

因为$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{3}$对称,所以$2\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

所以$\varphi=k\pi+\frac{7\pi}{6}$. 又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

二、解答题（共 1 小题，共 15 分）

（26）（共 15 分）

（1）因为 $A_0=(1,2,4)$，所以 $A_1=(1,2,3), A_2=(1,1,2), A_3=(0,1,1)$,

$A_4=(1,0,1), A_5=(1,1,0), A_6=(0,1,1)$, 故从 A_3 起以 3 为周期循环，

因为 $2023=2+3\times 673+2$，

故 $A_2=(1,1,2)$, ……………………………………………………………2 分

$A_{2023}=(1,0,1)$ ……………………………………………………………4 分

（2）反证：假设存在，取第一次出现至少两个 0 的位置 A_i，依题意 $i\geq 2$ ………5 分

不妨设 $a_i=b_i=0, c_i=x$ 且 $i\geq 1$，则 $a_i=|a_{i-1}-b_{i-1}|=0, b_i=|b_{i-1}-c_{i-1}|=0$，

故 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=y\geq 0$， ……………………………………………7 分

所以 $|a_{i-2}-b_{i-2}|=|b_{i-2}-c_{i-2}|=y$

则 $b_{i-2}=a_{i-2}\pm y$， $c_{i-2}=b_{i-2}\pm y=a_{i-2}\pm 2y$ 或 a_{i-2}，

所以 $y=0$ 或 $2y=y$，得 $y=0$，

所以 $a_{i-1}=b_{i-1}=c_{i-1}=0$，矛盾；……………………………………9 分

综上，对于任意的 $k\in\mathbf{N}$，A_k 中的三个数 a_k,b_k,c_k 至多有一个为 0；

（3）设 a_k,b_k,c_k 三个数中最大的为 m_k，记作 $m_k=\max\{a_k,b_k,c_k\}$，

因为 $a_{k+1}=|a_k-b_k|$， $b_{k+1}=|b_k-c_k|$， $c_{k+1}=|c_k-a_k|$， $a_k,b_k,c_k\in\mathbf{N}$，

所以 $m_{k+1}\leq m_k$， $k=0,1,2,3,\cdots$，

若 $m_1,m_2,m_3,\cdots$ 单调递减，由 $m_k\in\mathbf{N}$ 可得存在 t，使得 $m_t=0$，

由（2）的证明可得 $a_0=b_0=c_0=0$，这与题设矛盾，……………………11 分

所以$m_1,m_2,m_3,\cdots$不可能单调递减，即存在$t\in\mathbf{N}^*$，使得$m_{t+1}=m_t$，

根据A_{t+1}的定义，可得$A_t=(a_t,b_t,c_t)$中三个数中必有0，

通过（2）已经证明至多一个0，则a_t,b_t,c_t三个数中只有一个数为0，…………………13分

不妨设$A_t=(0,b_t,c_t)$，设$A_{t-1}=(a_{t-1},b_{t-1},c_{t-1})(t\ge 2)$，

所以$a_t=|a_{t-1}-b_{t-1}|=0$，即$a_{t-1}=b_{t-1}$，$b_t=|b_{t-1}-c_{t-1}|$，$c_t=|c_{t-1}-a_{t-1}|=|c_{t-1}-b_{t-1}|=b_t$，

故$A_t=(0,b_t,b_t)$，则$A_{t+1}=(b_t,0,b_t)$，$A_{t+2}=(b_t,b_t,0)$，$A_{t+3}=(0,b_t,b_t),\cdots$

所以存在$t\in\mathbf{N}^*$，当$i\ge t$时，向量$A_i=(a_i,b_i,c_i)$满足$a_ib_ic_i=0$ ……………………15分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〝精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。