中国人民大学附属中学 2018 届高三八月摸底统一练习

数学（理）试题

说明：本试卷共三道大题，20 道小题，共 9 页，满分 150 分；考生务必按要求将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

一、选择题(本道题共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的，请把所选答案前的字母按规定要求填涂在“答题纸”第 1-8 题的相应位置上)

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$, 集合 $B=\{x\mid |x-a|<3\}$, 若 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是

（A）$[1,2]$　　（B）$(-1,2)$　　（C）$[-1,2]$　　（D）$(-2,1)$

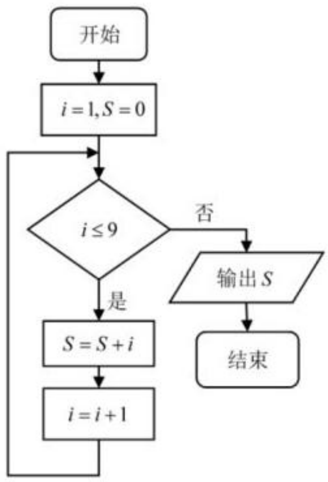
2. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的右焦点为 $(2,0)$,则此双曲线的渐近线方程是

（A）$y=\pm\sqrt{5}x$　　（B）$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}x$　　（C）$y=\pm\sqrt{3}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

3. 如图,该程序运行后输出的结果为

（A）36　　（B）56

（C）55　　（D）45



4. 已知 $(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}})^n$ 的展开式的第三项与第二项的系数之比为 $11:2$, 则 n 是

（A）10　　（B）11

（C）12　　（D）13

5. “$x>0$”是“$x+\frac{1}{x}\geq 2$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6. 若$\theta\in(0,\pi)$, 且$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$,则曲线$\frac{x^2}{\sin\theta}-\frac{y^2}{\cos\theta}=1$是

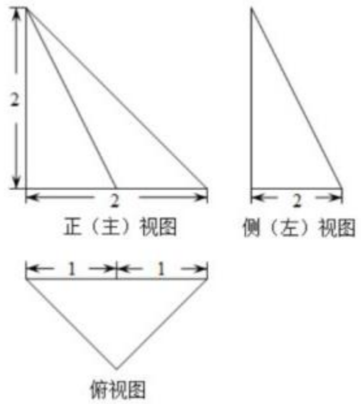
（A）焦点在x轴上的椭圆　　（B）焦点在y轴上的椭圆

（C）焦点在x轴上的双曲线　　（D）焦点在y轴上的双曲线

7. 某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥最长棱的棱长为

（A）$\sqrt{6}$　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{3}$　　（D）3



8. 已知x_0是函数$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x$的极大值点,在以下各式中:

①$f(x_0)<x_0$;　　②$f(x_0)=x_0$;

③$f(x_0)>x_0$;　　④$f(x_0)<\frac{1}{4}$;　　⑤$f(x_0)>\frac{1}{4}$.

所有正确的序号为

（A）①④　　（B）②④　　（C）②⑤　　（D）③⑤

二、填空题(本大题共 6 道小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将每道题的最简答案填写在“答题纸”第 9-14 题的相应位置上)

9. 设复数 z 满足 $\mathrm{i}(z-2)=3+2\mathrm{i}$ (i 是虚数单位),则 $|z|=$ ______.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2),\boldsymbol{b}=(-1,3,-3),\boldsymbol{c}=(13,6,\lambda)$ 共面,则实数 $\lambda=$ ______.

11. 在极坐标系中,点 $P(2,-\frac{\pi}{6})$ 到直线 $l:\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=1$ 的距离是 ______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,若 $(2c-a)\cos B-b\cos A=0$,则 $\angle B$ 的大小为 ______.

13. 已知抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 关于直线 $y=x+m$ 对称,且满足 $x_1x_2=-\frac{1}{2}$,那么实数 m 的值为 ______.

14. 已知函数 $f(x)=4\ln x-x+\frac{3}{x},g(x)=2x^2-tx+20,t\in\mathbf{R}$.

（ i ）若函数 $y=f(x)-k$ 有两个零点,则实数 k 的值为 ______;

（ ii ）若对于任意 $x_1\in(0,2)$, 都存在 $x_2\in[1,2]$, 使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 成立,则实数 t 的取值范围是 ______.

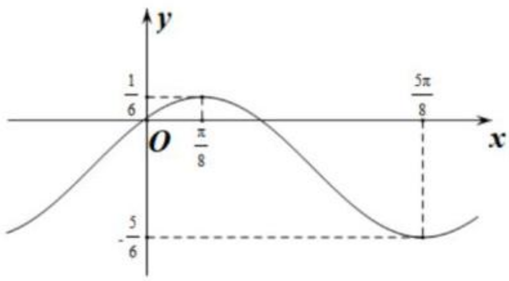
三、解答题(本大题共 6 道小题，共 80 分.解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程，请将解答题的答案填写在“答题纸”第 15-20 题的相应位置上.）

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式和单调递增区间;

（Ⅱ）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个零点,求 $\sin 4x_0$ 的值.



16. （本小题满分 13 分）

某农作物的长势与海拔高度、土壤酸碱度、空气湿度的指标有极强的相关性,现将这三项指标分别记为x,y,z,并对它们进行量化: 0 表示不合格,1 表示临界合格,2 表示合格,再用综合指标$\omega=x+y+z$的值评定这种农作物的长势等级,若$\omega\geq 4$,则长势为一级;若$2\leq\omega\leq 3$,则长势为二级;若$0\leq\omega\leq 1$,则长势为三级,为了解目前这种农作物的长势情况,研究员随机抽取10 块种植地,得到结果如下表:

种植地编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
(x,y,z)	$(1,1,2)$	$(2,1,1)$	$(2,2,2)$	$(0,0,1)$	$(1,2,1)$
种植地编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
(x,y,z)	$(1,1,2)$	$(1,1,1)$	$(1,2,2)$	$(1,2,1)$	$(1,1,1)$

（Ⅰ）在这10 块种植地中任意选取两块地,求空气湿度z相同的概率;

（Ⅱ）从长势为一级的种植地中任意选取一块地,记其综合指标为ω_1,从长势不是一级的种植地中任取一块地,记其综合指标为ω_2,记随机变量$X=\omega_1-\omega_2$,求X的分布列及其数学期望.

17. （本小题满分 14 分）

等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，点 D,E 分别是边 AB,AC 上的点，且满足 $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$（如图 1）。将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使二面角 A_1-DE-B 成直二面角，连结 A_1B, A_1C（如图 2）。

（Ⅰ）求证：$A_1D\perp$ 平面 $BCED$；

（Ⅱ）已知点 R 在棱 A_1C 上，且 $ER//$ 平面 A_1BD，求 $\frac{A_1R}{RC}$ 的值；

（Ⅲ）在棱 BC 上是否存在点 P，使直线 PA_1 与平面 A_1BD 所成的角为 60°？若存在，求出 PB 的长；若不存在，请说明理由.

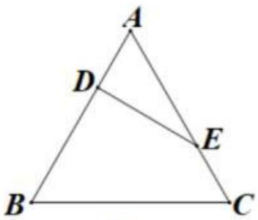


图1

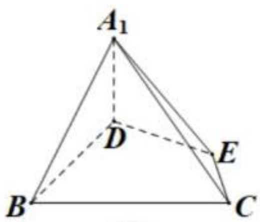


图2

18. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{ax^2+bx+1}$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $b=0$，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x+y=0$ 垂直，求实数 a 的取值；

（Ⅱ）若 $a=0$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 1$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

19. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F_2(1,0)$,离心率 $e=\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程;

（Ⅱ）过点 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点,记 $\lambda=\frac{|AF_2|}{|BF_2|}$,求 λ 的取值范围.

20. （本小题满分 13 分）

集合 M 的若干个子集的集合称为集合 M 的一个子集族.对于集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的一个子集族 D,若 $A\in D,B\subseteq A$, 则 $B\in D$,则称子集族 D 是“向下封闭”的.

（Ⅰ）写出一个包含集合 $\{1,2\}$ 的“向下封闭”的子集族 D ,并计算此时 $\sum\limits_{A\in D}(-1)^{|A|}$ 的值(其中 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数,约定 $|\varnothing|=0$; $\sum\limits_{A\in D}$ 表示对子集族 D 中所有元素 A 求和);

（Ⅱ）D 是集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的任一“向下封闭”的子集族,对 $\forall A\in D$,记 $k=\max|A|$, $f(k)=\max\sum\limits_{A\in D}(-1)^{|A|}$ (其中 max 表示最大值).

（i）求 $f(2)$;

（ii）若 k 是偶数,求 $f(k)$.

中国人民大学附属中学 2018 届高三八月摸底统一练习

数学（理）试题答案 2017.8.18

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	C	A	B	C

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. 5

10. 3

11. $\sqrt{3}+1$

12. $\frac{\pi}{3}$

13. $\frac{3}{2}$

14. 2 或 $4\ln 3-2$；$[13,+\infty)$

注:第 14 题第一空 3 分,第二空 2 分.

三、解答题:

15. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）由图象可知, $A=\frac{1}{2}\times[\frac{1}{6}-(-\frac{5}{6})]=\frac{1}{2}$,故 $b=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$,

记 $f(x)$ 的最小正周期为 T, 则 $\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}$,故 $T=\pi$.

于是 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$, $\omega=2$.

所以 $\frac{1}{2}\sin(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,故 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,

因此, $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3}$.

由 $2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$,

得 $x\in[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$,

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）由题知, $f(x_0)=\frac{1}{2}\sin(2x_0+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3}=0$,故 $\sin(2x_0+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{3}$,

记 $2x_0+\frac{\pi}{4}=\theta$,则 $\sin 4x_0=\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})=-\cos 2\theta=2\sin^2\theta-1=-\frac{1}{9}$.

16. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）在这10块种植地中任意选取两块地,基本事件总数$n=C_{10}^2=45$,

在这10块种植地中,空气湿度z为1的有6块,为2的有4块,设事件$A=$“在这10块种植地中任意选取两块地,它们的空气湿度z相同”,则事件A包含的基本事件数为$m=C_6^2+C_4^2=21$,

故$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

（Ⅱ）由题意知,这10块种植地的综合指标如下表:

种植地编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
综合指标ω	4	4	6	1	4	4	3	5	4	3

其中长势是一级$(\omega\geq 4)$的有7块:$A_1,A_2,A_3,A_5,A_6,A_8,A_9$,长势不是一级$(\omega<4)$的有3块:$A_4,A_7,A_{10}$,随机变量$X=\omega_1-\omega_2$的所有可能取值为$1,2,3,4,5$,

$P(X=1)=P(\omega_1=4,\omega_2=3)=\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{10}{21}$,$P(X=2)=P(\omega_1=5,\omega_2=3)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{2}{21}$,

$P(X=3)=P(\omega_1=4,\omega_2=1\text{或}\omega_1=6,\omega_2=3)=\frac{C_5^1C_1^1+C_1^1C_2^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{7}{21}$,

$P(X=4)=P(\omega_1=5,\omega_2=1)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{1}{21}$,$P(X=5)=P(\omega_1=6,\omega_2=1)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_7^1C_3^1}=\frac{1}{21}$,

故X的分布列为:

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$

所以$E(X)=1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{2}{21}+3\times\frac{7}{21}+4\times\frac{1}{21}+5\times\frac{1}{21}=\frac{44}{21}$.

17. （本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）因为等边$\triangle ABC$的边长为3,且$\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$,

所以$AD=1,AE=2$.在$\triangle ADE$中,由余弦定理,得

$DE=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60^\circ}=\sqrt{3}$.

因为$AD^2+DE^2=4=AE^2$,所以$AD\perp DE$.

折叠后,仍有$A_1D\perp DE$,且$BD\perp DE$,

于是$\angle A_1DB$为二面角A_1-DE-B的平面角,所以$A_1D\perp DB$

又$A_1D\perp DE,DE\cap DB=D,DE,DB\subset$平面$BCED$,

所以$A_1D\perp$平面$BCED$

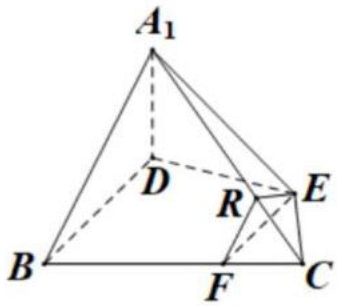
或:折叠后,仍有$A_1D\perp DE$,

因为二面角A_1-DE-B是直二面角,

所以平面$A_1DE\perp$平面$BCED$.

又平面$A_1DE\cap$平面$BCED=DE$,$A_1D\subset$平面A_1DE,$A_1D\perp DE$,

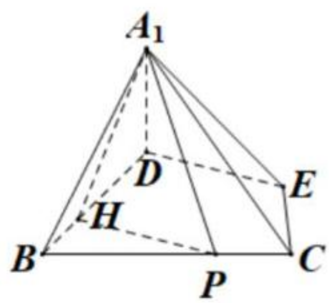
所以$A_1D\perp$平面$BCED$.



（Ⅱ）过点E作平面A_1DE的平行平面,交BC于点F,交A_1C与点R,这显然满足$ER//$平面A_1BD,并且这样点R存在且唯一.

由面面平行的性质知,$EF//DB$,$FR//A_1B$,

所以$\frac{A_1R}{RC}=\frac{BF}{FC}=\frac{AE}{EC}=2$.



（Ⅲ）假设在棱BC上存在点P,使直线PA_1与平面A_1BD所成角为60°,

作$PH\perp BD$于点H,连接A_1H,A_1P.

由（Ⅰ）知,$A_1D\perp$平面$BCED$,

因为$PH\subset$平面$BCED$,所以$A_1D\perp PH$.

又 $PH \perp BD$，A_1D，$BD \subset$ 平面 A_1DE，$A_1D \cap BD = D$，

所以 $PH \perp$ 平面 A_1DE．

所以 $\angle PA_1H$ 为直线 PA_1 与平面 A_1BD 所成的角,即 $\angle PA_1H = 60^\circ$．

设 $PB = x(0 \le x \le 3)$,则 $BH = PB\cos 60^\circ = \frac{x}{2}$，$DH = 2 - \frac{x}{2}$，$PH = PB\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，

$A_1H = PH\cot 60^\circ = \frac{x}{2}$ (或由 $\triangle PHA_1 \cong \triangle PHB$ 得出)

在 $\triangle A_1DH$ 中,由勾股定理得:$1^2 + (2-\frac{x}{2})^2 = (\frac{x}{2})^2$，

解得:$x = \frac{5}{2}$,符合题意.

所以,在棱 BC 上存在点 P,使直线 PA_1 与平面 A_1BD 所成的角为 60°,此时 $PB = \frac{5}{2}$．

注:其他正确解法（如坐标法）也可以.

18. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）当 $b = 0$ 时，$f(x) = \frac{e^x}{ax^2+1}$，$f'(x) = \frac{e^x(ax^2-2ax+1)}{(ax^2+1)^2}$，

所以 $f'(2) = \frac{e^2}{(4a+1)^2} = \frac{1}{2}$，

解得 $a = \frac{-1 \pm \sqrt{2}e}{4}$．

（Ⅱ）当 $a = 0$ 时，$f(x) = \frac{e^x}{bx+1}$，

当 $x \ge 0$ 时，$f(x) \ge 1$ 恒成立,故 $bx+1 \ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立,因而 $b \ge 0$．

于是 $f(x) \ge 1 \Leftrightarrow e^x - bx - 1 \ge 0$．

令 $g(x) = e^x - bx - 1$,则 $g'(x) = e^x - b$，

①当 $0 \le b \le 1$ 时，$g'(x) \ge 0$,故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，$g(x) \ge g(0) = 0$,成立;

②当 $b > 1$ 时,由 $g'(x) = 0$ 得 $x = \ln b$,当 $x \in (0,\ln b)$ 时，$g'(x) < 0$，$g(x)$ 在 $(0,\ln b)$ 单调递减,因而 $g(x) < g(0) = 0$,不成立.

综上所述，$0 \le b \le 1$．

19. （本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）设 c 为椭圆 C 的半焦距,由题意知: $c=1$,

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,得 $a=2$,因而 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AF_2}=(1-x_1,-y_1),\overrightarrow{F_2B}=(x_2-1,y_2)$,

由题意知: $\overrightarrow{AF}_2=\lambda\overrightarrow{F_2B}(\lambda>0)$,于是: $-y_1=\lambda y_2$,即 $y_1=-\lambda y_2$.

①当直线 l 的斜率为 0 时, $\lambda=3$ 或 $\frac{1}{3}$;

②当直线 l 的斜率不为 0 时,设直线 $l:x=ty+1$,与椭圆 C 的方程联立,得;

$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$,

显然 $\Delta>0$ 恒成立,且 $y_1+y_2=-\frac{6t}{3t^2+4}, y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$,

将 $y_1=-\lambda y_2$ 代入,得 $(1-\lambda)y_2=-\frac{6t}{3t^2+4},-\lambda y_2{}^2=-\frac{9}{3t^2+4}$,

消去 y_2,得 $\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}=\frac{4t^2}{3t^2+4}$.

当 $t=0$ 时, $\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}=0$;

当 $t\neq 0$ 时, $\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}=\frac{4}{3+\frac{4}{t^2}}\in(0,\frac{4}{3})$,

因此, $\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\in[0,\frac{4}{3})$,

这等价于 $\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}<\frac{4}{3}$,即 $3\lambda^2-10\lambda+3<0$,所以 $\frac{1}{3}<\lambda<3$.

综上所述, λ 的取值范围是 $[\frac{1}{3},3]$.

20. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）例如，$D=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，

此时 $\sum\limits_{A\in D}(-1)^{|A|}=(-1)^0+2\cdot(-1)^1+(-1)^2=0$.

注:写出其它子集族,并正确求和,也可.

（Ⅱ）记 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有不超过 k 个元素的子集族为 D_k.

（ⅰ）易知当 $D=D_2$ 时，$\sum\limits_{A\in D}(-1)^{|A|}$ 达到最大值，

所以 $f(2)=(-1)^0+C_n^1\cdot(-1)^1+C_n^2\cdot(-1)^2=\dfrac{n^2-3n+2}{2}$.

（ⅱ）设 D 是使得 $k=\max|A|$ 的任一个“向下封闭”的子集族,记 $D=D'\cup D''$,其中 D' 为不超过 $(k-2)$ 元的子集族,D'' 为 $(k-1)$ 元或 k 元的子集,则

$$\sum_{A\in D}(-1)^{|A|}=\sum_{A\in D'}(-1)^{|A|}+\sum_{A\in D''}(-1)^{|A|}\le f(k-2)+\sum_{A\in D''}(-1)^{|A|}.$$

现设 D'' 有 $l(l\le C_n^k)$ 个 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的 k 元子集,由于一个 $(k-1)$ 元子集至多出现在 $(n-k+1)$ 个 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的 k 元子集中,而一个 k 元子集中有 C_k^{k-1} 个 $(k-1)$ 元子集,故 l 个 k 元子集至少产生 $\dfrac{lC_k^{k-1}}{n-k+1}$ 个不同的 $(k-1)$ 元子集,故

$$\sum_{A\in D''}(-1)^{|A|}\le l-\frac{lC_k^{k-1}}{n-k+1}=l\left(1-\frac{C_k^{k-1}}{n-k+1}\right)\le C_n^k\left(1-\frac{k}{n-k+1}\right)\le C_n^k-C_n^{k-1},$$

所以 $\sum\limits_{A\in D}(-1)^{|A|}\le f(k-2)+C_n^k-C_n^{k-1}=f(k)$,

叠加,得 $f(k)=\sum\limits_{n=0}^{k}(-1)C_n^i$.