2024 北京密云高一（上）期末

数　学

2024.1

本试卷共 6 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5,11\}$， $B=\{3,5,11,12\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知命题 p： $\forall x\in\mathbf{R}$， $e^x>1$，那么命题 p 的否定为（　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$， $e^{x_0}\leq 1$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$， $e^x<1$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$， $e^{x_0}>1$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$， $e^x\leq 1$

3. 已知 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}-2$ 有（　）

A. 最大值 0　　B. 最小值 0

C. 最大值 -4　　D. 最小值 -4

4. 下列函数中，在其定义域上既是奇函数又是增函数的是（　）

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=2^x$

C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=-\frac{1}{x}$

5. 若 $a=\log_3\frac{1}{2}$， $b=\log_3 0.7$， $c=2^{0.8}$，则（　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

6. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的图象的一个对称中心是（　）

A. $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$　　C. $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$　　D. $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$

7. 近年来，密云区生物多样性保护成效显著，四百多种野生鸟类在密云繁衍生息，近万候鸟变留鸟，鸟类科学家发现，两岁燕子的飞行速度 v 可以表示为耗氧量 x 的函数 $v=a\log_2\frac{x}{10}$.若两岁燕子耗氧量达到 40 个单位时，其飞行速度为 $v=10\,\text{m/s}$，则两岁燕子飞行速度为 $20\,\text{m/s}$ 时，其耗氧量达到（　）

A. 80 个单位　　　B. 120 个单位　　　C. 160 个单位　　　D. 320 个单位

8. 已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”的一个充分而不必要条件是（　）

A. $a^2>b^2$　　　B. $2^a>2^b$

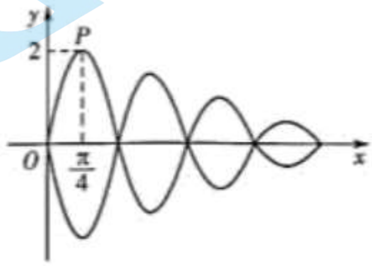
C. $\sin a>\sin b$　　　D. $ac^2>bc^2$

9. 设 $c\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+c, x\ge c\\ 2^x+\dfrac{1}{2}c, x<c\end{cases}$，若 $f(x)$ 恰有一个零点，则 c 的取值范围是（　）

A. $[-2,0]$　　　B. $\{0\}\cup(-\infty,-2]$

C. $[-1,0]$　　　D. $\{0\}\cup(-\infty,-1]$

10. 如图的曲线就像横放的葫芦的轴截面的边缘线，我们叫葫芦曲线（也像湖面上高低起伏的小岛在水中的倒影与自身形成的图形，也可以形象地称它为倒影曲线），它每过相同的间隔振幅就变化一次，且过点 $P\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$，其对应的方程为 $|y|=\left(2-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2x}{\pi}\right]\right)|\sin\omega x|$（$x\ge0$，其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，$0<\omega<5$）.若该葫芦曲线上一点 M 到 y 轴的距离为 $\dfrac{4}{3}\pi$，则点 M 到 x 轴的距离为（　）



A. $\dfrac{1}{4}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $8^{\frac{1}{3}}+\lg4+\lg25=$______.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x+2)$ 的定义域是______.

13. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $(9,3)$，则 $f(x)$ 的解析式是______.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=$______；若 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{n}\right)>0$（$n\in\mathbf{Z}$，且 $n\ne0$），则 n 的一个取值为______.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin \pi x}{x^2-x}$ 给出下列五个结论：

① $f\left(x\right)$ 存在无数个零点；

②不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left(2k-1,2k\right)$（$k\in \mathbf{Z}$）；

③ $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减；

④函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称；

⑤对 $\forall x\in\left[2k,2k+1\right]$（$k\in \mathbf{N}^*$），都有 $f\left(x+2k\right)\le f\left(x\right)$.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x\le 5\right\}$，$B=\left\{x\middle|m\le x\le 2m-1\right\}$.

（1）当 $m=4$ 时，求 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 和 $A\cup B$；

（2）若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

17. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（1）求 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值；

（2）求 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值；

（3）在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 为始边，已知角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称，求 $\cos\left(\alpha+\beta\right)$ 的值.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-\left(a+3\right)x+3a$.

（1）若不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left(0,3\right)$，求 a 的值；

（2）若不等式 $f\left(x\right)>-1$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>0$.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=2\cos\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.（$\omega>0$）

（1）求 $f\left(0\right)$；

（2）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f\left(x\right)$ 唯一确定，求 $f\left(x\right)$ 在区

间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上的最大值和最小值.

条件①：当$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=2$时，$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$；

条件②：函数$f\left(x\right)$的图象对称中心与相邻的对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{4}$；

条件③：函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$上单调递增.

注：如果选择的条件不符合要求.第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

20. 已知函数$f\left(x\right)=3^x+\left(a-1\right)\cdot 3^{-x}$.

（1）若$f\left(x\right)$为奇函数，

（i）求a的值，并说明理由；

（ii）比较$f\left(1\right)$与$f\left(3\right)$的大小；（结论不要求证明）

（2）若$\exists x_0\in\left[0,1\right]$，使得$f\left(x_0\right)\leqslant 6$，求$a$的取值范围.

21. 对于正整数集合$A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 3$）如果去掉其中任意一个元素.$a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合 A 为“和谐集”.

（1）判断集合$\left\{1,2,3,4,5\right\}$是否是“和谐集”，并说明理由；

（2）求证：若集合 A 是“和谐集”.则集合 A 中元素个数为奇数；

（3）若集合 A 是“和谐集”，求集合 A 中元素个数的最小值.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】C

【分析】求出 $A\cap B$，即可得出 $A\cap B$ 中元素的个数.

【详解】由题意，

$A=\{1,2,3,5,11\}$， $B=\{3,5,11,12\}$，

$A\bigcap B=\{3,5,11\}$，

故 $A\cap B$ 中元素的个数为 3，

故选：C.

2. 【答案】A

【分析】

由全称命题的否定是特称命题即可得解.

【详解】$\because$ 原命题是全称命题，

$\therefore$ 命题 p 的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R}$， $e^{x_0}\le 1$”.

故选：A.

【点睛】本题考查了全称命题的否定，属于基础题.

3. 【答案】B

【分析】利用基本不等式求最值即可得到结果.

【详解】因为 $x>0$，所以 $x+\dfrac{1}{x}-2\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-2=0$，当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=1$ 时等号成立.

故选：B.

4. 【答案】C

【分析】根据奇函数和增函数的性质即可得出结论.

【详解】由题意，

A 项，定义域为 $\mathbf{R}$， $f(-x)=-\sin x=-f(x)$ 为奇函数，函数 $f(x)$ 为周期函数不是增函数，故错误；

B 项，定义域为 $\mathbf{R}$， $f(-x)=2^{-x}$ 不为奇函数，故错误；

C 项，定义域为 $\mathbf{R}$， $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ 为奇函数，函数 $f(x)$ 为增函数，故正确；

D 项，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称， $f(-x)=\dfrac{1}{x}=-f(x)$ 为奇函数，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，但是在定义域上不是增函数，故错误；

故选：C.

5.【答案】A

【分析】根据对数函数的单调性即可比较 $a<b<0$，由指数的性质即可求解 $a<b<c$.

【详解】因为函数 $y=\log_3 x$ 在定义域上单调递增，所以 $a=\log_3\frac{1}{2}<\log_3 0.7=b<\log_3 1=0$，

所以 $a<b<0$，又 $c=2^{0.8}>0$，故 $a<b<c$.

故选：A

6.【答案】C

【分析】先得到 $g(x)$ 的解析式，整体法求解函数的对称中心，得到答案.

【详解】$g(x)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=1$ 时，$x=\frac{2\pi}{3}$，故 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 为 $g(x)$ 的一个对称中心，C 正确，

经检验，其他选项均不合要求.

故选：C

7.【答案】C

【分析】结合题意结合对数运算求得 $a=5$，然后列方程，利用指对互化求解即可.

【详解】因为两岁燕子耗氧量达到 40 个单位时，其飞行速度为 $v=10\mathrm{m/s}$，

所以 $10=a\log_2\frac{40}{10}=2a$，所以 $a=5$，所以 $v=5\log_2\frac{x}{10}$，

当两岁燕子飞行速度为 $20\mathrm{m/s}$ 时，$20=5\log_2\frac{x}{10}$，解得 $\frac{x}{10}=2^4$，所以 $x=160$，

即两岁燕子飞行速度为 $20\mathrm{m/s}$ 时，其耗氧量达到 160 个单位.

故选：C

8.【答案】D

【分析】根据函数单调性结合充分、必要条件逐项分析判断.

【详解】当 $a=-1,b=0$ 时，满足 $a^2>b^2$，但 $a>b$ 不成立，不满足充分性，A 选项错误；

由指数函数单调性可知，若 $2^a>2^b$，则 $a>b$，反之，若 $a>b$，则 $2^a>2^b$，

所以 $2^a>2^b$ 是 $a>b$ 的充要条件，B 选项错误；

当 $a=\frac{\pi}{3},b=\frac{5\pi}{6}$ 时，满足 $\sin a>\sin b$，但 $a>b$ 不成立，不满足充分性，C 选项错误；

若 $ac^2>bc^2$，则有 $a>b$，反之，$a>b$ 不能得到 $ac^2>bc^2$，比如当 $c=0$ 时，$ac^2>bc^2$ 不成立，

所以 $ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 的充分不必要条件，D 选项正确.

故选：D

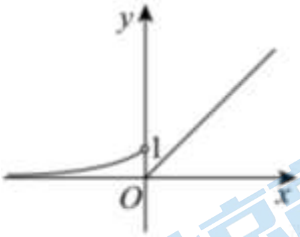
9.【答案】D

【分析】分类讨论，利用函数与方程的思想，结合函数性质及图象求解即可.

【详解】若$c>0$，当$x\ge c$时，$x+c\ge 2c>0$，此时函数$y=x+c$无零点，

当$x<c$时，$2^x+\frac{1}{2}c>\frac{1}{2}c>0$，此时函数$y=2^x+\frac{1}{2}c$无零点，所以$f\left(x\right)$没有一个零点，不合题意；

若$c=0$，$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$，画出函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$的图象如下图所示：



由图知当$c=0$时，函数$f(x)$恰有一个零点0，满足题意；

若$c<0$，当$x\ge c$时，由$x+c=0$得$x=-c$，此时函数$y=x+c$恰有一个零点$-c$，

要使函数$f(x)$恰有一个零点，则当$x<c$时，函数$y=2^x+\frac{1}{2}c$无零点，

即方程$2^x+\frac{1}{2}c=0$无解，又当$x<c$时，$2^x<2^c$，所以$2^c\le -\frac{c}{2}$，即$2^c+\frac{c}{2}\le 0$，

记$h\left(x\right)=2^x+\frac{x}{2}$，则函数$h\left(x\right)=2^x+\frac{x}{2}$单调递增，且$h\left(-1\right)=2^{-1}-\frac{1}{2}=0$，

所以$h\left(c\right)\le h\left(-1\right)$，所以$c\le -1$；

综上，c的取值范围是$\left\{0\right\}\cup\left(-\infty,-1\right]$.

故选：D

10.【答案】D

【分析】将$P\left(\frac{\pi}{4},2\right)$代入解析式得到$\omega=2$，得到解析式，代入$x=\frac{4}{3}\pi$求出答案.

【详解】将$P\left(\frac{\pi}{4},2\right)$代入$|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\pi}\right]\right)\left|\sin\omega x\right|$中得，

$\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2\times\frac{\pi}{4}}{\pi}\right]\right)\left|\sin\frac{\omega\pi}{4}\right|=2$，即$\left|\sin\frac{\omega\pi}{4}\right|=1$，

因为$0<\omega<5$，所以$0<\frac{\omega\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$，所以$\frac{\omega\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，解得$\omega=2$，

故 $|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\pi}\right]\right)|\sin 2x|$，

当 $x=\frac{4}{3}\pi$ 时，$|y|=\left(2-\frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}\right]\right)\left|\sin\frac{8}{3}\pi\right|=\left|\sin\frac{2}{3}\pi\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】4

【分析】根据对数运算和指数运算计算出答案.

【详解】$8^{\frac{1}{3}}+\lg 4+\lg 25=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}+\lg 4\times 25=2+\lg 100=2+2=4\cdot$

故答案为：4

12.【答案】$(-2,0)\cup(0,+\infty)$

【分析】根据分式函数分母不为零和对数函数的真数大于零列不等式组求解即可.

【详解】要使函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+2)$ 有意义，则 $\begin{cases}x\neq 0\\x+2>0\end{cases}$，解得 $x>-2$ 且 $x\neq 0$，

所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+2)$ 的定义域为 $(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

故答案为：$(-2,0)\cup(0,+\infty)$

13.【答案】 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

【分析】先设解析式 $f(x)=x^{\alpha}$，再由点 $(9,3)$ 代入求得 α，即得结果.

【详解】幂函数 $y=f(x)$ 可设为 $f(x)=x^{\alpha}$，图象过点 $(9,3)$，则 $f(9)=9^{\alpha}=3$，则 $\alpha=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

故答案为： $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

14.【答案】 ①. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ②. 2（答案不唯一）

【分析】由三角函数定义求解 $\sin\alpha$，根据特殊角的三角函数值求出角 α，然后求解正切函数不等式，根据题意写出答案即可.

【详解】因为角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以

$$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

由角 α 的终边在第二象限，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)>0$ 即 $\tan\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right)>0$，

所以 $k_1\pi<\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{n}<k_1\pi+\frac{\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z})$ 即 $k_1-\frac{3}{4}<\frac{1}{n}<k_1-\frac{1}{4}(k_1\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z})$，

故 n 的一个取值为2（答案不唯一，只要满足 $k_1-\frac{3}{4}<\frac{1}{n}<k_1-\frac{1}{4}(k_1\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z})$ 即可）.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$；2（答案不唯一）

15.【答案】①④⑤

【分析】解方程 $f(x)=0$ 判断①；利用特殊区间判断②；利用特殊值法可判断③；推导出 $f(1-x)=f(x)$ 判断④；利用单调性性质及不等式性质判断⑤.

【详解】对于①，由 $x^2-x\neq0$ 可得 $x\neq0$ 且 $x\neq1$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，

令 $f(x)=0$ 可得 $\sin\pi x=0$，则 $\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，且 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，

故 $x=k(k\in\mathbf{Z},k\neq0,k\neq1)$，所以函数 $f(x)$ 有无数个零点，①对；

对于②，当 $0<x<1$ 时，$x^2-x=x(x-1)<0$，此时 $0<\pi x<\pi$，则 $\sin\pi x>0$，

故当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\frac{\sin\pi x}{x^2-x}<0$，而 $(0,1)\not\subset(2k-1,2k)$（$k\in\mathbf{Z}$），②错；

对于③，$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sin\frac{3}{4}\pi}{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$，

因为 $\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2-\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{243}{16}-\frac{128}{9}=\frac{2187-2048}{144}>0$，即 $\frac{9\sqrt{3}}{4}>\frac{8\sqrt{2}}{3}$，故 $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{3}{4}\right)$，

故函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上不可能单调递减，③错；

对于④，对任意的 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，$f(1-x)=\frac{\sin(\pi-\pi x)}{(1-x)^2-(1-x)}=\frac{\sin\pi x}{x^2-x}=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，④对；

对于⑤，对 $\forall x\in[2k,2k+1]$（$k\in\mathbf{N}^*$），$x^2-x=x(x-1)>1\times0=0$，

则有 $2k\pi\le\pi x\le(2k+1)\pi\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，从而 $\sin\pi x\ge0$，

假设函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的最大值点为 x_0，则 $x_0\in[2k,2k+1]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，

因为函数 $y=x^2-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $y=x^2-x>0$，

对任意的 $x\in[2k,2k+1]\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $(x+2k)^2-(x+2k)>x^2-x>0$，

所以 $\frac{1}{x^2-x}>\frac{1}{(x+2k)^2-(x+2k)}>0$，

则 $f(x+2k)=\frac{\sin(\pi x+2k\pi)}{(x+2k)^2-(x+2k)}=\frac{\sin\pi x}{(x+2k)^2-(x+2k)}\le\frac{\sin\pi x}{x^2-x}=f(x)$，⑤对.

故答案为：①④⑤.

【点睛】关键点点睛：本题第③小问中函数的单调性不好判断，可分析出函数 $f(x)$ 的最值点所在的区间，并分析出函数 $f(x)$ 的图象是连续的，再结合最值定理来进行判断.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<4\text{ 或 }x>7\}$，$A\cup B=\{x|x\le7\}$

（2）$m\le3$

【分析】（1）根据补集和并集概念计算出答案；

（2）分 $B=\varnothing$ 与 $B\ne\varnothing$ 两种情况，得到不等式，求出实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

$m=4$ 时，$B=\{x|4\le x\le7\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<4\text{ 或 }x>7\}$，

$A\cup B=\{x|x\le5\}\cup\{x|4\le x\le7\}=\{x|x\le7\}$；

【小问 2 详解】

$B\subseteq A$，当 $B=\varnothing$ 时，$m>2m-1$，解得 $m<1$，

当 $B\ne\varnothing$ 时，$\begin{cases}m\le2m-1\\2m-1\le5\end{cases}$，解得 $1\le m\le3$，

故实数 m 的取值范围是 $m\le3$.

17.【答案】（1）$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

（2）$\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$

（3）-1

【分析】（1）利用同角三角函数关系及两角和的余弦公式计算即可；

（2）利用二倍角公式及两角和正弦公式计算即可；

（3）根据角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称求出 $\sin\beta,\cos\beta$，然后利用两角和的余弦公式计算即可.

【小问 1 详解】

因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$；

【小问 2 详解】

因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{25}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{24}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$；

【小问 3 详解】

因为角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称，

所以 $\sin\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=-1$.

18.【答案】（1）0

（2）$(1,5)$

（3）解集见解析

【分析】（1）根据一元二次不等式解集与一元二次方程根的关系解出 a 即可；

（2）根据一元二次不等式恒成立，即可由判别式求解；

（3）分解因式，结合分类讨论，即可由一元二次不等式解的特征求解.

【小问 1 详解】

因为不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(0,3)$，

所以方程 $x^2-(a+3)x+3a=0$ 的两根分别为 $x_1=0, x_2=3$，

根据韦达定理可知 $x_1+x_2=a+3=3$，$x_1x_2=3a=0$，解得 $a=0$；

【小问 2 详解】

不等式 $f(x)>-1$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $x^2-(a+3)x+3a+1>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $\Delta=(a+3)^2-4(3a+1)<0$，

即 $a^2-6a+5<0$，解得 $1<a<5$，所以实数 a 的取值范围为 $(1,5)$；

【小问 3 详解】

$f(x)=x^2-(a+3)x+3a>0$ 即 $(x-a)(x-3)>0$，

当 $a>3$ 时，不等式 $f(x)>0$ 的解为 $x>a$ 或 $x<3$，

当 $a<3$ 时，不等式 $f(x)>0$ 的解为 $x>3$ 或 $x<a$，

当 $a=3$ 时，不等式 $f(x)>0$ 的解为 $x\neq a$，

综上所述，当 $a>3$ 时，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,3)\cup(a,+\infty)$，

当 $a\le 3$ 时，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,a)\cup(3,+\infty)$.

19. 【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（2）见解析

【分析】（1）根据函数解析式，可得答案；

（2）根据三角恒等式化简函数解析式，由题意可得函数的最小正周期，结合正弦函数的单调性，可得答案.

【小问 1 详解】

$$f(0)=2\cos 0\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【小问 2 详解】

$$f(x)=2\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos\omega x\left(\sin\omega x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$=\cos\omega x\sin\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right).$$

若选①:

由题意可得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi$，

则 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}$，解得 $\omega=1$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，符合题意，

因 $-\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{6}, 0\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，则 $0\le f(x)\le 1$，

所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 时， $f(x)_{\min}=0, f(x)_{\max}=1$.

若选②:

由题意可得函数 $f\left(x\right)$ 的最小周期 $T=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$，

则 $T=\frac{2\pi}{2\omega}$，解得 $\omega=1$，故 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，符合题意，

因 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6},0\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，则 $0\le f\left(x\right)\le 1$，

所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 时， $f(x)_{\min}=0, f(x)_{\max}=1$.

若选③:

由 $-\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$，则 $-\frac{\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\le 2\omega x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\omega}{6}+\frac{\pi}{3}$

由题意可知 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le-\frac{\omega}{6}+\frac{\pi}{3}<\frac{5\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

显然 ω 不唯一，不符合题意.

20.【答案】（1）（i） $a=0$，理由见详解；（ii） $f\left(1\right)<f\left(3\right)$.

（2） $a\le 10$

【分析】（1）（i）由奇函数的定义 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$ 即可得到结果. （ii）分别计算出 $f\left(1\right)$ 与 $f\left(3\right)$ 的值进行比较即可.

（2）换元令 $t=3^{x_0},x_0\in\left[0,1\right]$， $t\in\left[1,3\right]$， $\exists x_0\in\left[0,1\right]$，使得 $f\left(x_0\right)\le 6$ 利用分离参数法可转化为 $a\le-t^2+6t+1$，只需 $a\le\left(-t^2+6t+1\right)_{\max}$ 即可.

【小问 1 详解】

（i） $a=0$，理由如下：

因为 $f\left(x\right)$ 为奇函数，所以 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，即 $3^x+\left(a-1\right)\cdot 3^{-x}+3^{-x}+\left(a-1\right)\cdot 3^x=0$，化简得 $a\cdot\left(3^x+3^{-x}\right)=0$，所以 $a=0$.

（ii） $f\left(1\right)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}, f\left(3\right)=27-\frac{1}{27}$，故 $f\left(1\right)<f\left(3\right)$.

【小问 2 详解】

$f\left(x\right)=3^x+\left(a-1\right)\cdot 3^{-x}$， $\exists x_0\in\left[0,1\right]$，使得 $f\left(x_0\right)\le 6$

令 $t=3^{x_0},x_0\in\left[0,1\right]$，所以 $t\in\left[1,3\right]$， $f\left(x_0\right)\le 6$ 可转化为 $a\le-t^2+6t+1$

只需 $a\le\left(-t^2+6t+1\right)_{\max}$ 即可，

令 $y=-t^2+6t+1, t\in[1,3]$，图象开口向下，对称轴 $t=3$

当 $t=3$ 时，$y_{\max}=10$，所以 $a\le 10$.

21.【答案】(1) 不是，理由见解析

(2) 证明见解析　(3) 7

【分析】(1) 根据集合中这 5 个数字的特征, 可以去掉 2 即可判断出集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 不是“和谐集”；

(2) 判断任意一个元素 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的奇偶性相同，分类讨论，可以证明出若集合 A 是“和谐集”，则集合 A 中元素个数为奇数；

(3) 由 (2) 知 n 为奇数，根据 n 的取值讨论后求解.

【小问 1 详解】

当集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 去掉元素 2 时，剩下元素组成两个集合的交集为空集有以下几种情况：

$\{1,3\},\{4,5\};\{1,4\},\{3,5\};\{1,5\},\{3,4\};\{1\},\{3,4,5\};\{3\},\{1,4,5\};\{4\},\{1,3,5\};\{5\},\{1,3,4\}$，

经过计算可以发现每给两个集合的所有元素之和不相等, 故集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 不是“和谐集”；

【小问 2 详解】

设正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\ge 3$）所有元素之和为 M，由题意可知 $M-a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为偶数，因此任意一个元素 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的奇偶性相同.

若 M 是奇数，所以 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）也都是奇数，由于 $M=a_1+a_2+\cdots+a_n$，显然 n 为奇数；

若 M 是偶数，所以 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）也都是偶数. 此时设 $a_i=2b_i$（$i=1,2,\cdots,n$），

显然 $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ 也是“和谐集”，重复上述操作有限次，便可以使得各项都为奇数的“和谐集”，

此时各项的和也是奇数，集合 A 中元素的个数也是奇数，

综上所述：若集合 A 是“和谐集”，则集合 A 中元素个数为奇数.

【小问 3 详解】

由 (2) 知集合 A 中元素个数为奇数，显然 $n=3$ 时，集合不是“和谐集”，

当 $n=5$ 时，不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，若 A 为“和谐集”，去掉 a_1 后，得 $a_2+a_5=a_3+a_4$，去掉 a_2 后，得 $a_1+a_5=a_3+a_4$，两式矛盾，故 $n=5$ 时，集合不是“和谐集”，

当 $n=7$，设 $A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$，去掉 1 后，$3+5+7+9=11+13$，

去掉 3 后，$1+9+13=5+7+11$，去掉 5 后，$9+13=1+3+7+11$，

去掉 7 后，$1+9+11=3+5+13$，去掉 9 后，$1+3+5+11=7+13$，

去掉 11 后，$3+7+9=1+5+13$，去掉 13 后，$1+3+5+9=7+11$，

故 $A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$ 是“和谐集”，元素个数的最小值为 7.

【点睛】关键点点睛：此题考查对集合新定义的理解和应用，考查理解能力，解题的关键是对“和谐集”的准确理解，运用分类讨论求解是常用方法，属于较难题.

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！