东城区 2016－2017 学年度第一学期期末教学统一检测

高三数学（文科）

2017.1

本试卷共 5 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|x(x-2)>0\}$，那么 $A\cap B=$

A. $\{x|-1<x<0\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|x<0$ 或 $x>2\}$

2. 在复平面内，复数 $z=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$，那么 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 3,\\ x-y\leqslant 2,\\ y\leqslant 2,\end{cases}$ 那么 $z=2x+y$ 的最小值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

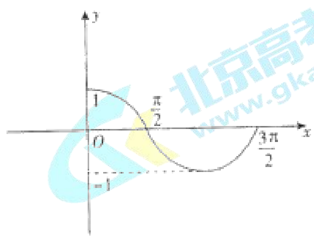
4. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$（其中 $\omega>0$，$-\pi<\varphi<\pi$）的部分图象如图所示. 那么 $f(x)$ 的解析式为

A. $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

B. $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$

C. $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

D. $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{2})$



5. 下列四个命题：

①$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0^2+2x_0+3=0$；

②命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\lg x_0>0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$，$\lg x<0$"；

③如果 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；

④"若 $\alpha=\beta$，则 $\sin\alpha=\sin\beta$"的逆否命题为真命题．其中正确的命题是

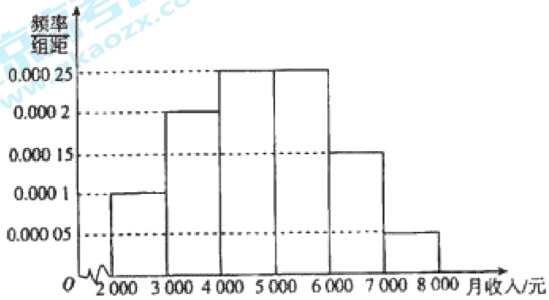
A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A，B 两点，它们的横坐标之和等于 3，则这样的直线

A. 有且仅有一条　　B. 有且仅有两条

C. 有无穷多条　　D. 不存在

7. 为征求个人所得税法修改建议，某机构调查了 10 000 名当地职工的月收入情况，并根据所得数据整理得到如下的频率分布直方图，下面三个结论：



① 估计样本的中位数为 4 800 元；

② 如果个税起征点调整至 5 000 元，估计有 50% 的当地职工会被征税；

③ 根据此次调查，为使 60% 以上的职工不用缴纳个人所得税，起征点应调整至 5 200 元．

其中正确结论的个数有

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 对于给定的正整数数列 $\{a_n\}$，满足 $a_{n+1}=a_n+b_n$，其中 b_n 是 a_n 的末位数字，下列关于数列 $\{a_n\}$ 的说法正确的是

A. 如果 a_1 是 5 的倍数，那么数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{2^n\}$ 必有相同的项

B. 如果 a_1 不是 5 的倍数，那么数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{2^n\}$ 必没有相同的项

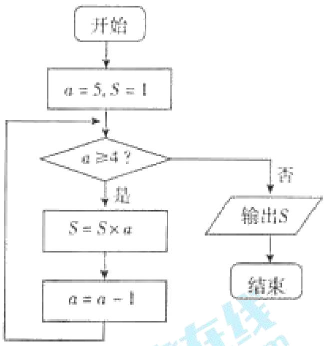
C. 如果 a_1 不是 5 的倍数，那么数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{2^n\}$ 只有有限个相同的项

D. 如果 a_1 不是 5 的倍数，那么数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{2^n\}$ 有无穷多个相同的项

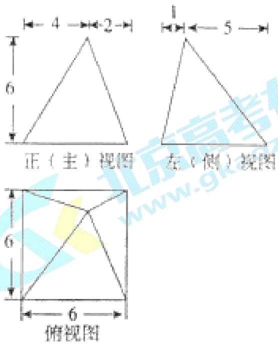
第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为____.



（9 题图）



（10 题图）

10. 一个四棱锥的三视图如图所示（单位：cm），这个四棱锥的体积为____cm^3.

11. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a=5,b=7,c=8$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于____.

12. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{7}=1(a>0)$ 的右焦点为圆 $(x-4)^2+y^2=1$ 的圆心，则此双曲线的离心率为____.

13. 每个航班都有一个最早降落时间和最晚降落时间，在这个时间窗口内，飞机均有可能降落. 甲航班降落的时间窗口为上午 10 点到 11 点，如果它准点降落时间为上午 10 点 40 分，那么甲航班晚点的概率是____；若甲乙两个航班在上午 10 点到 11 点之间共用一条跑道降落，如果两架飞机降落时间间隔不超过 15 分钟，则需要人工调度，在不考虑其他飞机起降的影响下，这两架飞机需要人工调度的概率是____.

14. 已知函数 $f(x)=|x|(x-a)+1$. 当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为____；若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有 3 个不同的零点，则 a 的取值范围为____.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.（本小题共 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其首项为 2，且公差为 2，若 $b_n=2^{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

（Ⅱ）设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 A_n.

16.（本小题共 13 分）

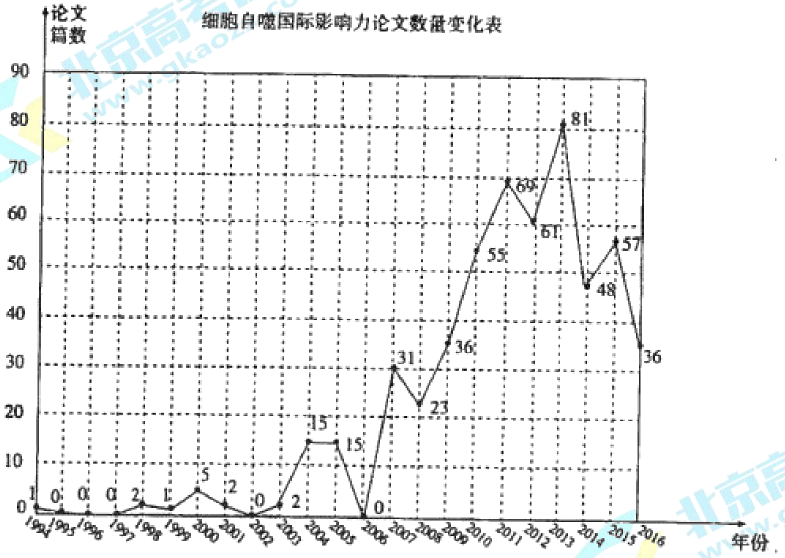
已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）如果点 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$是角 α 终边上一点，求 $f(\alpha)$的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+\sin x$，求 $g(x)$的单调增区间.

17.（本小题共 13 分）

2016 年 10 月 3 日，诺贝尔生理学或医学奖揭晓，获奖者是日本生物学家大隅良典，他的获奖理由是“发现了细胞自噬机制”. 在上世纪 90 年代初期，他筛选了上千种不同的酵母细胞，找到了 15 种和自噬有关的基因，他的研究令全世界的科研人员豁然开朗，在此之前，每年与自噬相关的论文非常少，之后呈现了爆发式增长，下图是从 1994 年到 2016 年所有关于细胞自噬具有国际影响力的 540 篇论文，分布如下：



（Ⅰ）从这 540 篇论文中随机抽取一篇来研究，那么抽到 2016 年发表的论文的概率是多少？

（Ⅱ）如果某年发表该领域有国际影响力的论文超过 50 篇，我们称这一年是该领域的论文“丰年”. 若从 1994 年到 2016 年中随机抽取连续的两年来研究，那么连续的两年中至少有一年是“丰年”的概率是多少？

（Ⅲ）由图判断，从哪年开始连续三年论文数量方差最大？（结论不要求证明）

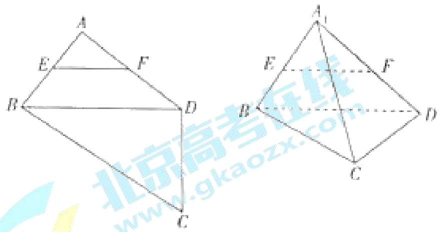
18.（本小题共 13 分）

已知$\triangle ABD$和$\triangle BCD$是两个直角三角形，$\angle BAD=\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，$E$、$F$分别是边$AB$、$AD$的中点，现将$\triangle ABD$沿$BD$边折起到$A_1BD$的位置，如图所示，使平面$A_1BD\perp$平面$BCD$.

（Ⅰ）求证：EF∥平面BCD；

（Ⅱ）求证：平面$A_1BC\perp$平面A_1CD；

（Ⅲ）请你判断，A_1C与BD是否有可能垂直，做出判断并写明理由.



19.（本小题共 14 分）

已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，离心率$e=\frac{1}{2}$，点$D(0,\sqrt{3})$在椭圆$E$上.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）设过点F且不与坐标轴垂直的直线交椭圆E于A，B两点，$\triangle DAF$的面积为$S_{\triangle DAF}$，$\triangle DBF$的面积为$S_{\triangle DBF}$，且$S_{\triangle DAF}:S_{\triangle DBF}=2:1$，求直线$AB$的方程.

20.（本小题共 14 分）

设函数$f(x)=x\cdot\ln x+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）求函数$y=f(x)$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最小值；

（Ⅲ）若$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x$，求证：$a\geq 0$是函数$y=g(x)$在$x\in(1,2)$时单调递增的充分不必要条件.

东城区 2016-2017 学年第一学期期末教学统一检测

高三数学参考答案及评分标准 （文科）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1） A　　（2） B　　（3） C　　（4） A

（5） D　　（6） B　　（7） C　　（8） D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9） 20　　（10） 72

（11） 44　　（12） $\frac{4}{3}$

（13） $\frac{1}{3}$； $\frac{7}{16}$　　（14） $(-\infty,+\infty)$，$\{a \mid 2\sqrt{2}-2<a<1\}$

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

（Ⅰ）证明：因为等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差都为 2，

所以 $a_n=2+(n-1)2=2n$，

又因为 $b_n=2^{2n}$，

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}=4$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项和公比的等比数列；　　…………………8 分

（Ⅱ）解：因为 $c_n=a_n+b_n=2n+4^n$，

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{2+2n}{2}\cdot n=n(n+1)$，

等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{4(1-4^n)}{1-4}=\frac{4}{3}(4^n-1)$

所以 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $A_n=S_n+T_n=n(n+1)+\frac{4}{3}(4^n-1)$.　　…………13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知：$\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=\frac{3}{5}$　　---2 分

$\therefore f(\alpha)=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　---6 分

（Ⅱ） $g(x)=(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)+\sin x$

$=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)$ ------------8 分

$=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})$ -----------10 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 得：$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ---12 分

$\therefore g(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ --13 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设抽到2016年发表的论文为事件 A，依题意可知，

$P(A)=\frac{36}{540}=\frac{1}{15}$； ·········5 分

（Ⅱ）设至少抽到一个“丰年”为事件 B，依题意可知，

1994-2016的23年中随机抽取连续两年共有22种可能，

至少一个“丰年”的可能情况有：2009-2010，2010-2011，2011-2012，2012-2013，

2013-2014，2014-2015，2015-2016 共计 7 种可能，

$P(B)=\frac{7}{22}$； ·········11 分

（Ⅲ）81，48，57 三个数方差最大，

所以从 2013 年开始，连续三年论文数方差最大. ·········13 分

（18）（共 13 分）

（Ⅰ）因为 E、F 分别是边 AB、AD 的中点，

所以 $EF/\!/BD$

因为 $EF\not\subset$ 平面 BCD，$BD\subset$ 平面 BCD，

所以 $EF/\!/$ 平面 BCD. -----4

分

（Ⅱ）因为平面 $A_1BD\perp$ 平面 BCD，

平面 $A_1BD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$CD \subset$ 平面 BCD，

$CD \perp BD$，

所以 $CD \perp$ 平面 A_1BD．

因为 $A_1B \subset$ 平面 A_1BD，

所以 $CD \perp A_1B$，

因为 $A_1B \perp A_1D$， $A_1D \cap CD = D$，

所以 $A_1B \perp$ 平面 A_1CD．

因为 $A_1B \subset$ 平面 A_1BC，

所以平面 $A_1BC \perp$ 平面 A_1CD． ----10 分

（Ⅲ）结论：A_1C 与 BD 不可能垂直．

理由如下：

假设 $A_1C \perp BD$，

因为 $CD \perp BD$， $A_1C \cap CD = C$，

所以 $BD \perp$ 平面 A_1CD，

因为 $A_1D \subset$ 平面 A_1CD，

所以 $BD \perp A_1D$ 与 $A_1B \perp A_1D$ 矛盾，故 A_1C 与 BD 不可能垂直． --------13 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $b = \sqrt{3}, e = \frac{1}{2}$，

所以 $a = 2$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$． --- 4 分

（Ⅱ）设直线 AB 的方程为 $x = ty + 1(t \neq 0)$， 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，

整理得 $(3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0$

因为直线 AB 过椭圆的右焦点，

所以方程有两个不等实根．

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$，

因为 $S_{\Delta DAF}:S_{\Delta DBF}=2:1$，

所以 $AF=2FB$，

所以 $y_1=-2y_2$，

解得 $t=\dfrac{\pm2\sqrt{5}}{5}$，

∴ 直 线 AB 的 方 程 为 $x=\dfrac{\pm2\sqrt{5}}{5}y+1$

--------------------- 14 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=x\cdot\ln x+ax$ 得 $f'(x)=\ln x+a+1$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\ln x+2$，$f(1)=1$，$f'(1)=2$，

求得切线方程为 $y=2x-1$

……………………4 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=0$ 得 $x=e^{-(a+1)}$.

∴ 当 $e^{-(a+1)}\le\dfrac{1}{e}$，即 $a\ge0$ 时，$x\in[\dfrac{1}{e},e]$ 时 $f'(x)\ge0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{e})=\dfrac{a-1}{e}$.

当 $e^{-(a+1)}\ge e$，即 $a\le-2$ 时，$x\in[\dfrac{1}{e},e]$ 时 $f'(x)\le0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递减，

此时 $f(x)_{\min}=f(e)=ae+e$.

当 $\dfrac{1}{e}<e^{-(a+1)}<e$，即 $-2<a<0$ 时，$x\in[\dfrac{1}{e},e^{-(a+1)})$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；

$x\in(e^{-(a+1)},e)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，此时 $f(x)_{\min}=f(e^{-(a+1)})=-e^{-(a+1)}$.

……………………9 分

（Ⅲ）$g'(x)=f'(x)+ax-(2a+1)=\ln x+ax-a=\ln x+a(x-1)$.

∴ 当 $a\ge0$ 时，$x\in(1,2)$ 时 $\ln x>0$，$a(x-1)\ge0$，$g'(x)>0$ 恒成立，

函数 $y=g(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 时单调递增，充分条件成立；

又当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，代入 $g'(x)=\ln x+a(x-1)=\ln x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

设 $h(x)=g'(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$x\in(1,2)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-x}{2x}>0$ 恒成立

$\therefore$ 当 $x\in(1,2)$ 时，$h(x)$ 单调递增.

又 $h(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(1,2)$ 时，$h(x)>0$ 恒成立.

而 $h(x)=g'(x)$，

$\therefore$ 当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，函数 $y=g(x)$ 单调递增.

$\therefore$ 必要条件不成立

综上，$a\geq 0$ 是函数 $y=g(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 时单调递增的充分不必要条件. ……………………14 分