

2023~2024 学年度第一学期四校联考（三）

数学试卷

命题学校：珠海市实验中学 命题：张平 审题：樊文联

说明：本试卷共 4 页，22 道题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集为 $U=\mathbb{R}$ ，集合 $B=\left\{x\left|\frac{1}{x}+1\geq 0\right.\right\}$ ，则 $\complement_U B =$ ()
A. $\{x|-1 < x < 0\}$ B. $\{x|-1 \leq x < 0\}$ C. $\{x|-1 < x \leq 0\}$ D. $\{x|-1 \leq x \leq 0\}$
2. “ $x < 0$ ”是“ $\ln(x+1) < 0$ ”的 () 条件
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
3. 复数 z 满足： $(z-2)\cdot i = z$ (i 为虚数单位)， \bar{z} 为复数 z 的共轭复数，则下列说法正确的是 ()
A. $z^2 = 2i$ B. $z\cdot\bar{z} = 2$ C. $|z| = 2$ D. $z + \bar{z} = 0$
4. 已知 m, n 为两条不同的直线， α, β 为两个不同的平面，则下列说法正确的是 ()
A. 若 $m // n, n \subset \alpha$ ，则 $m // \alpha$ B. 若 $m // \alpha, n \subset \alpha$ ，则 $m // n$
C. 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m // n$ ，则 $\alpha // \beta$ D. 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha$ ，则 $m // \beta$
5. 在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，若 $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ ， $\overline{BF} = \overline{FC}$ ，则 $\overline{BE} \cdot \overline{AF} =$ ()
A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{8}{3}$ D. -2
6. 已知实数 $a = \log_2 3$ ， $b = \cos \frac{\pi}{4}$ ， $c = \log_3 2$ ，则这三个数的大小关系正确的是 ()
A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$
7. 有一塔形几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点，已知最底层正方体的棱长为 2，且该塔形的表面积（不含最底层正方体

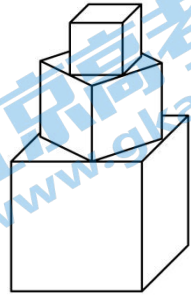
的底面面积) 超过 34, 则该塔形中正方体的个数至少是 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

8. 已知 $a > 1$, x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点, $x_1 < x_2 < x_3$,

若 $x_1 + x_3 = 2x_2$, 则 ()

- A. $\frac{x_3}{x_2} < 2\ln a$ B. $\frac{x_3}{x_2} = 2\ln a$ C. $\frac{x_3}{x_2} > 2\ln a$ D. $\frac{x_3}{x_2}$ 与 $2\ln a$ 大小关系不确定



二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_5 = 3$, $S_3 = -9$, 则有 ()

- A. $a_1 = -5$ B. $a_4 < 0$ C. $S_6 = 0$ D. $S_3 < S_4$

10. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式正确的是 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $a^2 + a < b^2 + b$ C. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a - \left(\frac{1}{2}\right)^b < 0$

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴, 给出下列四个结论, 正确的是 ()

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点 B. $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$
 C. ω 的取值范围是 $\left[\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right)$ D. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{15}\right)$ 上单调递增

12. 若函数 $f(x) = \ln x + a(x^2 - 2x + 1)$ ($a \in R$) 存在两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 至少有一个零点 B. $a < 0$ 或 $a > 2$
 C. $0 < x_1 < \frac{1}{2}$ D. $f(x_1) + f(x_2) > 1 - 2\ln 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

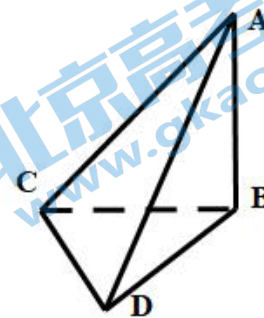
13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0 \\ a - 2^{bx}, & x < 0 \end{cases}$ 为 R 上的奇函数, 则实数 $b =$ _____.

14. 若曲线 $y = x^3 + ax$ 在点 $(1, a+1)$ 处的切线方程为 $y = 7x + m$, 则 $m =$ _____.

15. 如图, 某市人民广场正中央有一座铁塔, 为了测量塔高 AB , 某人先在塔的正西方的点 C 处测

得塔顶的仰角为 45° ，然后从点 C 处沿南偏东 30° 方向前进 60m 到达点

D 处，在 D 处测得塔顶的仰角为 30° ，则铁塔 AB 的高度是_____m.



16. 已知平面内非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a} \cdot \vec{b}=1$,

若 $\vec{c}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2 = 0$ ，则 $|\vec{c} - \vec{a}|$ 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n ， $a_1, 4a_3 - 1, 2S_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = a_n + \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题 12 分)

设函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x - \frac{\pi}{2})$ ，其中 $0 < \omega < 3$ ，已知 $f(\frac{\pi}{6}) = 0$.

(1) 求 ω ；

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变)，再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $y = g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 的单调递减区间.

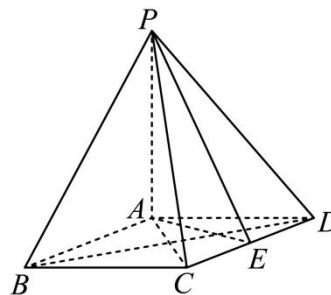
19. (本小题 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为菱形， E 为 CD 的中点.

(1) 求证： $BD \perp$ 平面 PAC ；

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAE ；

(3) 棱 PB 上是否存在点 F ，使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ？说明理由.



20. (本小题 12 分)

某群体的人均通勤时间,是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时,某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤,分析显示:当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时,自驾群体的人均通勤时间 $f(x)$ (单位:分钟)与 x 的函数关系为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases}$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响,恒为 40 分钟,试根据上述分析结果回答下列问题:

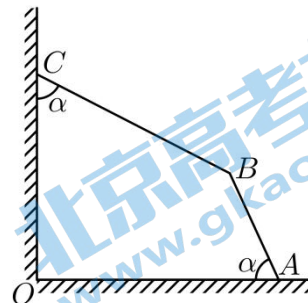
- (1) 当 x 在什么范围内时,公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?
- (2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式,讨论 $g(x)$ 的单调性,并说明其实际意义.

21. (本小题 12 分)

某公园要建造如图所示的绿地 $OABC$, OA, OC 为互相垂直的墙体,已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为 12 米且 $\angle BAO = \angle BCO$, 设

$$\angle BAO = \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}).$$

- (1) 当 $AB = 3, \alpha = \frac{\pi}{3}$ 时,求 OB 的长;
- (2) 当 $AB = 6$ 时,求 $OABC$ 面积 S 的最大值及此时 α 的值.



22. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{e^x}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$,

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $x \geq 0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x) \leq \frac{a^2}{e}$ 恒成立,求实数 a 的取值范围. (注: $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数)