2023 北京十三中高一（上）期中

数　学

2023 年 11 月

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷第 1 页至第 2 页；第Ⅱ卷第 3 页至第 5 页，答题纸第 1 页至第 3 页．共 150 分，考试时间 120 分钟．请在答题纸规定处书写班级、姓名、准考证号．考试结束后，将本试卷的答题纸按页码顺序一并交回．

一、选择题

1. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>0\}$，$B=\{x\mid x\le 1\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$（　　）

A. $\{x\mid 0\le x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\le 1\}$

C. $\{x\mid x<0\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

2. 若 $a>b$，则一定有（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $|a|>|b|$　　C. $\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}$　　D. $a^3>b^3$

3. 函数 $f(x)=\frac{3}{x}-x^2$ 零点所在的一个区间是（　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

4. 已知 $x>0$，则 $x+\frac{1}{2x}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $f(x)=|x|+2$　　B. $f(x)=3^{-x}$

C. $f(x)=\sqrt{x}$　　D. $f(x)=-x^2+1$

6. 命题 $p:\frac{1}{x-1}>1$，$q:|2x-1|<3$，则 p 是 q 的______条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

7. 已知命题“$\exists x\in\mathrm{R}$，使得 $ax^2-2ax+3\le 0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $0\le a\le 3$　　B. $0<a<3$

C. $0<a\le 3$　　D. $0\le a<3$

8. 设集合 $A=\{x\,\|x-a|=1\}$，$B=\{1,-3,b\}$，若 $A\subseteq B$，则对应的实数对 (a,b) 有

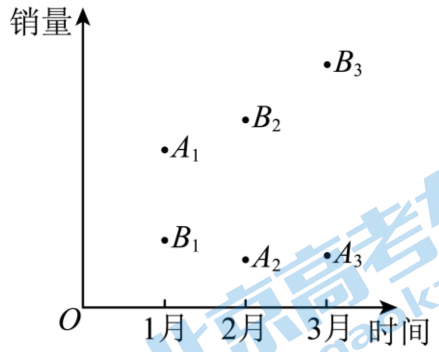
A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

9. 设常数 a∈R，集合 A={x|（x﹣1）（x﹣a）≥0}，B={x|x≥a﹣1}，若 A∪B=R，则 a 的取值范围为

（　　）

A.（$-\infty$，2）　　　　B.（$-\infty$，2]　　　　C.（2，$+\infty$）　　　　D. [2，$+\infty$）

10. 如图为某商铺A、B两种商品在2022年前3个月的销售情况统计图，已知A商品卖出一件盈利20元，B商品卖出一件盈利10元.图中点A_1、A_2、A_3的纵坐标分别表示A商品2022年前3个月的销售量，点B_1、B_2、B_3的纵坐标分别表示B商品2022年前3个月的销售量.根据图中信息，下列四个结论中正确的是（　）



①2月A、B两种商品的总销售量最多；

②3月A、B两种商品的总销售量最多；

③1月A、B两种商品的总利润最多；

④2月A、B两种商品的总利润最多.

A. ①③　　　　B. ①④　　　　C. ②③　　　　D. ②④

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2^x}$ 的定义域是______.

12. 方程组$\begin{cases}x+y=0\\x^2+x=2\end{cases}$的解集是______.

13. 已知 $f(x+1)=x^2$，则 $f(3)=$_______.

14. 已知不等式$ax^2-5x+b>0$的解集为$\{x|-3<x<2\}$，则不等式$bx^2-5x+a>0$的解集为

___________.

15. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，若 $f(-2)=0$，则 $f(x)<0$ 的解集为______.

16. 设关于x的不等式$ax^2-2x+a\le 0$的解集为S.

（1）若S中有且只有一个元素，则a的值为__________；

（2）若 $0\in S$ 且 $-1\notin S$，则a的取值范围是___________.

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & -2\le x\le c,\\ \dfrac{1}{x}, & c<x\le 3.\end{cases}$ 若$c=0$，则 $f(x)$的值域是____；若 $f(x)$的值域是 $\left[-\dfrac{1}{4},2\right]$，则实数$c$的取值范围是____.

18. 某厂商为推销自己品牌的可乐，承诺在促销期内，可以用 3 个该品牌的可乐空罐换 1 罐可乐.对于此促销活动，有以下三个说法：

①如果购买 10 罐可乐，那么实际最多可以饮 13 罐可乐;

②欲饮用 100 罐可乐，至少需要购买 67 罐可乐：

③如果购买 $n(n\in \mathbf{N}^*)$ 罐可乐，那么实际最多可饮用可乐的罐数 $f(n)=n+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

则所有正确说法的序号是__________.

三、解答题

19. 已知 a，$b\in \mathrm{R}$，试比较 a^3-b^3 与 ab^2-a^2b 的大小，并证明.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 是奇函数;

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义加以证明.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2+x$ 定义在区间 $[0,2]$ 上，其中 $a\in[-2,0]$.

（1）若 $a=-1$，求 $f(x)$ 的最小值;

（2）求 $f(x)$ 的最大值.

22. 已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$.

（1）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集;

（2）已知 $a>0$，且 $f(x)\geq 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围;

（3）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1，x_2，求 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围.

23. 经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1 吨该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1 吨亏损 300 元.经销商为下一个销售季度购进了 130 吨该农产品.以 x（单位：吨，$100\leq x\leq 150$）表示下一个销售季度内的市场需求量，y（单位：元）表示下一个销售季度内销售该农产品的利润.

（*I*）将 y 表示为 x 的函数：

（*II*）求出下一个销售季度利润 y 不少于 57000 元时，市场需求量 x 的范围.

24. 已知集合 P 的元素个数为 $3n\left(n\in N^*\right)$ 且元素均为正整数，若能够将集合 P 分成元素个数相同且两两没有公共元素的三个集合 A、B、C，即 $P=A\cup B\cup C$，$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，且满足 $c_1<c_2<\cdots<c_n$，$a_k+b_k=c_k$，$k=1$、2、$\cdots$、n，则称集合 P 为“完美集合”.

（1）若集合 $P=\{1,2,3\}$，$Q=\{1,2,3,4,5,6\}$，判断集合 P 和集合 Q 是否为“完美集合”？并说明理由;

（2）已知集合 $P=\{1,x,3,4,5,6\}$ 为“完美集合”，求正整数 x 的值；

（3）设集合 $P=\left\{x\middle|1\le x\le 3n,n\in N^*\right\}$，证明：集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1\left(k\in N^*\right)$.

参考答案

一、选择题

1. 【答案】D

【分析】根据题意结合集合间的运算求解.

【详解】因为 $B=\{x\mid x\le 1\}$，则 $\complement_U B=\{x\mid x>1\}$，

所以 $A\cap(\complement_U B)=\{x\mid x>1\}$.

故选：D.

2. 【答案】D

【分析】

利用不等式的性质或反例逐项检验后可得正确的选项.

【详解】取 $a=1,b=-1$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$|a|=|b|$，$\sqrt{a^2}=\sqrt{b^2}$，故 A、B、C 均错误，

由不等式的性质可得 $a^3>b^3$，故 D 正确.

故选：D.

3. 【答案】C

【分析】利用零点存在性定理判断零点所在区间即可.

【详解】由解析式知：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒负，故不存在零点，在 $(0,+\infty)$ 上递减，

而 $f(1)=\frac{3}{1}-1^2=2>0$，$f(2)=\frac{3}{2}-2^2=-\frac{5}{2}<0$，

$(0,1)$ 内 x 趋向于 0 时，$f(x)$ 趋向正无穷，而 x 趋向于正无穷时，$f(x)$ 趋向负无穷.

综上，零点所在的一个区间是 $(1,2)$.

故选：C

4. 【答案】B

【分析】利用基本不等式即可求解.

【详解】因为 $x>0$，$2x>0$，由基本不等式，$x+\frac{1}{2x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{2x}}=\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\frac{1}{2x}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

故选:B.

5. 【答案】A

【分析】由偶函数、增函数的定义对选项一一判断即可得出答案.

【详解】对于 A，$f(x)=|x|+2$ 的定义域为 R，关于原点对称，

$f(-x)=|-x|+2=|x|+2=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x+2$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确；

对于 B，$f(x)=3^{-x}$ 的定义域为 R，关于原点对称，

$f(-x)=3^{x}\neq f(x)$，所以 $f(x)$ 不是偶函数，故 B 错误；

对于 C，$f(x)=\sqrt{x}$ 的定义域为 $\{x|x\geq 0\}$，不关于原点对称，

所以 $f(x)$ 不是偶函数，故 C 错误；

对于 D，$f(x)=-x^{2}+1$ 的定义域为 R，关于原点对称，

$f(-x)=-x^{2}+1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，

又 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 错误.

故选：A.

6.【答案】A

【分析】解分式不等式和绝对值不等式，进而求出 p 是 q 的充分不必要条件.

【详解】$\frac{1}{x-1}>1\Rightarrow\frac{1}{x-1}-1>0\Rightarrow\frac{2-x}{x-1}>0$，解得 $1<x<2$，

$|2x-1|<3$，即 $-3<2x-1<3$，解得 $-1<x<2$，

因为 $1<x<2\Rightarrow -1<x<2$，但 $-1<x<2\not\Rightarrow 1<x<2$，

故 p 是 q 的充分不必要条件.

故选：A

7.【答案】D

【分析】由题设 $\forall x\in R$，使得 $ax^{2}-2ax+3>0$ 为真，结合一元二次不等式在实数集上恒成立列不等式组求参数范围，注意讨论 $a=0$ 的情况.

【详解】由题设，$\forall x\in R$，使得 $ax^{2}-2ax+3>0$ 为真，

所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^{2}-12a<0\end{cases}\Rightarrow 0<a<3$.

又 $a=0$ 时 $ax^{2}-2ax+3=3>0$ 恒成立，

综上，$0\leq a<3$.

故选：D

8.【答案】D

【分析】

先解出 A，再讨论包含关系（注意集合元素互异性），解出数对.

【详解】解：因为集合 $A=\{x||x-a|=1\}$，

所以 $A=\{a-1,\ a+1\}$，

因为 $B=\{1,\ -3,\ b\}$，$A\subseteq B$，

所以 $a-1=1$，或 $a-1=-3$，或 $a-1=b$，

①当 $a-1=1$ 时，即 $a=2$，$A=\{1，3\}$，此时可知 $B=\{1，-3，3\}$，成立，即 $a=2$，$b=3$；

②当 $a-1=-3$ 时，即 $a=-2$，$A=\{-3，-1\}$，此时可知 $B=\{1，-3，-1\}$，成立，即 $a=-2$，$b=-1$；

③当 $a-1=b$ 时，则 $a+1=1$ 或 -3：

当 $a+1=1$ 时，即 $a=0$，$A=\{-1，1\}$，此时可知 $B=\{1，-3，-1\}$，成立，即 $a=0$，$b=-1$；

当 $a+1=-3$ 时，即 $a=-4$，$A=\{-5，-3\}$，此时可知 $B=\{1，-3，-5\}$，成立，即 $a=-4$，$b=-5$；

综上所述：$a=2$，$b=3$，或 $a=-2$，$b=-1$，或 $a=0$，$b=-1$，或 $a=-4$，$b=-5$，共 4 对.

故选：D.

【点睛】本题考查集合关系，综合集合元素互异性，属于基础题.

9. 【答案】B

【详解】试题分析：当 $a=1$ 时，$A=R$，此时 $A\cup B=R$ 成立，当 $a>1$ 时，$A=[a,+\infty)\cup(-\infty,1]$，当 $A\cup B=R$ 时，$a-1\le 1\Rightarrow a\le 2$，即 $(1,2]$，当 $a<1$ 时，$A=[1,+\infty)\cup(-\infty,a]$，当 $A\cup B=R$ 时，$a-1\le a$ 恒成立，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$，故选 B.

考点：集合的关系

10. 【答案】C

【分析】对①②，根据统计图的相关点纵坐标高低判断即可；

对③④，根据 A 利润是 B 的两倍，根据卖得更多的商品判断利润高低即可

【详解】对①②，根据统计图可得，B_3，A_3 的纵坐标之和显然最大，故 3 月 A 、B 两种商品的总销售量最多；故②正确；

对③④，因为 A 商品卖出一件盈利 20 元，B 商品卖出一件盈利 10 元，根据统计图，若用对应的点表示对应点的纵坐标，则易得 $20A_1+10B_1>20A_3+10B_3>20A_2+10B_2$，故③正确

综上②③正确

故选：C.

二、填空题

11. 【答案】$(-\infty,0]$

【分析】根据二次根式的意义和指数函数的性质即可求解.

【详解】由题意知，$1-2^x\ge 0\Rightarrow 2^x\le 1=2^0$，

又函数 $y=2^x$ 在 R 上单调递增，所以 $x\le 0$，

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

故答案为：$(-\infty,0]$.

12. 【答案】$\{(-2,2),(1,-1)\}$

【分析】解方程求方程组的解，进而写出解集.

【详解】由 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$，可得 $x=-2$ 或 $x=1$，

当 $x=-2$ 时，$x+y=-2+y=0$，即 $y=2$；

当 $x=1$ 时，$x+y=1+y=0$，即 $y=-1$；

所以原方程的解集为 $\{(-2,2),(1,-1)\}$.

故答案为：$\{(-2,2),(1,-1)\}$

13. 【答案】4

【分析】应用换元法求 $f(x)$ 的解析式，再求 $f(3)$ 即可.

【详解】令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，

$\therefore f(t)=(t-1)^2$，即 $f(x)=(x-1)^2$.

$\therefore f(3)=(3-1)^2=4$.

故答案为：4

14. 【答案】$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【分析】由题意可知，-3 和 2 是方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根，再结合韦达定理以及十字相乘法，即可得解.

【详解】解：由题意可知，-3 和 2 是方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根，且 $a<0$，

$\therefore -3+2=\dfrac{5}{a}$，$(-3)\times 2=\dfrac{b}{a}$，$\therefore a=-5$，$b=30$，

$\therefore$ 不等式 $bx^2-5x+a>0$ 为 $30x^2-5x-5>0$，

即 $5(3x+1)(2x-1)>0$，

解得 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{3}$. 即不等式的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

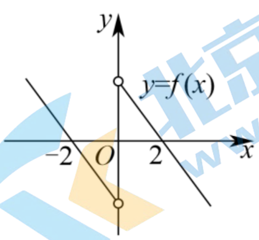
故答案为：$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

15. 【答案】$\{x|-2<x<0$ 或 $x>2\}$

【分析】根据函数的奇偶性和单调性，结合图形，即可求解.

【详解】由题意知，奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，$f(-2)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，如图，



由图可知，$f(x)<0$ 的解集为 $\{x|-2<x<0$ 或 $x>2\}$.

故答案为：$\{x|-2<x<0$ 或 $x>2\}$.

16.【答案】 ①. 1 ②. $-1<a\le 0$

【分析】(1) 由题意，不等式 $ax^2-2x+a\le 0$ 的解集只有一个元素，利用开口方向和判别式控制，列出不等关系，即得解；

(2) 由 $0\in S$ 且 $-1\notin S$，列出不等关系 $a\le 0, a\times(-1)^2-2\times(-1)+a>0$，求解即可

【详解】(1) 由题意，不等式 $ax^2-2x+a\le 0$ 的解集只有一个元素

故 $a>0, \Delta=(-2)^2-4a^2=0$，解得 $a=1$

(2) 由题意，$0\in S$ 且 $-1\notin S$

故 $a\le 0, a\times(-1)^2-2\times(-1)+a>0$，解得 $-1<a\le 0$

故答案为：1，$-1<a\le 0$

17.【答案】 ①. $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$ ②. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

【详解】若 $c=0$，由二次函数的性质，可得 $x^2+x\in\left[-\frac{1}{4},2\right], \frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$，$\therefore f\ \ x$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$，若 $f(x)$ 值域为 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$，$\because x=-2$ 时，$x^2+x=2$ 且 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$x^2+x=-\frac{1}{4}$，要使 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$，则 $\begin{cases} c>0 \\ c^2+c\le 2 \\ \frac{1}{c}\le 2 \end{cases}$，得 $\frac{1}{2}\le c\le 2$，实数 c 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right]$，故答案为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

18.【答案】②③.

【分析】

①10 罐可乐有 10 个可乐空罐，第一次可换 3 罐可乐还剩 1 个空罐，第二次可换 1 罐可乐还剩 2 个空罐，由此算出最多可饮用的可乐罐数；

②：先分析购买 66 罐可乐的情况，再分析购买 67 罐可乐的情况，由此确定出至少需要购买的可乐罐数；

③：先分析购买 1 到 9 罐可乐分别可饮用多少罐可乐以及剩余空罐数，然后得到规律，再分奇偶罐数对所得到的规律进行整理，由此计算出 $f(n)$ 的结果.

【详解】①：购买 10 罐可乐时，第一次可换 3 罐还剩 1 个空罐，第二次可换 1 罐还剩 2 个空罐，所以最多可饮用 $10+3+1=14$ 罐可乐，故错误；

②：购买 66 罐时，第一次可换 22 罐可乐，第二次可换 7 罐可乐还剩 1 个空罐，

第三次可换 2 罐可乐还剩 2 个空罐，第四次可换 1 罐可乐还剩 2 个空罐，所以一共可饮用

$66+22+7+2+1=98$ 罐；

购买67罐时，第一次可换22罐可乐还剩1个空罐，第二次可换7瓶可乐还剩2个空罐，

第三次可换3罐可乐，第四次可换1罐可乐还剩1个空罐，所以一共可饮用$67+22+7+3+1=100$罐；

所以至少需要购买67罐可乐，故正确；

③：购买1到9罐可乐分别可饮用可乐罐数以及剩余空罐数如下表所示：

购买数	饮用数	剩余空罐数
1	1	1
2	2	2
3	4	1
4	5	2
5	7	1
6	8	2
7	10	1
8	11	2
9	13	1

由表可知如下规律：

（1）当购买的可乐罐数为奇数时，此时剩余空罐数为1，当购买的可乐罐数为偶数时，此时剩余的空罐数为2；

（2）实际饮用数不是3的倍数；

（3）每多买2罐可乐，可多饮用3罐可乐，

（4）实际饮用的可乐罐数要比购买的可乐罐数的1.5倍少0.5或1；

设购买了n罐可乐，实际可饮用的可乐罐数为$f\left(n\right)$，

所以 $f\left(n\right)=\begin{cases}3m-2\left(n=2m-1,m\in N^{*}\right)\\3m-1\left(n=2m,m\in N^{*}\right)\end{cases}$，即 $f\left(n\right)=\begin{cases}\dfrac{3n-1}{2}\left(n=2m-1,m\in N^{*}\right)\\\dfrac{3n-2}{2}\left(n=2m,m\in N^{*}\right)\end{cases}$，即

$f\left(n\right)=\begin{cases}n+\dfrac{n-1}{2}\left(n=2m-1,m\in N^{*}\right)\\n+\dfrac{n-2}{2}\left(n=2m,m\in N^{*}\right)\end{cases}$，

又因为$\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n-2}{2}$可看作$\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，即不大于$\dfrac{n-1}{2}$的最大整数，所以$f(n)=n+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$成立，故正确；

故答案为：②③.

【点睛】关键点点睛：解答本题时，一方面需要通过具体购买的可乐罐数去分析实际饮用的可乐罐数，另一方面需要对实际的购买情况进行归纳，由此得到购买的可乐罐数与实际饮用的可乐罐数的关系，从而解决问题.

三、解答题

19.【答案】答案及证明见解析

【分析】利用作差法比较代数式的大小，注意分类讨论.

【详解】当$a\ge b$时$a^3-b^3\ge ab^2-a^2b$；当$a<b$时$a^3-b^3\le ab^2-a^2b$，证明如下：

$a^3-b^3-(ab^2-a^2b)=a^3-b^3-ab^2+a^2b=a^2(a+b)-b^2(a+b)=(a^2-b^2)(a+b)=(a-b)(a+b)^2$，

当$a\ge b$时，$a-b\ge 0$，$(a+b)^2\ge 0$，故$a^3-b^3\ge ab^2-a^2b$；

当$a<b$时，$a-b<0$，$(a+b)^2\ge 0$，故$a^3-b^3\le ab^2-a^2b$；

20.【答案】（Ⅰ）证明见解析；（Ⅱ）函数$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$上是减函数，证明见解析.

【分析】（Ⅰ）先求定义域，再用奇函数的定义$f(-x)=-f(x)$，证明$f(x)$为奇函数；

（Ⅱ）按照①取值，②作差，③变形，④判号，⑤下结论，这5个步骤证明.

【详解】（Ⅰ）函数$f(x)$的定义域为$D=\{x|x\ne\pm 1\}$，

对于任意$x\in D$，因为$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

（Ⅱ）函数$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$上是减函数.

证明：在$(-1,1)$上任取x_1，x_2，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2-1}-\dfrac{x_2}{x_2^2-1}=\dfrac{(1+x_1x_2)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$.

由$-1<x_1<x_2<1$，得$1+x_1x_2>0$，$x_2-x_1>0$，$x_1^2-1<0$，$x_2^2-1<0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以 函数$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$上是减函数.

21.【答案】(1) -2；(2) 详见解析

【分析】(1) $f(x)=-x^2+x$，首先判断函数在定义域上的单调性，再判断函数的最小值；

(2) 当$a=0$时，$f(x)=x$，单调递增求函数的最大值，当$-2\le a<0$时，分情况讨论函数的对称轴和定义域的关系，求函数的最大值.

【详解】(1) 当$a=-1$时，$f(x)=-x^2+x=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上 $f(x)$ 单调递减.

因为 $f(0)=0$， $f(2)=-2$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 -2.

（2）①当 $a=0$ 时， $f(x)=x$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=2$.

当 $-2\le a<0$ 时，函数 $f(x)=ax^2+x$ 图象的对称轴方程是 $x=-\frac{1}{2a}$.

②当 $0<-\frac{1}{2a}\le 2$，即 $-2\le a\le -\frac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=-\frac{1}{4a}$，

③当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时， $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=4a+2$.

综上，当 $-2\le a\le -\frac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=-\frac{1}{4a}$；

当 $-\frac{1}{4}<a\le 0$ 时， $f(x)$ 的最大值为 $4a+2$.

【点睛】本题考查二次函数求最值，意在考查分类讨论的思想和计算能力，属于基础题型.

22.【答案】(1) $\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 3\}$

（2） $[1,+\infty)$

（3） $(2,4)$

【分析】(1) 由题意得 $x^2-2x-3\ge 0$，求解即可得出答案；

（2）函数 $f(x)=ax^2-2ax-3=a(x-1)^2-a-3(a>0)$，可得二次函数 $f(x)$ 图象的开口向上，且对称轴为 $x=1$，题意转化为 $f(x)_{\min}\geqslant 0$，利用二次函数的图象与性质，即可得出答案；

（3）利用一元二次方程的根的判别式和韦达定理，即可得出答案.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时， $f(x)=x^2-2x-3$，

$f(x)\ge 0$，即 $x^2-2x-3\ge 0$，解得 $x\le -1$ 或 $x\ge 3$，

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 3\}$；

【小问 2 详解】

$f(x)=ax^2-2ax-3=a(x-1)^2-a-3(a>0)$， $x\in[3,+\infty)$

则二次函数 $f(x)$ 图象的开口向上，且对称轴为 $x=1$，

$\therefore f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(3)=3a-3$，

$f(x)\geq 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，转化为 $f(x)_{\min}\geqslant 0$，

$\therefore 3a-3\geq 0$，解得 $a\geq 1$，故实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$；

【小问 3 详解】

关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，

$\because f(x)=ax^2-2ax-3$，$x_1+x_2>0$，$x_1x_2>0$，

$\therefore a\neq 0$ 且 $\begin{cases}\Delta=4a^2+12a>0\\ x_1+x_2=2>0\\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{3}{a}>0\end{cases}$，解得 $a<-3$，

$\therefore x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4+\dfrac{6}{a}$，

令 $g(a)=4+\dfrac{6}{a}$（$a<-3$），

$\because g(a)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递减，

$\therefore \dfrac{6}{a}\in(-2,0)$，$\therefore g(a)\in(2,4)$，

故 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围为 $(2,4)$．

23.【答案】（I）$y=\begin{cases}800x-39000,100\leq x<130\\ 65000,130\leq x\leq 150\end{cases}$；（$II$）$\left[120,150\right]$．

【分析】

（I）分情况考虑：$100\leq x<130,130\leq x\leq 150$，分别求解出每一种情况下 y 的表示，由此可得到 y 关于 x 的分段函数；

（II）根据条件分段列出不等式，求解出每一个不等式的解集，由此求解出市场需求量 x 的范围.

【详解】（I）当 $100\leq x<130$ 时，此时 130 吨的该农产品售出 x 吨，未售出 $\left(130-x\right)$ 吨，

所以 $y=500x-300\left(130-x\right)$，即 $y=800x-39000$；

当 $130\leq x\leq 150$ 时，此时 130 吨的该农产品全部售出，所以 $y=500\times 130$，即 $y=65000$，

综上可知：$y=\begin{cases}800x-39000,100\leq x<130\\ 65000,130\leq x\leq 150\end{cases}$；

（II）当 $100\leq x<130$ 时，令 $800x-39000\geq 57000$，解得 $120\leq x<130$，

当 $130\leq x\leq 150$，此时 $65000>57000$ 符合，

所以市场需求量 x 的范围是 $\left[120,150\right]$．

24.【答案】(1) P 是完美集合，Q 不是完美集合；(2) 可能值为：7、9、11中任一个；(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据完美集合的定义，将 P 分为集合 $\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$ 符合条件，将 Q 分成3个，每个中有两个元素，根据完美集合的定义进一步判断即可；

(2) 根据完美集合的概念直接求出集合 C，从而得到 x 的值；

(3) P 中所有元素之和为 $\frac{3n(3n+1)}{2}=2(c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n)$，根据 $\frac{9n(n-1)}{4}=c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}$，等号右边为正整数，可得等式左边 $9n(n-1)$ 可以被4整除，从而证明结论.

【详解】(1) 将 P 分为 $\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$ 满足条件，则 P 是完美集合.

将 Q 分成3个，每个中有两个元素，则 $a_1+b_1=c_1$，$a_2+b_2=c_2$，

Q 中所有元素之和为21，$21\div 2=10.5=c_1+c_2$，而 c_1+c_2 为整数，不符合要求，

故 Q 不是“完美集合”；

(2) 若集合 $A=\{1,4\}$，$B=\{3,5\}$，根据完美集合的概念知集合 $C=\{6,7\}$；

若集合 $A=\{1,5\}$，$B=\{3,6\}$，根据完美集合的概念知集合 $C=\{4,11\}$；

若集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{4,6\}$，根据完美集合的概念知集合 $C=\{5,9\}$.

故 x 的可能值为7、9、11中任一个；

(3) 证明：P 中所有元素之和为 $1+2+\cdots+3n=\frac{3n(3n+1)}{2}$

$=a_1+b_1+c_1+a_2+b_2+c_2+\cdots+a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+a_n+b_n+c_n=2(c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n)$，

因为 $c_n=3n$，所以，$\frac{3n(3n+1)}{4}=c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+3n$，

所以，$c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}=\frac{3n(3n+1)}{4}-3n=\frac{9n(n-1)}{4}$，

因为 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}$ 为正整数，则 $9n(n-1)$ 可以被4整除，

所以，$n=4k$ 或 $n-1=4k\ (k\in N^*)$，即 $n=4k$ 或 $n=4k+1\ (k\in N^*)$.

故集合 P 为“完美集合”的一个必要条件是 $n=4k$ 或 $n=4k+1\ (k\in N^*)$.

【点睛】关键点点睛：解决集合中新定义问题的关键是准确理解新定义的实质，紧扣新定义进行推理论证，把其转化为我们熟知的基本运算，解本题的关键在于理解“完美集合”的定义，弄清集合A、B 中的元素与集合 C 中元素之间的关系，采取逻辑推证、列举法等方法求解.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！