2020年全国高中数学联赛（福建省赛区）预赛
暨2020年福建省高中数学竞赛试卷

（考试时间：2020年6月27日上午9：00—11：30）

一、填空题（共10小题，每小题6分，满分60分．请直接将答案写在答题卷相应位置上）

1．已知复数z满足$|z-1|=|z-i|$，若$z-\dfrac{z-6}{z-1}$为正实数，则$z=$__★★★__．

2．已知$f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$），若$f(\dfrac{5\pi}{8})=0$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=3$，且$f(x)$的最小正周期大于$2\pi$，则$\varphi=$__★★★__．

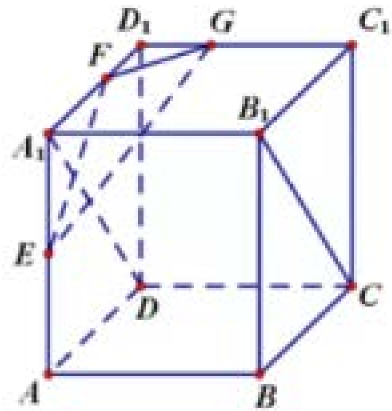
3．已知$[x]$表示不超过x的最大整数，集合$A=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-3[x]-5=0\}$，则$A\cap B=$__★★★__．

4．已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且对任意实数x，都有$f(x+1)=f(1-x)$成立，当$1\le x\le 2$时，$f(x)=\ln x$．若关于x的方程$f(x)+ax-1=0$在$x\in[3,5]$上有两个不相等的实数根，则a的取值范围为__★★★__．

5．设F_1、F_2为双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过$F_2$的直线$l$交双曲线$C$的右支于$A$、$B$两点，且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{F_2A}=0$，则双曲线$C$的离心率为__★★__．

6．在以凸十八边形的顶点为顶点构成的三角形中，任取一个三角形，则所取的三角形与该十八边形无公共边的概率为__★★★__．

7．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F、G 分别在棱 AA_1、A_1D_1、D_1C_1 上，E 为 AA_1 中点，$\dfrac{D_1F}{D_1A_1}=\dfrac{D_1G}{D_1C_1}=\dfrac{1}{3}$．记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线为 m，则直线 m 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为__★★★__．



（第 7 题图）

8．已知 a、b、c、d 为正数，且 $a+20b=c+20d=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bcd}$ 的最小值为__★★★__．

9．已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq ma^2$ 总成立，则 m 的最大值为__★★★__．

10．设正整数 n 为合数，$f(n)$ 为 n 的最小的三个正约数之和，$g(n)$ 为 n 的最大的两个正约数之和．若 $g(n)=f^3(n)$，则 n 的所有可能值为__★★★__．

二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分. 要求写出解题过程，写在答题卷相应位置上）

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$（$n\in N^*$）．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}$，$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项的和，求证：$T_n<\dfrac{3}{4}$．

12．已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\dfrac{1}{2}$，右焦点$F$到直线$x-y+2=0$的距离为$2\sqrt{2}$，$A_1$、$A_2$分别为椭圆$C$的左、右顶点.

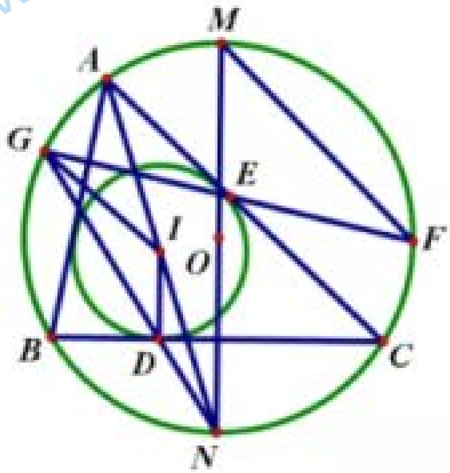
(1) 求椭圆C的方程；

(2) 过点F的直线l交椭圆C于A、B两点（点A在x轴上方），T为直线A_1A、A_2B的交点．当点T的纵坐标为$6\sqrt{3}$时，求直线l的方程.

13．如图，在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，$\triangle ABC$的内切圆I与边BC、CA分别切于点D、E，连AI并延长交$\triangle ABC$的外接圆O于点N，连ND、NO并延长分别交$\odot O$于点G、M，连GE并延长交$\odot O$于点F.

(1) 求证：$\triangle NIG\backsim\triangle NDI$；

(2) 求证：$MF/\!/AC$.



（第 13 题图）

14．已知 $f(x)=\left[x^2+(a-1)x+1\right]e^x$，若 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

15．将一个 2020×2020 方格表的每个小方格染黑、白两种颜色之一，满足以下条件：方格表中的任意一个小方格 A，它所在的行与列的所有小方格中，与 A 异色的小方格多于与 A 同色的小方格．证明：染色后，方格表中每行、每列两种颜色的小方格一样多．

2020 年全国高中数学联赛（福建赛区）预赛
暨 2020 年福建省高中数学竞赛试卷参考答案

（考试时间：2020 年 6 月 27 日上午 9：00—11：30，满分 160 分）

一、填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分．请直接将答案写在题中的横线上）

1．已知复数 z 满足 $|z-1|=|z-i|$，若 $z-\dfrac{z-6}{z-1}$ 为正实数，则 $z=$________．

【答案】 $2+2i$

【解答】 由 $|z-1|=|z-i|$ 知，z 的实部与虚部相等，设 $z=x+xi$，$x\in R$．

则 $z-\dfrac{z-6}{z-1}=z-1+\dfrac{5}{z-1}=x+xi-1+\dfrac{5}{x+xi-1}=(x-1)+xi+\dfrac{5[(x-1)-xi]}{(x-1)^2+x^2}$，

$$=(x-1)+\frac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}+\left[x-\frac{5x}{(x-1)^2+x^2}\right]i$$

由 $z-\dfrac{z-6}{z-1}$ 为正实数，知 $(x-1)+\dfrac{5(x-1)}{(x-1)^2+x^2}>0$，且 $x-\dfrac{5x}{(x-1)^2+x^2}=0$，解得 $x=2$．

所以，$z=2+2i$．

2．已知 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$），若 $f(\dfrac{5\pi}{8})=0$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=3$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则 $\varphi=$________．

【答案】 $-\dfrac{11\pi}{12}$

【解答】 由 $f(\dfrac{5\pi}{8})=0$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=3$，得 $\dfrac{5\pi}{8}\omega+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{11\pi}{8}\omega+\varphi=2m\pi$（$k$，$m\in Z$）．

两式相减，得 $\dfrac{3\pi}{4}\omega=2m\pi-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$\omega=\dfrac{4}{3}(2m-k-\dfrac{1}{2})$，$m$，$k\in Z$．

另由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，得 $\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，$0<\omega<1$．于是，$0<\frac{4}{3}(2m-k-\frac{1}{2})<1$，

$\frac{1}{2}<2m-k<\frac{5}{4}$．由 m，$k\in Z$，得 $2m-k=1$．

因此，$\omega=\frac{2}{3}$．将 $\omega=\frac{2}{3}$ 代入 $\frac{11\pi}{8}\omega+\varphi=2m\pi$（$m\in Z$），得 $\varphi=2m\pi-\frac{11\pi}{12}$（$m\in Z$）．结合 $|\varphi|<\pi$，得 $\varphi=-\frac{11\pi}{12}$．

3．已知$[x]$表示不超过x的最大整数，集合$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|2x^2-3[x]-5=0\}$，则$A\cap B=$____________.

【答案】$\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$

【解答】易知$A=(-2,3)$，若$x\in A$，则$[x]=-2,-1,0,1,2$．

当$[x]=-2$时，若$x\in B$，则$2x^2+6-5=0$，x不存在.

当$[x]=-1$时，若$x\in B$，则$2x^2+3-5=0$，$x=\pm1$．$x=1$不符合要求，$x=-1$符合要求.

当$[x]=0$时，若$x\in B$，则$2x^2-0-5=0$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，均不符合要求.

当$[x]=1$时，若$x\in B$，则$2x^2-3-5=0$，$x=\pm2$，均不符合要求.

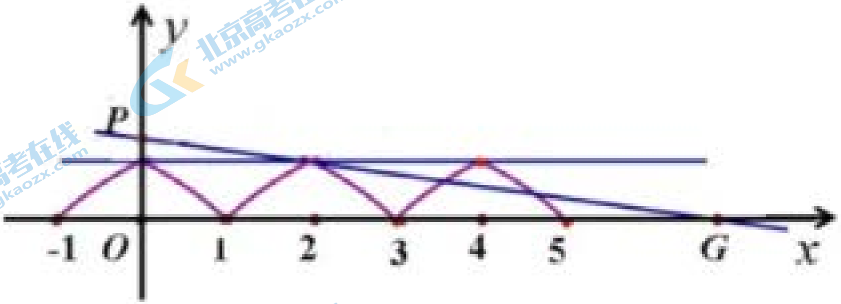
当$[x]=2$时，若$x\in B$，则$2x^2-6-5=0$，$x=\pm\dfrac{\sqrt{22}}{2}$，$x=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$符合要求，$x=-\dfrac{\sqrt{22}}{2}$不符合要求.

所以，$A\cap B=\left\{-1,\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right\}$.

4．已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且对任意实数x，都有$f(x+1)=f(1-x)$成立，当$1\le x\le2$时，$f(x)=\ln x$．若关于x的方程$f(x)+ax-1=0$在$x\in[3,5]$上有两个不相等的实数根，则a的取值范围为____________.

【答案】 $\left(0,\dfrac{1}{5}\right]$

【解答】 如图，分别作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=-ax+1$ 的图像，其中 $P(0,1)$，$G(\dfrac{1}{a},0)$．



（第 4 题答题图）

由图像可知，当 $x_G=\dfrac{1}{a}\geq 5$，即 $0<a\leq\dfrac{1}{5}$ 时，两函数图像在 $x\in[3,5]$ 上有两个不同的交点．

所以，a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{5}\right]$．

5．设 F_1、F_2 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过 F_2 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A、B 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{F_2A}=0$，则双曲线 C 的离心率为______．

【答案】 $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

【解答】如图，设 $|AF_2|=t$，则依题意有 $|BF_2|=2t$，$|AB|=3t$，$|AF_1|=2a+t$，$|BF_1|=2a+2t$．

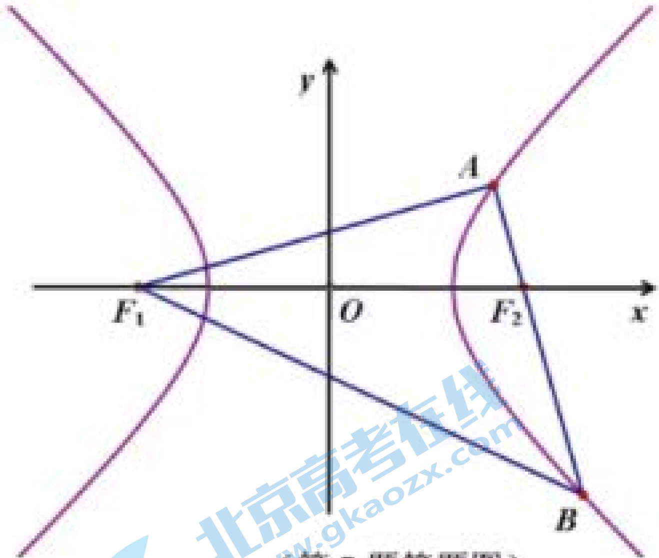
由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，知 $AF_1\perp AF_2$．所以，

$$\begin{cases}|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2\\|AF_1|^2+|AB|^2=|F_1B|^2\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(2a+t)^2+t^2=(2c)^2\\(2a+t)^2+(3t)^2=(2a+2t)^2\end{cases}$．解得，

$$t=\frac{2}{3}a,\quad c=\frac{\sqrt{17}}{3}a.$$

因此，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$．



（第 5 题答题图）

6．在以凸十八边形的顶点为顶点构成的三角形中，任取一个三角形，则所取的三角形与该十八边形无公共边的概率为______．

【答案】 $\dfrac{91}{136}$

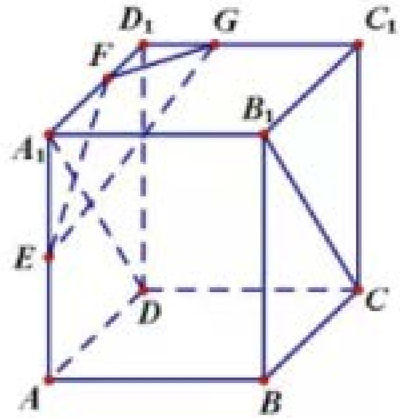
【解答】 以凸十八边形的顶点为顶点的三角形个数为 C_{18}^3．

对于凸十八边形的任意一个顶点 A，要作为与凸边十八形无公共边的三角形的一个顶点，则三角形的另外两个顶点 B、C 不能为顶点 A 在凸十八边形中的两条边的另外两个顶点，只能是其它15个顶点中的不相邻的两个顶点，共有 C_{15}^2-14 种不同的选取方法．所以，与原凸

十八边形无公共边的三角形的个数为$\frac{1}{3}\times 18\times (C_{15}^{2}-14)$．

因此，所求的概率为$\dfrac{\frac{1}{3}\times 18\times (C_{15}^{2}-14)}{C_{18}^{3}}=\dfrac{91}{136}$．

7．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F、G 分别在棱 AA_1、A_1D_1、D_1C_1 上，E 为 AA_1 中点，$\dfrac{D_1F}{D_1A_1}=\dfrac{D_1G}{D_1C_1}=\dfrac{1}{3}$．记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线为 m，则直线 m 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为____________．



（第 7 题图）

【答案】 $\dfrac{3\sqrt{58}}{58}$

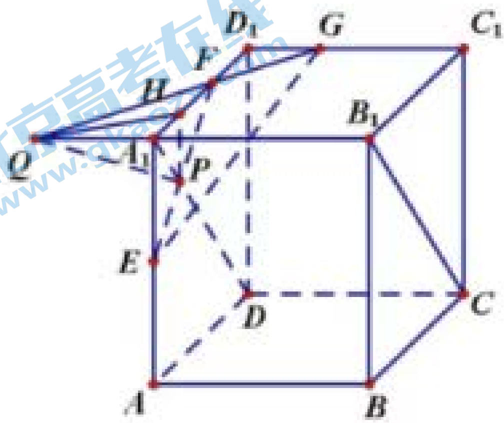
【解答】 如图，设 A_1D、EF 的交点为 P．延长 GF、B_1A_1 交于点 Q，则 PQ 为平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线为 m．

不妨设正方体棱长为 3，则由 $\dfrac{D_1F}{D_1A_1}=\dfrac{D_1G}{D_1C_1}=\dfrac{1}{3}$ 知，$A_1Q=A_1F=2$．

作 $PH\perp A_1D_1$ 于 H，则 $PH\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，连结 QH，则 $\angle PQH$ 就是直线 PQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角．

设 $PH=x$，则 $A_1H=x$，由 $\dfrac{PH}{EA_1}=\dfrac{FH}{FA_1}$，得 $\dfrac{x}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2-x}{2}$，$x=\dfrac{6}{7}$．

于是，$QH^2=QA_1^2+A_1H^2=2^2+(\dfrac{6}{7})^2$，$QH=\dfrac{2\sqrt{58}}{7}$．所以，$\tan\angle PQH=\dfrac{PH}{QH}=\dfrac{3\sqrt{58}}{58}$．



（第 7 题答题图）

由平面 $ABCD$∥平面 $A_1B_1C_1D_1$ 知，直线 PQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$、平面 $ABCD$ 所成角相等．所以，直线 m 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{3\sqrt{58}}{58}$．

8．已知 a、b、c、d 为正数，且 $a+20b=c+20d=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bcd}$ 的最小值为________．

【答案】 $\dfrac{441}{2}$

【解答】 由条件知，$0<cd=\dfrac{1}{20}c\cdot 20d\le\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{c+20d}{2}\right)^2=\dfrac{1}{20}$．所以，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{bcd}\ge\frac{1}{a}+\frac{20}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{20}{b}\right)(a+20b)=\frac{1}{2}\left(401+\frac{20b}{a}+\frac{20a}{b}\right)\ge\frac{1}{2}\left(401+2\sqrt{\frac{20b}{a}\cdot\frac{20a}{b}}\right)=\frac{441}{2}.$$

当且仅当 $c=20d$ 且 $\dfrac{20b}{a}=\dfrac{20a}{b}$，即 $a=b=\dfrac{2}{21}$，$c=1$，$d=\dfrac{1}{20}$ 时等号成立．

所以，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bcd}$ 的最小值为 $\dfrac{441}{2}$．

9．已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge ma^2$ 总成立，则 m 的最大值为________.

【答案】 $\dfrac{9}{8}$

【解答】 设 $\mu=\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$，其中 a、b、c 为实数，$a\ne 0$.

当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，设其两根为 x_1、x_2. 由韦达定理知，

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

于是，

$$\mu=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}=(1-\frac{b}{a})^2+(\frac{b}{a}-\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{a}-1)^2$$

$$=(1+x_1+x_2)^2+(-x_1-x_2-x_1x_2)^2+(x_1x_2-1)^2$$

$$=2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)$$

$$\ge 2\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}.$$

当且仅当 $x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$，即 $a=b=4c\ne 0$ 时等号成立. 因此 μ 的最小值为 $\dfrac{9}{8}$. 所以，m 的最大值为 $\dfrac{9}{8}$.

10．设正整数n为合数，$f(n)$为n的最小的三个正约数之和，$g(n)$为n的最大的两个正约数之和．若$g(n)=f^3(n)$，则n的所有可能值为________.

【答案】 144

【解答】 解法一：设正整数n满足条件.

显然n的最小、最大的正约数分别为1，n.设p是n的最小素因子，则n的第二小、第二大的正约数分别为p、$\frac{n}{p}$.

对于n的第三小的正约数，有以下两类情形：

(1) 若第三小的正约数为p^2，则$p^2 \mid n$，$f(n)=1+p+p^2$，$g(n)=n+\frac{n}{p}$.

由$p^2 \mid n$，知$g(n)=n+\frac{n}{p}$为p的倍数，$g(n)\equiv 0\pmod{p}$.

又$f(n)=1+p+p^2\equiv 1\pmod{p}$，$f^3(n)\equiv 1\pmod{p}$.于是，$g(n)\neq f^3(n)$，与条件不符.

(2) 若第三小的正约数是某一素数q（$q>p$），则$f(n)=1+p+q\equiv 1+p\pmod{q}$，$f^3(n)\equiv(1+p)^3\pmod{q}$.

二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分. 要求写出解题过程）

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$（$n\in N^*$）.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}$，$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项的和，求证：$T_n<\dfrac{3}{4}$.

【解答】 (1) 由$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$，得$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$. 又$a_2-a_1=4\neq 0$，因此，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等比数列.

所以，$a_{n+1}-a_n=4\times 3^{n-1}$. ……………………………………………… 5 分

所以，$n\geq 2$时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$$=4\times 3^{n-2}+4\times 3^{n-3}+\cdots+4+1=\frac{4(1-3^{n-1})}{1-3}+1=2\times 3^{n-1}-1.$$

又$n=1$时，$2\times 3^{n-1}-1=1=a_1$.

所以，对一切正整数n，$a_n=2\times 3^{n-1}-1$. ……………………………………… 10 分

(2) 由(1)知，$b_n=\dfrac{3^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{3^n}{(2\times 3^{n-1}-1)(2\times 3^n-1)}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\dfrac{1}{2\times 3^n-1}\right)$.

……………………………………………… 15 分

所以，

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2\times 3-1}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\times 3-1}-\frac{1}{2\times 3^2-1}\right)+\cdots+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}-\frac{1}{2\times 3^n-1}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2\times 3^n-1}\right)<\frac{3}{4}.$$ ……………………………………… 20 分

12．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点$F$到直线$x-y+2=0$的距离为$2\sqrt{2}$，$A_1$、$A_2$分别为椭圆$C$的左、右顶点.

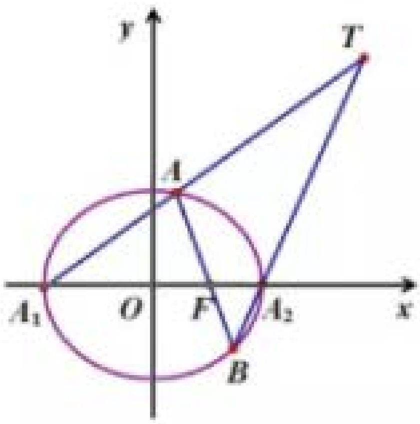
(1) 求椭圆C的方程；

(2) 过点F的直线l交椭圆C于A、B两点（点A在x轴上方），T为直线A_1A、A_2B的交点. 当点T的纵坐标为$6\sqrt{3}$时，求直线l的方程.

【解答】 (1) 由右焦点$F(c,0)$到直线$x-y+2=0$的距离为$2\sqrt{2}$，知$\frac{|c-0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

结合$c>0$，得$c=2$. 又椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，因此，$a=2c=4$，$b=2\sqrt{3}$.

所以，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. ……………… **5 分**



（第 12 题答题图）

(2) 解法一：如图，易知直线l斜率不为 0，设l方程为$x=my+2$.

由$\begin{cases}x=my+2\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2+12my-36=0$. ……… ①

方程①的判别式$\triangle>0$，①有两个不相等的实根.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-36}{3m^2+4}$.

设$T(t,6\sqrt{3})$. 由A_1、A、T共线得，$\frac{6\sqrt{3}-0}{t+4}=\frac{y_1-0}{x_1+4}$，即

$$t+4=\frac{6\sqrt{3}(x_1+4)}{y_1}=6\sqrt{3}(m+\frac{6}{y_1})，$$

由A_2、B、T共线得，$\frac{6\sqrt{3}-0}{t-4}=\frac{y_2-0}{x_2-4}$，即

$$t-4=\frac{6\sqrt{3}(x_2-4)}{y_2}=6\sqrt{3}(m-\frac{2}{y_2}).$$

……………………………………………………………… **10 分**

于是，

$$(t+4)-3(t-4)=6\sqrt{3}(m+\frac{6}{y_1}-3m+\frac{6}{y_2})=6\sqrt{3}(-2m+6\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2})=6\sqrt{3}(-2m+6\cdot\frac{-12m}{-36})=0$$

由此可得，$t=8$. …………………………………………………… **15 分**

所以，$T(8,6\sqrt{3})$，直线AT方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+4)$，与椭圆$C$的方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$联立得$A(0,2\sqrt{3})$.

所以，直线AF方程即直线l方程为$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，即$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$. ……… **20 分**

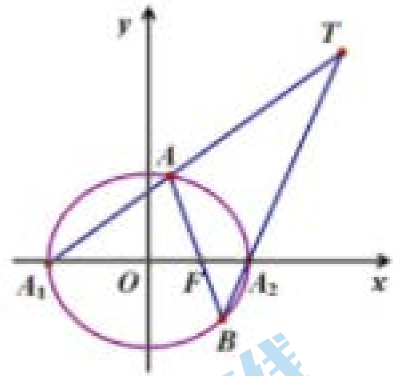
解法二：如图，易知直线 l 斜率不为0，设 l 方程为 $x=my+2$．由 $\begin{cases} x=my+2 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，得

$$(3m^2+4)y^2+12my-36=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

方程①的判别式 $\Delta>0$，①有两个不相等的实根．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-36}{3m^2+4}$．

设 $T(t,6\sqrt{3})$．



（第12题答题图）

由 A_1、A、T 共线得，$\dfrac{6\sqrt{3}-0}{t+4}=\dfrac{y_1-0}{x_1+4}$，即

$$t+4=\frac{6\sqrt{3}(x_1+4)}{y_1}=6\sqrt{3}(m+\frac{6}{y_1}).$$

由 A_2、B、T 共线得，$\dfrac{6\sqrt{3}-0}{t-4}=\dfrac{y_2-0}{x_2-4}$，即

$$t-4=\frac{6\sqrt{3}(x_2-4)}{y_2}=6\sqrt{3}(m-\frac{2}{y_2}).$$

联立两式消 t，得 $8=6\sqrt{3}(\dfrac{6}{y_1}+\dfrac{2}{y_2})$，$\dfrac{3}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$． $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ **10分**

所以，$\dfrac{3}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{(y_1+y_2)+2y_2}{y_1y_2}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$，$\dfrac{-12m}{3m^2+4}+2y_2=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\times\dfrac{-36}{3m^2+4}$．

于是，$y_2=\dfrac{6m-4\sqrt{3}}{3m^2+4}$，$y_1=\dfrac{-18m+4\sqrt{3}}{3m^2+4}$， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ **15分**

代入 $y_1y_2=\dfrac{-36}{3m^2+4}$，得 $\dfrac{-4(3m-2\sqrt{3})(9m-2\sqrt{3})}{(3m^2+4)^2}=\dfrac{-36}{3m^2+4}$，解得 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以，直线 l 方程为 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+2$，即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$． $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ **20分**

解法三：如图，若 $l\perp x$ 轴，则 $A(2,3)$，$B(2,-3)$，易得点 T 的纵坐标为6，不符合题意.

若 l 斜率存在，设 l 方程为 $y=k(x-2)$，$k\neq 0$.

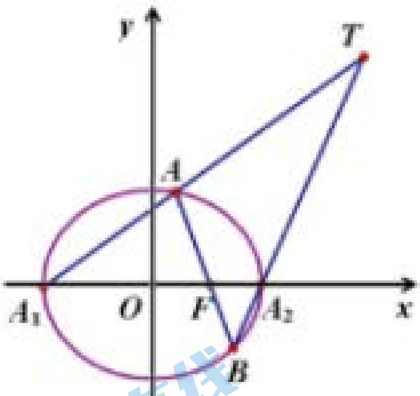
由 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-48=0$. ………………… ①

①的判别式 $\triangle=576(k^2+1)>0$，①有两个不相等的实根.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{16k^2-48}{3+4k^2}$.

设 $T(t,6\sqrt{3})$.

由 A_1、A、T 共线得 $\dfrac{6\sqrt{3}-0}{t+4}=\dfrac{y_1-0}{x_1+4}$，即 $t+4=\dfrac{6\sqrt{3}(x_1+4)}{k(x_1-2)}$.



（第12题答题图）

由 A_2、B、T 共线得 $\dfrac{6\sqrt{3}-0}{t-4}=\dfrac{y_2-0}{x_2-4}$，即 $t-4=\dfrac{6\sqrt{3}(x_2-4)}{k(x_2-2)}$.

……………………………………………… 10 分

于是，$(t+4)-3(t-4)=\dfrac{6\sqrt{3}}{k}\left(\dfrac{x_1+4}{x_1-2}-3\cdot\dfrac{x_2-4}{x_2-2}\right)=\dfrac{6\sqrt{3}}{k}\cdot\dfrac{-2x_1x_2+10(x_1+x_2)-32}{(x_1-2)(x_2-2)}$

由 $-2x_1x_2+10(x_1+x_2)-32=-2\times\dfrac{16k^2-48}{3+4k^2}+10\times\dfrac{16k^2}{3+4k^2}-32=0$，得 $(t+4)-3(t-4)=0$.

由此可得，$t=8$. ……………………………………………… 15 分

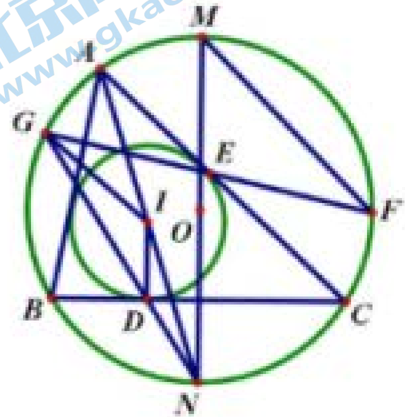
所以，$T(8,6\sqrt{3})$，直线 AT 方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+4)$，与椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 联立得 $A(0,2\sqrt{3})$.

所以，直线 AF 方程即直线 l 方程为 $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$.………… 20 分

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB<AC$，$\triangle ABC$的内切圆I与边BC、CA分别切于点D、E，连AI并延长交$\triangle ABC$的外接圆O于点N，连ND、NO并延长分别交$\odot O$于点G、M，连GE并延长交$\odot O$于点F.

(1) 求证：$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$；

(2) 求证：$MF /\!/ AC$.



（第 13 题图）

【证明】(1) 如图，连结BN，BI，BG. 由I为$\triangle ABC$的内心知，

$\angle NBI=\angle NBC+\angle CBI=\angle NAC+\angle CBI=\angle BAI+\angle ABI=\angle BIN$.

所以，$NB=NI$. …………………………………… 5 分

又$\angle NGB=\angle NAB=\angle NAC=\angle NBD$，$\angle BNG=\angle DNB$，所以，

$\triangle NBG \backsim \triangle NDB$，$\dfrac{NB}{NG}=\dfrac{ND}{NB}$.

因此，$\dfrac{NI}{NG}=\dfrac{ND}{NI}$. 又$\angle ING=\angle DNI$，

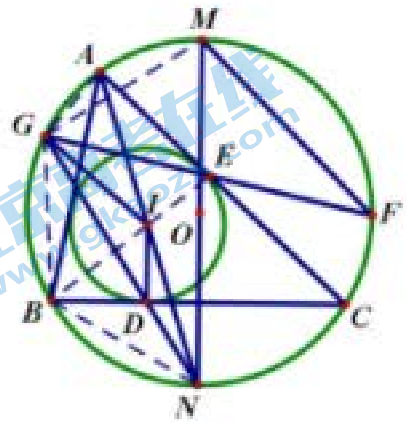
所以，$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$. ……………………………… 10 分

(2) 连结GA、GM.由（1）$\triangle NIG \backsim \triangle NDI$，得$\angle NGI=\angle NID$.

由I为$\triangle ABC$的内心，知N为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$MN \perp BC$.

又$ID \perp BC$，因此$ID /\!/ MN$，$\angle NID=\angle ANM=\angle AGM$.

所以，$\angle NGI=\angle AGM$.



（第 13 题答题图）

于是，$\angle AGI=\angle AGM+\angle MGI=\angle NGI+\angle MGI=\angle MGN=90^\circ$. …………………… 15 分

又$\angle AEI=90^\circ$.

所以，A、G、I、E四点共圆.

所以，$\angle AEG=\angle AIG=90^\circ-\angle GAI=90^\circ-\angle GAN=90^\circ-\angle GMN=\angle MNG=\angle MFG$.

所以，$MF /\!/ AC$. ………………………………………………………… 20 分

14．已知 $f(x)=\left[x^2+(a-1)x+1\right]e^x$，若 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

【解答】 $f'(x)=(2x+a-1)e^x+\left[x^2+(a-1)x+1\right]e^x=(x+1)(x+a)e^x$．

设 $g(x)=x^2+(a-1)x+1$．

① 当 $-1\leq a\leq 3$ 时，方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 的判别式 $\Delta=(a-1)^2-4\leq 0$，

此时 $g(x)\geq 0$ 恒成立，$f(x)+e^2=g(x)\cdot e^x+e^2\geq e^2>0$ 恒成立．

……………………………………………………… 5 分

② 当 $a>3$ 时，$x<-a$ 或 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$；$-a<x<-1$ 时，$f'(x)<0$．

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-a]$，$[-1,+\infty)$ 上为增函数；在 $[-a,-1]$ 上为减函数．

当 $x\leq -a$ 时，$g(x)=x^2+(a-1)x+1=x(x+a)+1-x>0$，$f(x)+e^2>0$ 成立．

当 $x>-a$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=(3-a)e^{-1}$．

由 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立知，$(3-a)e^{-1}+e^2\geq 0$，$a\leq e^3+3$．

因此，$3<a\leq e^3+3$． ……………………………………………… 10 分

③ 当 $a<-1$ 时，$x<-1$ 或 $x>-a$ 时，$f'(x)>0$；$-1<x<-a$ 时，$f'(x)<0$．

$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1]$，$[-a,+\infty)$ 上为增函数；在 $[-1,-a]$ 上为减函数．

当 $x\leq -1$ 时，$g(x)=x^2+(a-1)x+1>(a-1)x>0$，$f(x)+e^2>0$ 成立．

当 $x>-1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-a)$．

由 $f(x)+e^2\geq 0$ 恒成立知，$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geq 0$． ………………… 15 分

设 $h(x)=(x+1)e^{-x}+e^2$，则 $h'(x)=-xe^{-x}$，$x<-1$ 时，$h'(x)>0$．

所以，$h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数．

又 $h(-2)=0$，于是 $h(x)\geq 0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上的解集为 $[-2,-1)$．

因此，$a<-1$ 时，$f(-a)+e^2=(a+1)e^{-a}+e^2\geq 0$，的解集为 $[-2,-1)$．

综合①、②、③得 $-2\leq a\leq e^3+3$．

所以，a 的取值范围为 $\left[-2,e^3+3\right]$． ……………………………………… 20 分

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多