

# 2024 北京十一学校初三（下）开学考

## 数 学

时间：120 分钟 分值：100 分

注意：请在答题纸的指定区域上作答，在本试卷上的答案一律不计入成绩。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

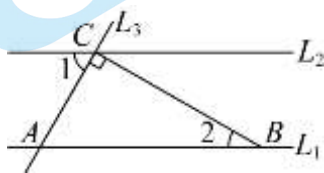
1. 2023 年 10 月 26 日，神舟十七号载人飞船发射取得圆满成功，航天员江新林、汤洪波、唐胜杰将与神舟十六号航天员会师太空。空间站距离地球约为 423000m，423000 用科学记数法可表示为（ ）

- A.  $423 \times 10^3$       B.  $42.3 \times 10^4$       C.  $4.23 \times 10^5$       D.  $0.423 \times 10^6$

2. 小篆，是在秦始皇统一六国后创制的汉字书写形式。下列四个小篆字中为轴对称图形的是（ ）

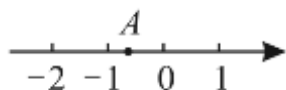


3. 如图，直线  $L_1 \parallel L_2$ ，直线  $L_3$  与  $L_1$ 、 $L_2$  分别相交于 A、C 两点， $BC \perp L_3$  交  $L_1$  于点 B，若  $\angle 1 = 70^\circ$ ，则  $\angle 2$  的度数为（ ）



- A.  $20^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $40^\circ$       D.  $50^\circ$

4. 如图，数轴上的点 A 可以用实数 a 表示，下面式子成立的是（ ）

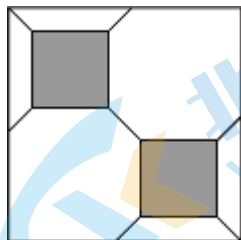


- A.  $|a| > 1$       B.  $|a-1| = 1-a$       C.  $a+1 < 0$       D.  $-\frac{1}{a} < 1$

5. 已知关于 x 的一元二次方程  $x^2 - 2x + a = 0$  有两个相等的实数根，则 a 的值是（ ）

- A. 1      B. -1      C. 4      D. -4

6. 如图是某小区花园内用同一种白色正多边形和黑色正方形地砖铺设的小路的局部示意图，四块正多边形地砖围成的中间区域使用一块正方形地砖，则正多边形的内角和为（ ）

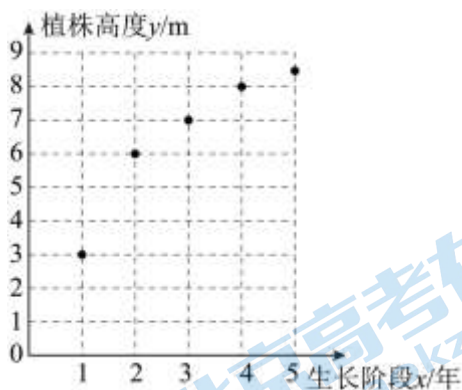


- A.  $540^\circ$       B.  $720^\circ$       C.  $1080^\circ$       D.  $1440^\circ$

7. 盒中有 1 枚白色棋子和 2 枚黑色棋子，这三枚棋子除颜色外无其他差别，从中随机摸出一枚棋子，记录其颜色，放回后，再从中随机摸出一枚棋子，记录其颜色，那么两次记录的颜色不同的概率是 ( )

- A.  $\frac{2}{9}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{4}{9}$

8. 植物研究者在研究某种植物 1~5 年内的植株高度时，将得到的数据用下图直观表示。现要根据这些数据选用函数模型来描述这种植物在 1~5 年内的生长规律。



若选择  $y = ax^2 + bx + c$ ,

则  $a$  \_\_\_\_\_ 0,  $b$  \_\_\_\_\_ 0;

若选择函数  $y = \frac{a}{x} + b$ ,

则  $a$  \_\_\_\_\_ 0,  $b$  \_\_\_\_\_ 0;

依次填入的不等号为 ( )

- A. <, >, <, >                      B. <, >, >, <                      C. >, <, <, >                      D. >, >, <, <

## 二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 若二次根式  $\sqrt{2x-6}$  在实数范围内有意义, 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 因式分解:  $3x^2 - 12 =$  \_\_\_\_\_.

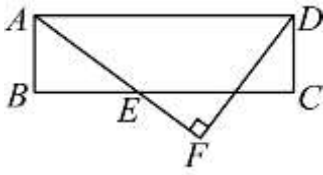
11. 分式方程  $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{3x}$  的解是\_\_\_\_\_.

12. 已知点 A ( $x_1, y_1$ )、B ( $x_1-3, y_2$ ) 在直线  $y = -2x+3$  上, 则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (用 “>”、“<” 或 “=” 填空)

13. 果农小明随机从甲、乙、丙三个品种的枇杷树中各选 20 棵, 每棵产量的平均数  $\bar{x}$  (单位: 千克) 及方差 (单位: 千克<sup>2</sup>) 如下表所示, 他准备从这三个品种中选一种产量既高又稳定的枇杷树进行种植, 则应选的品种是 \_\_\_\_\_.

	甲	乙	丙
$\bar{x}$	40	40	39
$S^2$	2.3	2.7	2.3

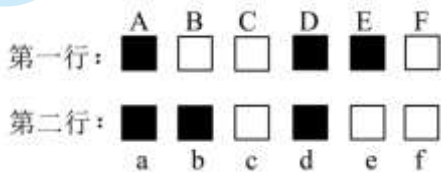
14. 如图，在矩形  $ABCD$  中， $AB=3$ ， $BC=10$ ，点  $E$  在边  $BC$  上， $DF \perp AE$ ，垂足为  $F$ 。若  $DF=6$ ，则线段  $BE$  的长为\_\_\_\_\_。



15. 瓦当是中国古代建筑瓦件，是接近屋檐的最下一个筒瓦的瓦头，形状有半圆或圆形，表面多装饰有花纹或文字。它既有保护房屋椽子免受风雨侵蚀的实用功能，又有美化屋檐的装饰功能。下图（图 1）是云纹瓦当，它由大小相同的四个云纹图案组成，以单个云纹图案为例（图 2），该云纹的“下圆弧”的长为  $l$ ，“直边长”为  $d$ ，“上圆弧”的长为  $x$ ，则  $x=_____$ （用含  $l$ ， $d$  的式子表示）。



16. 有黑、白各 6 张卡片，分别写有数字 1 至 6 把它们像扑克牌那样洗过后，数字朝下，如图排成两行，排列规则如下：



- ①左至右，按数字从小到大的顺序排列；
- ②黑、白卡片数字相同时，黑卡片放在左边。

将第一行卡片用大写英文字母按顺序标注，第二行卡片用小写英文字母按顺序标注，则白卡片数字 1 摆在了标注字母\_\_\_\_\_的位置，标注字母  $e$  的卡片写有数字\_\_\_\_\_。

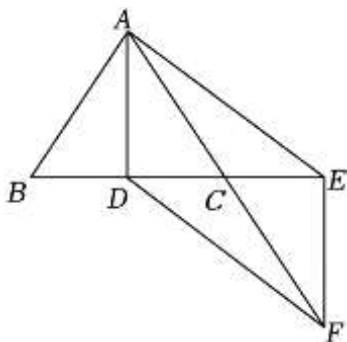
三、解答题（共 68 分，第 17—22 题每题 5 分，第 23—26 题每题 6 分，第 27，28 每题 7 分）

17. 计算： $2\sin 60^\circ - \sqrt{12} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + |2 - \sqrt{3}|$ 。

18. 解不等式组  $\begin{cases} 2x-3 > x-5 \\ \frac{2x+6}{3} < 2-x \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来。

19. 已知  $3x^2 + 4x - 1 = 0$ ，求代数式  $(2x+1)^2 - (x+1)(x-1)$  的值。

20. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$  于点  $D$ ，延长  $DC$  到点  $E$ ，使  $CE=CD$ 。过点  $E$  作  $EF \parallel AD$  交  $AC$  的延长线于点  $F$ ，连接  $AE$ ， $DF$ 。



- (1) 求证：四边形  $ADFE$  是平行四边形；  
 (2) 若  $BD = 2$ ,  $AD = 3$ , 直接写出  $DF$  的长.

21. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4kx + 3k^2 = 0$ .

- (1) 求证：该方程总有两个实数根；  
 (2) 若此方程的两个实数根  $x_1, x_2$ , 满足  $x_1 - x_2 = 3$ , 求  $k$  的值.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 一次函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的图象平行于直线  $y = \frac{1}{2}x$ , 且经过点  $A(2, 2)$ .

- (1) 求这个一次函数的表达式；  
 (2) 当  $x > 1$  时, 对于  $x$  的每一个值, 一次函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的值大于函数  $y = \frac{m}{x} (x > 0)$  的值, 直接

写出  $m$  的取值范围.

23. 某校七年级和八年级的学生参加科普知识竞赛, 成绩得分用  $x$  表示, 共分为四组:  $A. 0 \leq x < 70$ ,  $B. 70 \leq x < 80$ ,  $C. 80 \leq x < 90$ ,  $D. 90 \leq x \leq 100$ , 下面给出了部分信息:

七年级 20 名学生的成绩是:

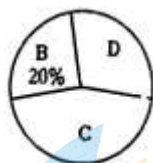
69, 76, 78, 79, 82, 84, 85, 86, 86, 86, 86, 88, 88, 90, 92, 92, 95, 98, 100, 100.

八年级 20 名学生的成绩在  $C$  组中的数据是: 83, 85, 85, 86, 87, 89, 89, 89, 89.

七、八两年级抽取的学生成绩数据统计表

班级	平均数	中位数	众数	满分率
七年级	87	86	$a$	10%
八年级	87	$b$	89	15%

八年级抽取的学生成绩扇形统计图



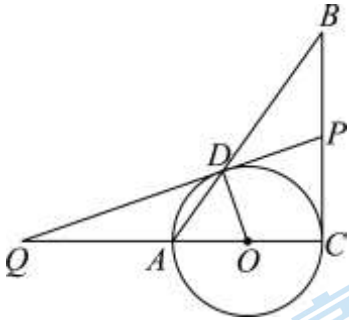
根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 直接写出图表中  $a, b$  的值:  $a = \underline{\quad}$ ,  $b = \underline{\quad}$ .  
 (2) 根据以上数据, 你认为七年级和八年级中哪个年级的学生掌握科普知识较好? 请说明理由 (一条理

由即可)；

(3) 该校七年级有 400 名学生和八年级有 500 名学生参加了此次科普知识竞赛，请估计两个年级成绩达到 90 分及以上的学生共有多少人？

24. 如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，以  $AC$  为直径的  $\odot O$  交  $AB$  于点  $D$ ，点  $Q$  为  $CA$  延长线上一点，延长  $QD$  交  $BC$  于点  $P$ ，连接  $OD$ ， $\angle ADQ = \frac{1}{2} \angle DOQ$ .



(1) 求证： $PD$  是  $\odot O$  的切线；

(2) 连接  $OP$ ，若  $AQ = AC$ ， $AD = 6$  时，求  $OP$  的长。

25. 鹰眼技术助力杭州亚运，提升球迷观赛体验，如图分别为足球比赛中某一时刻的鹰眼系统预测画面（图 1）和截面示意图（如图 2），攻球员位于点  $O$ ，守门员位于点  $A$ ， $OA$  的延长线与球门线交于点  $B$ ，且点  $A, B$  均在足球轨迹正下方，足球的飞行轨迹可看成抛物线。水平距离  $s$  与地高度  $h$  的鹰眼数据如表：

$s/m$	0	9	12	15	18	21	...
$h/m$	0	4.2	4.8	5	4.8	4.2	...



图1

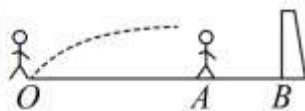


图2

(1) 根据表中数据可得，当  $s =$  \_\_\_\_\_  $m$  时， $h$  达到最大值 \_\_\_\_\_  $m$ ；

(2) 求  $h$  关于  $s$  的函数解析式；

(3) 当守门员位于足球正下方，足球离地高度不大于守门员的最大防守高度 2.6m 时，视为防守成功。若一次防守中，守门员位于足球正下方时， $s = 27m$ ，请问这次守门员能否防守成功？试通过计算说明。

26. 已知二次函数的解析式为： $y = x^2 - 2mx + 1$  ( $m$  是常数)。

(1) 当  $m = 4$  时，求函数图象的顶点坐标和对称轴；

(2) 若点  $(1, p)$ ， $(-1, q)$  在函数图象上，求证： $pq \leq 4$ ；

(3) 已知函数图象经过点  $A(-4, y_1)$ ， $B(m+2, y_2)$ ， $C(a, y_3)$ ，若对于任意的  $4 \leq a \leq 6$  都满足



$y_1 > y_3 > y_2$ , 求  $m$  的取值范围.

27. 在正方形  $ABCD$  中,  $BD$  是一条对角线, 点  $P$  在射线  $DC$  上 (与点  $C, D$  不重合) 连接  $AP$ , 平移  $\triangle ADP$ . 使点  $D$  移动到点  $C$ , 得到  $\triangle BCQ$ , 过点  $Q$  作  $QH \perp BD$  于  $H$ , 连接  $AH, PH$ .

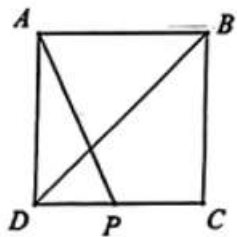
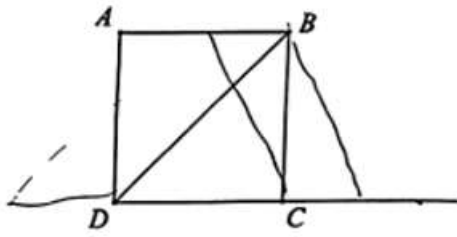


图 1



备用图

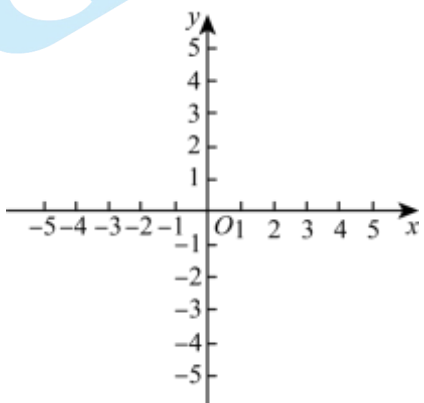
(1) 若点  $P$  在线段  $CD$  上, 如图 1.

①依题意补全图 1;

②判断  $AH$  与  $PH$  的数量关系与位置关系并加以证明;

(2) 若点  $P$  在线段  $DC$  的延长线上, 且  $\angle AHQ = 120^\circ$ , 正方形  $ABCD$  的边长为 1, 直接写出  $DP$  的长.

28. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 给定线段  $AB$  和点  $P$ , 若满足  $PA < AB < PB$  或者  $PB < AB < PA$ , 则称点  $P$  为线段  $AB$  的偏序点.



(1) 已知点  $A(2,0)$ ,

①在点  $B_1(-1,0)$ ,  $B_2(1,\sqrt{3})$ ,  $B_3(2,3)$ ,  $B_4(3,-1)$  中, 是线段  $OA$  的偏序点的有\_\_\_\_\_;

②若直线  $l: y = x + b$  上存在线段  $OA$  的偏序点, 求  $b$  的取值的范围.

(2) 已知点  $M(-1,0)$ ,  $N(0,\sqrt{3})$ ,  $\odot C$  是以 1 为半径的圆, 并且圆心  $C$  在  $x$  轴上运动, 若线段  $MN$  上的点均为  $\odot C$  的某条直径的偏序点, 直接写出点  $C$  的横坐标  $c$  的取值的范围.

## 参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 【答案】C

【分析】利用科学记数法的定义解决. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数. 确定  $n$  的值时, 要看把原数变成  $a$  时, 小数点移动了多少位,  $n$  的绝对值大于 1 与小数点移动的位数相同.

【详解】解:  $423000 = 4.23 \times 10^5$ ,

故选: C.

2. 【答案】D

【分析】由题意直接根据轴对称图形的概念对选项依次进行判定, 即可得出结论.

【详解】解: A. 不是轴对称图形, 故此选项不符合题意;

B. 不是轴对称图形, 故此选项不符合题意;

C. 不是轴对称图形, 故此选项不符合题意;

D. 是轴对称图形, 故此选项符合题意.

故选: D.

【点睛】此题考查了轴对称图形的定义, 重点培养学生对图形的观察能力的空间想象能力, 掌握轴对称图形的定义并准确理解其含义是进行判断的关键.

3. 【答案】A

【分析】此题考查平行线的性质、三角形的内角和定理, 关键是根据平行线的性质解答.

根据平行线的性质和垂直的定义、三角形的内角和定理解答即可.

【详解】 $\because L_1 \parallel L_2$ ,

$\therefore \angle 1 = \angle CAB$ ,

$\because BC \perp L_3$ ,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

故选: A

4. 【答案】B

【分析】本题考查了实数与数轴、绝对值的定义, 解题的关键是掌握数轴知识和绝对值的定义. 有数轴知识得到  $a$  的取值范围, 再判断选项正误.

【详解】解: 由数轴可知,  $-1 < a < 0$ ,

$\therefore |a| < 1$ , A 选项错误;

$|a-1| = 1-a$ , B 选项正确;

$a+1 > 0$ , C 选项错误;

$-\frac{1}{a} > 1$ , D 选项错误.

故选: B

5. 【答案】A

【分析】根据根的判别式的意义得到  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot a = 0$ , 然后解方程即可.

【详解】根据题意得  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot a = 0$ ,

解得  $a = 1$ .

故选: A.

【点睛】本题考查了一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ : 当  $\Delta > 0$ , 方程有两个不相等的实数根; 当  $\Delta = 0$ , 方程有两个相等的实数根; 当  $\Delta < 0$ , 方程没有实数根.

6. 【答案】C

【分析】先求出正多边形的一个外角为:  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ , 再求出正多边形的边数为:  $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ , 根据正多边形的内角和公式求出结果即可.

【详解】解:  $\because$  正方形的一个内角为  $90^\circ$ ,

$\therefore$  正多边形的一个内角为:

$$(360^\circ - 90^\circ) \div 2 = 135^\circ,$$

$\therefore$  正多边形的一个外角为:  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ,

$\therefore$  正多边形的边数为:  $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ ,

$\therefore$  正多边形的内角和为:  $(8 - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ , 故 C 正确.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了正多边形的内角和外角, 解题的关键是根据图形求出正多边形的一个内角度数, 熟记多边形内角和公式.

7. 【答案】D

【分析】根据画树状图可知有 9 种可能, 再由树状图可知两次记录的颜色不同情况有 4 种, 最后由概率公式计算即可.

【详解】解: 根据题意画树状图:



由上图可得所有等可能的情况有 9 种, 其中两次摸出棋子颜色不同的情况有 4 种,

$$\text{所以 } P_{(\text{颜色不同})} = \frac{4}{9}.$$

故选: D.



【点睛】本题考查利用画树状图或列表法求概率，正确的画出树状图或列出表格是解答本题的关键。

8. 【答案】A

【分析】根据二次函数的图象与性质、反比例函数的图象与性质即可得。

【详解】解：若选择  $y = ax^2 + bx + c$ ,

由函数图象可知，此抛物线的开口向下，对称轴  $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ,

$\therefore a < 0, b > 0$ ;

若选择函数  $y = \frac{a}{x} + b$ ,

由函数图象可知，将反比例函数  $y = \frac{a}{x}$  ( $a < 0$ ) 的图象从第四象限向上平移  $b$  个单位即可得到函数

$y = \frac{a}{x} + b$  的图象，

$\therefore a < 0, b > 0$ ;

则依次填入的不等号为  $<, >, <, >$ ,

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质、反比例函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的图象与性质、反比例函数的图象与性质是解题关键。

## 二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 【答案】 $x \geq 3$

【分析】本题主要考查二次根式有意义的条件。根据二次根式有意义的条件：被开方数为非负数求解即可。

【详解】解：由题意知  $2x - 6 \geq 0$ ,

解得  $x \geq 3$ ,

故答案为： $x \geq 3$ 。

10. 【答案】 $3(x+2)(x-2)$

【分析】此题主要考查了提取公因式法与公式法的综合运用，正确运用平方差公式是解题关键。首先提取公因式 3，再利用平方差公式分解因式即可。

【详解】解：原式  $= 3(x^2 - 4)$   
 $= 3(x+2)(x-2)$ 。

故答案为： $3(x+2)(x-2)$ 。

11. 【答案】 $x = 2$

【分析】按照解分式方程的方法解方程即可。

【详解】解： $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{3x}$ ,

方程两边同乘  $3x(x+1)$  得,  $3x = 2(x+1)$ ,

解整式方程得,  $x = 2$ ,

当  $x = 2$  时,  $3x(x+1) \neq 0$ ,  $x = 2$  是原方程的解,

故答案为:  $x = 2$ .

**【点睛】** 本题考查了解分式方程, 解题关键是熟练运用解分式方程的方法解方程, 注意: 分式方程要检验.

12. **【答案】** <

**【分析】** 由  $k = -2 < 0$  根据一次函数的性质可得出该一次函数单调递减, 再根据  $x_1 > x_1 - 3$ , 即可得出结论.

**【详解】** 解:  $\because$  直线  $y = -2x + 3$  中,  $k = -2 < 0$ ,

$\therefore$  该一次函数随  $x$  的增大而减小,

$\therefore x_1 > x_1 - 3$ ,

$\therefore y_1 < y_2$ .

**【点睛】** 本题考查了一次函数的性质, 解题的关键是根据  $k = -2 < 0$  得出该一次函数  $y$  随  $x$  的增大而减小. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 根据一次项系数的正负得出该函数的增减性是关键.

13. **【答案】** 甲

**【分析】** 本题考查了方差和平均数, 先比较平均数得到甲和乙产量较高, 然后比较方差得到甲比较稳定, 即可求解, 掌握方差越小数据越稳定是解题的关键.

**【详解】** 解: 因为甲、乙的平均数比丙大, 所以甲、乙的产量较高, 又甲的方差比乙小, 所以甲的产量比较稳定,

即从这三个品种中选一种产量既高又稳定的枇杷树进行种植, 则应选的品种是甲;

故答案为: 甲.

14. **【答案】** 4

**【分析】** 本题考查了相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 勾股定理, 解题的关键是掌握相似三角形的判定方法. 证明  $\triangle AFD \sim \triangle EBA$ , 得到  $\frac{AF}{BE} = \frac{DF}{AB}$ , 求出  $BE$  即可.

**【详解】** 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  为矩形,

$\therefore AB = CD = 3$ ,  $BC = AD = 10$ ,  $AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle AEB = \angle DAF$ ,

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle EBA$ ,

$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{DF}{AB}$ ,

$\therefore DF = 6$ ,

$\therefore AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ ,

$\therefore \frac{8}{BE} = \frac{6}{3}$ ,

$$\therefore BE = 4,$$

故答案为: 4

15. 【答案】  $\frac{2l + \pi d}{2}$

【分析】 本题考查列代数式, 熟知扇形弧长公式是解题的关键. 根据由大小相同的四个云纹图案组成, 可得出每个扇环所在扇形的圆心角, 再由弧长公式分别表示出  $l$  和  $x$  即可解决问题.

【详解】 解: 由题知, 它由大小相同的四个云纹图案组成,

所以每个扇环所在扇形的圆心角为:  $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ .

令“下圆弧”所在圆的半径为  $r$ ,

$$\text{则 } l = \frac{90\pi r}{180},$$

$$\text{所以 } r = \frac{2l}{\pi}.$$

$$\text{则 } x = \frac{90\pi(\frac{2l}{\pi} + d)}{180} = \frac{2l + \pi d}{2}.$$

故答案为:  $\frac{2l + \pi d}{2}$

16. 【答案】 ①. B ②. 4

【分析】 根据排列规则依次确定白 1, 白 2, 白 3, 白 4 的位置, 即可得出答案.

【详解】 解: 第一行中  $B$  与第二行中  $c$  肯定有一张为白 1, 若第二行中  $c$  为白 1, 则左边不可能有 2 张黑卡片,

$\therefore$  白卡片数字 1 摆在了标注字母  $B$  的位置,

$\therefore$  黑卡片数字 1 摆在了标注字母  $A$  的位置;

第一行中  $C$  与第二行中  $c$  肯定有一张为白 2, 若第二行中  $c$  为白 2, 则  $a, b$  只能是黑 1, 黑 2, 而  $A$  为黑 1, 矛盾,

$\therefore$  第一行中  $C$  为白 2;

第一行中  $F$  与第二行中  $c$  肯定有一张为白 3, 若第一行中  $F$  为白 3, 则  $D, E$  只能是黑 2, 黑 3, 此时黑 2 在白 2 右边, 与规则②矛盾,

$\therefore$  第二行中  $c$  为白 3,

$\therefore$  第二行中  $a$  为黑 2,  $b$  为黑 3;

第一行中  $F$  与第二行中  $e$  肯定有一张为白 4, 若第一行中  $F$  为白 4, 则  $D, E$  只能是黑 3, 黑 4, 与  $b$  为黑 3 矛盾,

$\therefore$  第二行中  $e$  为白 4.

故答案为: ①B, ②4.

【点睛】 本题考查图形类规律探索, 解题的关键是理解题意, 根据所给规则依次确定出白 1, 白 2, 白 3, 白 4 的位置.

三、解答题（共 68 分，第 17—22 题每题 5 分，第 23—26 题每题 6 分，第 27，28 每题 7 分）

17. 【答案】  $-2\sqrt{3}$

【分析】先计算特殊角三角函数、二次根式、负整数次幂、绝对值，再进行加减运算.

【详解】解：  $2\sin 60^\circ - \sqrt{12} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + |2 - \sqrt{3}|$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{1}{-\frac{1}{2}} + 2 - \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2 + 2 - \sqrt{3}$$
$$= -2\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查实数的混合运算，涉及特殊角三角函数、二次根式、负整数次幂、绝对值等知识点，正确计算是解题的关键.

18. 【答案】  $-2 < x < 0$ ，数轴表示见解析

【分析】此题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组取解集的方法是解本题的关键.

分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分，表示在数轴上即可.

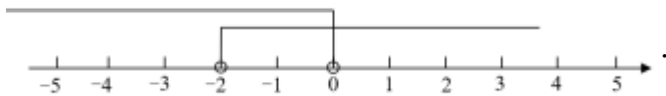
【详解】 
$$\begin{cases} 2x - 3 > x - 5 \text{ ①} \\ \frac{2x + 6}{3} < 2 - x \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得，  $x > -2$ ，

解不等式②得，  $x < 0$ ，

∴原不等式组的解集为  $-2 < x < 0$  .

把它的解集在数轴上表示出来如图：



19. 【答案】 3

【分析】本题考查代数式求值，整式的混合运算—化简求值，解答本题的关键是明确整式化简求值的方法. 根据完全平方公式和平方差公式可以化简题目中的式子，然后将  $3x^2 + 4x = 1$  代入化简后的式子即可解答本题.

【详解】解：  $(2x+1)^2 - (x+1)(x-1)$

$$= (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 1)$$
$$= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 1$$
$$= 3x^2 + 4x + 2;$$

$$\because 3x^2 + 4x - 1 = 0, \text{ 即 } 3x^2 + 4x = 1,$$

$$\therefore 3x^2 + 4x + 2 = 1 + 2 = 3,$$

即  $(2x+1)^2 - (x+1)(x-1)$  的值为 3.

20. 【答案】(1) 见解析 (2) 5

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、勾股定理等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解答本题的关键.

(1) 证  $\triangle FCE \cong \triangle ACD$  (ASA), 得  $EF = AD$ , 再由平行四边形的判定即可得出结论;

(2) 由平行四边形的性质得  $EF = AD = 3$ , 再由等腰三角形的性质得  $CD = BD = 2$ , 则  $DE = 2CD = 4$ , 进而由勾股定理得  $DF$  的长即可.

【小问 1 详解】

证明:  $\because EF \parallel AD$ ,

$$\therefore \angle FEC = \angle ADC,$$

在  $\triangle FCE$  和  $\triangle ACD$  中,

$$\begin{cases} \angle FEC = \angle ADC \\ CE = CD \\ \angle FCE = \angle ACD \end{cases},$$

$\therefore \triangle FCE \cong \triangle ACD$  (ASA),

$$\therefore EF = AD,$$

$\therefore$  四边形  $ADFE$  是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知, 四边形  $ADFE$  是平行四边形,

$$\therefore EF = AD = 3,$$

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore CD = BD = 2,$$

$$\therefore CE = CD = 2,$$

$$\therefore DE = 2CD = 4,$$

$$\because EF \parallel AD,$$

$$\therefore EF \perp BC,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

21. 【答案】(1) 见解析 (2)  $k = \pm \frac{3}{2}$

【分析】(1) 根据根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ , 即可判断;

(2) 利用根与系数关系求出  $x_1 + x_2$ ,  $x_1 \cdot x_2$ , 即  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$ , 从而列出关于  $k$  的方



程，解出即得出结果.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because \Delta = b^2 - 4ac = (-4k)^2 - 4 \times 1 \cdot 3k^2 = 16k^2 - 12k^2 = 4k^2 \geq 0,$$

$\therefore$  该方程总有两个实数根;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  方程的两个实数根  $x_1, x_2$ ,

$$\text{由根与系数关系可知, } x_1 + x_2 = 4k, \quad x_1 \cdot x_2 = 3k^2,$$

$$\therefore x_1 - x_2 = 3$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 9$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9,$$

$$\text{即 } 16k^2 - 12k^2 = 4k^2 = 9,$$

$$\therefore k = \pm \frac{3}{2}.$$

【点睛】 本题考查了根的判别式以及根与系数的关系，解题的关键是利用一元二次方程的根的判别式以及根与系数的关系.

22. 【答案】 (1)  $y = \frac{1}{2}x + 1$

(2)  $0 < m \leq \frac{3}{2}$  或  $m < 0$

【分析】 (1) 先根据两直线平行确定  $k$  值，再将  $A(2, 2)$  代入求解;

(2) 分  $m > 0$  和  $m < 0$  两种情况，利用数形结合思想求解.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  一次函数  $y = kx + b (k \neq 0)$  的图象平行于直线  $y = \frac{1}{2}x$ ,

$$\therefore k = \frac{1}{2},$$

将  $A(2, 2)$  代入  $y = \frac{1}{2}x + b$ , 得:

$$2 = \frac{1}{2} \times 2 + b,$$

解得:  $b = 1$ ,

$\therefore$  这个一次函数的表达式为  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ;

【小问 2 详解】

解：当  $m > 0$  时， $y = \frac{m}{x} (x > 0)$  的图象位于第一象限，

将  $x = 1$  代入  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，得  $y = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$ ，

将点  $(1, \frac{3}{2})$  代入  $y = \frac{m}{x}$ ，得  $m = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore 0 < m \leq \frac{3}{2}$ ；

当  $m < 0$ ， $x > 0$  时， $y = \frac{m}{x} (x > 0)$  的图象位于第四象限，一次函数  $y = \frac{1}{2}x + 1$  的图象位于第一象限，

$\therefore$  对于  $x$  的每一个值，一次函数  $y = \frac{1}{2}x + 1$  的值大于函数  $y = \frac{m}{x} (x > 0)$  的值，

综上所述， $m$  的取值范围为： $0 < m \leq \frac{3}{2}$  或  $m < 0$ 。

**【点睛】** 本题考查求一次函数解析式，一次函数与反比例函数的交点问题，解题的关键是熟练运用数形结合思想，第二问注意分情况讨论。

23. **【答案】** (1) 86; 89

(2) 八年级的学生掌握科普知识较好，理由见解析

(3) 两个年级成绩达到 90 分及以上的学生一共约有 315 人。

**【分析】** 本题考查频数（率）分布直方图、扇形统计图、用样本估计总体、平均数、中位数、众数，能够读懂统计图，掌握用样本估计总体平均数、中位数、众数的定义是解答本题的关键。

(1) 根据中位数、众数的定义可得答案。

(2) 根据平均数、中位数的意义可得结论。

(3) 根据用样本估计总体，用 400 乘以七年级成绩达到 90 分及以上的百分比加上 500 乘以八年级成绩达到 90 分及以上的百分比即可得出答案。

**【小问 1 详解】**

由七年级 20 名学生的成绩可知，出现次数最多的为 86，

$\therefore a = 86$ 。

八年级 20 名学生的成绩在 B 组中的人数为  $20 \times 20\% = 4$  (人)，

将八年级 20 名学生的成绩按照从小到大的顺序排列，排在第 10 和 11 位的为 89, 89，

$\therefore b = (89 + 89) \div 2 = 89$ 。

故答案为：86; 89。

**【小问 2 详解】**

八年级的学生掌握科普知识较好。

理由：七年级和八年级抽取的学生成绩的平均数相同，但八年级的中位数比七年级的中位数大，所以八年级的学生掌握科普知识较好。

【小问 3 详解】

$$400 \times \frac{7}{20} + 500 \times \frac{20-4-9}{20} = 140 + 175 = 315 \text{ (人)}.$$

∴ 两个年级成绩达到 90 分及以上的学生一共约有 315 人.

24. 【答案】(1) 见解析 (2) 9

【分析】本题考查了切线的判定和性质，圆周角定理，平行线分线段成比例定理，三角形的中位线的性质，射影定理，正确的作出辅助线是解题的关键.

(1) 连接  $DC$ ，根据圆周角定理得到  $\angle DCA = \frac{1}{2} \angle DOA$ ，由于  $\angle ADQ = \frac{1}{2} \angle DOQ$ ，得到  $\angle DCA = \angle ADQ$ ，

根据余角的性质得到  $\angle ADQ + \angle ADO = 90^\circ$ ，于是得到结论；

(2) 根据切线的判定定理得到  $PC$  是  $\odot O$  切线，求得  $PD = PC$ ，连接  $OP$ ，得到  $\angle DPO = \angle CPO$ ，根据平行线分线段成比例定理得到  $OP = 9$ .

【小问 1 详解】

证明：连接  $DC$ ，

$$\because AD = AD,$$

$$\therefore \angle DCA = \frac{1}{2} \angle DOA,$$

$$\because \angle ADQ = \frac{1}{2} \angle DOQ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle ADQ,$$

∵  $AC$  是  $\odot O$  的直径，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DCA + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADQ + \angle DAC = 90^\circ, \quad \angle ADO = \angle DAO,$$

$$\therefore \angle ADQ + \angle ADO = 90^\circ,$$

∴  $DP$  是  $\odot O$  切线；

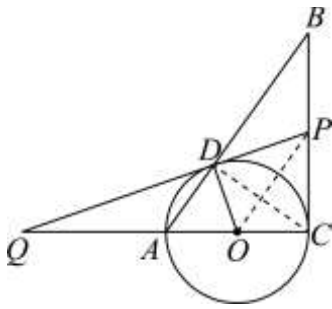
【小问 2 详解】

∵  $\angle C = 90^\circ$ ， $OC$  为半径.

∴  $PC$  是  $\odot O$  切线，

$$\therefore PD = PC,$$

连接  $OP$ ，



$$\therefore \angle DPO = \angle CPO,$$

$$\therefore OP \perp CD,$$

$$\therefore OP \parallel AD,$$

$$\therefore AQ = AC = 2OA,$$

$$\therefore \frac{QA}{QO} = \frac{AD}{OP} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{6}{OP} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore OP = 9.$$

25. 【答案】(1) 15m, 5m

$$(2) h = -\frac{1}{45}s^2 + \frac{2}{3}s$$

(3) 守门员能成功防守, 见详解.

【分析】本题考查的是二次函数的实际应用, 利用待定系数法求解二次函数的解析式, 理解函数图像上点的横坐标与纵坐标的含义.

(1) 根据抛物线的对称轴可直接得出结论;

(2) 根据抛物线的对称性找到顶点, 设出顶点式, 再代入(12, 4.8)可求出参数, 由此可解答;

(3) 把  $s = 27\text{m}$  代入二次函数解析式求出  $h$ , 再与最大防守高度比较即可.

【小问 1 详解】

解:  $s = 15\text{m}$  时,  $h$  达到最大值 5m;

【小问 2 详解】

由(1)知, 抛物线顶点坐标(15, 5), 设  $h = a(s - 15)^2 + 5$ ,

把(12, 4.8)代入解析式,

$$\therefore (12 - 15)^2 a + 5 = 4.8,$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{45},$$

$$\therefore h = -\frac{1}{45}(s - 15)^2 + 5 = -\frac{1}{45}s^2 + \frac{2}{3}s.$$

【小问 3 详解】

当  $s = 27m$ ,

$$\therefore h = -\frac{1}{45}(s-15)^2 + 5 = -\frac{1}{45} \times 12^2 + 5 = -3.2 + 5 = 1.8,$$

$\therefore 1.8 < 2.6$ ,

$\therefore$  守门员能成功防守.

26. 【答案】(1) 顶点坐标为  $(4, -15)$ , 对称轴为直线  $x = 4$

(2) 见解析; (3)  $1 < m < 2$  或  $m > 8$ .

【分析】本题考查了二次函数的图象与系数的关系、二次函数图象上的点的坐标特点、二次函数的增减性, 熟练掌握二次函数图象上的点的坐标特点及二次函数的性质是解题的关键.

(1) 由配方法可求出顶点坐标;

(2) 将已知两点代入求出  $p = 2 - 2m$ ,  $q = 2 + 2m$ , 再表示出  $pq$  即可求解;

(3) 分两种情况, 当  $-4 < m + 2 < a$  时, 当  $-4 < a < m + 2$  时, 由二次函数的性质可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 当  $m = 4$  时,  $y = x^2 - 8x + 1 = (x - 4)^2 - 15$ ,

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(4, -15)$ , 对称轴为直线  $x = 4$ ;

【小问 2 详解】

证明:  $\because$  函数图象经过点  $(1, p)$ ,  $(-1, q)$ ,

$$\therefore p = 1 - 2m + 1 = 2 - 2m, \quad q = 1 + 2m + 1 = 2 + 2m,$$

$$\therefore pq = (2 - 2m)(2 + 2m) = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2),$$

$$\therefore 1 - m^2 \leq 1,$$

$$\therefore pq \leq 4;$$

【小问 3 详解】

解:  $\because$  对于任意的  $4 \leq a \leq 6$  都满足  $y_1 > y_3 > y_2$ ,

$\therefore$  点  $A$ ,  $B$ ,  $C$  存在如下情况:

情况 1, 如图 1, 当  $-4 < m + 2 < a$  时,

$$\text{当 } A、C \text{ 两点对称时, } m = \frac{-4+a}{2},$$

$$\therefore y_1 > y_3,$$

$$\therefore \frac{-4+a}{2} < m,$$

$$\therefore \frac{-4+a}{2} < m < a - 2,$$

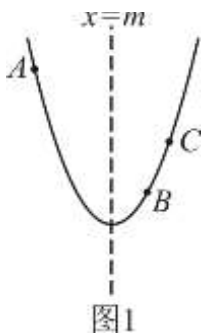
$$\therefore m + 2 < a < 2m + 4,$$

$$\therefore m + 2 = 4 \text{ 或 } 2m + 4 = 6,$$

$$\therefore 1 < m < 2;$$

关注北京高考在线官方微信: **京考一点通** (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。





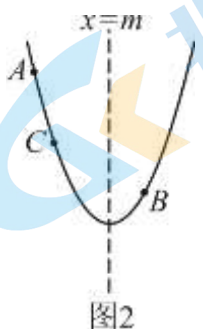
情况 2, 如图 2, 当  $-4 < a < m+2$  时,  $\frac{a+m+2}{2} < m$ ,

$$\therefore \begin{cases} m > a-2 \\ m > a+2 \end{cases}$$

$$\therefore m > a+2,$$

$$\therefore 4 \leq a \leq 6$$

$$\therefore m > 8,$$



综上所述,  $1 < m < 2$  或  $m > 8$ .

27. 【答案】(1) ①见解析, ②  $AH = PH, AH \perp PH$ , 证明见解析

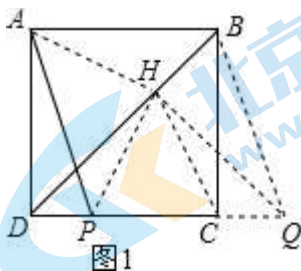
$$(2) \sqrt{3}$$

【分析】(1) ①根据题意画出图形即可; ②连接  $CH$ , 先根据正方形的性质得出  $\triangle DHQ$  是等腰直角三角形, 再由 SAS 定理得出  $\triangle HDP \cong \triangle HQC$ , 故  $PH = CH, \angle HPC = \angle HCP$ , 由正方形的性质即可得出结论;

(2) 同 (1) ②的可证  $AH = PH, AH \perp PH$ , 得出  $\angle HPA = 45^\circ$ , 推导出  $\angle APD = 30^\circ$ , 再由三角函数即可求解.

【小问 1 详解】

解: ①如图 1;



②  $AH = PH, AH \perp PH$ .

如图 1, 连接  $CH$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore \angle BDC = 45^\circ$ ,

又  $QH \perp BD$ ,

$\therefore \triangle DHQ$  是等腰直角三角形,

由平移的性质可知  $DP = CQ$ ,

在  $\triangle HDP$  和  $\triangle HQC$  中,

$$\begin{cases} HD = HQ \\ \angle HDP = \angle HQC, \\ DP = QC \end{cases}$$

$\therefore \triangle HDP \cong \triangle HQC$  (SAS),

$\therefore HP = HC, \angle DHP = \angle QHC$ ,

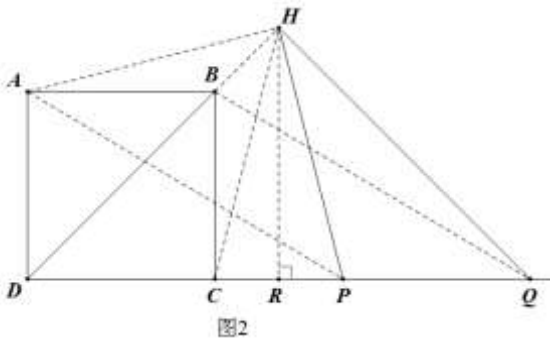
根据正方形是轴对称图形得到  $HA = HC, \angle AHD = \angle CHD$ ,

$\therefore AH = PH, AH \perp PH$ ;

#### 【小问 2 详解】

解: 如图 2, 点  $P$  在线段  $DC$  的延长线上, 点  $D$  移动到点  $C$ , 得到  $\triangle BCQ$ , 过点  $Q$  作  $QH \perp BD$  于  $H$ ,

连接  $AH, PH, CH$ , 作  $HR \perp PC$  于点  $R$ ,



同 (1) ② 可证:  $AH = PH, AH \perp PH$ ,

$\therefore \angle HPA = 45^\circ$ ,

$\therefore \angle AHQ = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle AHB = \angle CHB = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle QHP = \angle CHB = \angle CHP = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle CPH = 75^\circ$ ,

$\therefore \angle APD = 30^\circ$ ,

在  $\text{Rt}\triangle APD$  中,  $AD = 1$ ,

$\therefore PD = AD \cdot \tan 60^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .

【点睛】此题是四边形综合题，主要考查了正方形的性质、图形平移的性质、全等三角形的判定与性质等知识，难度适中，解决本题的关键是熟记全等三角形的性质定理和判定定理。

28. 【答案】(1) ①  $B_1, B_4$ ; ②  $-2-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

$$(2) -\sqrt{6} < c < -2 \text{ 或 } \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 < c < 2$$

【分析】此题是一道新定义题，主要考查了对新定义“偏序点”的理解、两点距离公式、勾股定理等知识，对“偏序点”的正确理解是难点，熟练运用两点距离公式、运用数形结合与分类讨论的思想方法是解此题的关键。

(1) ①根据题中给出的偏序点的定义，一一进行判断即可；

②分两种情况进行讨论：当直线在点  $O$  左侧时；当直线在点  $A$  右侧时；然后即可求解；

(2) 分两种情况讨论：一是当  $\odot C$  在线段  $MN$  的左侧时，点  $M$ 、点  $N$  到圆上的最短距离都要小于 2；二是当  $\odot C$  在线段  $MN$  的右侧时，点  $M$ 、点  $N$  到圆上的最短距离也都要小于 2；分别求出满足的条件后再综合即可得出答案。

【小问 1 详解】

解：①  $\because B_1O = 1, OA = 2, B_1A = 3,$

$$\therefore B_1O < OA < B_1A,$$

$\therefore B_1$  是线段  $OA$  的偏序点；

$$\because B_2O = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, OA = 2, B_2A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$\therefore B_2$  不是线段  $OA$  的偏序点；

$$\because B_3O = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, OA = 2, B_3A = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3,$$

$\therefore B_3$  不是线段  $OA$  的偏序点；

$$\because B_4O = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, OA = 2, B_4A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore B_4$  是线段  $OA$  的偏序点；

故答案为：  $B_1, B_4$ ；

②  $\because OA = 2$ ，若直线  $l: y = x + b$  上存在线段  $OA$  的偏序点，如图 1 所示。

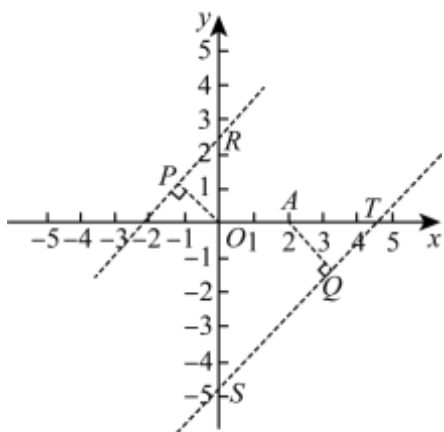


图1

当直线在点  $O$  左侧时，点  $O$  到直线  $l: y = x + b$  的距离小于 2，即  $OP < 2$ ，

$\therefore$  在等腰  $\text{Rt}\triangle OPR$  中， $OR < 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore b < 2\sqrt{2}$ ；

当直线在点  $A$  右侧时，点  $A$  到直线  $l: y = x + b$  的距离小于 2，即  $AQ < 2$ ，

$\therefore$  在等腰  $\text{Rt}\triangle OTS$  中， $OS + OT < 2 + 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore b > -2 - 2\sqrt{2}$ ；

故  $b$  的取值的范围是： $-2 - 2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$ ；

【小问 2 详解】

(2) 如图 2，线段  $MN$  上的点均为  $\odot C$  的某条直径的偏序点，

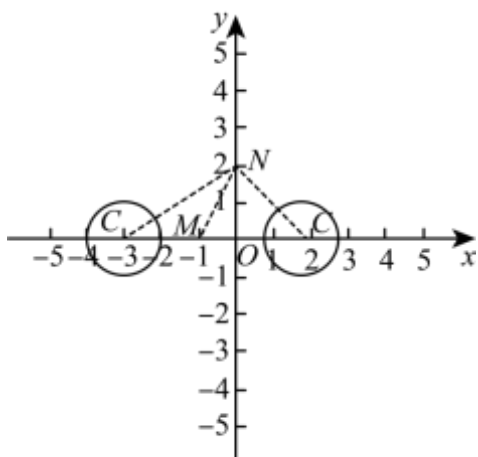


图2

当  $\odot C$  在线段  $MN$  的左侧时，

点  $M$  到圆上的最短距离要小于 2，

此时  $OC < 4$ ，

则  $c > -4$ ，

同时，点  $N$  到圆上的最短距离也要小于 2，

此时  $CN < 3$ ，

$$\text{则 } OC < \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore c > -\sqrt{6},$$

$\therefore$  当  $\odot C$  在线段  $MN$  的左侧时,  $c > -\sqrt{6}$ ;

当  $\odot C$  在线段  $MN$  的右侧时,

点  $M$  到圆上的最短距离要小于 2,

此时  $OC < 2$ ,

则  $c < 2$ ,

同时, 点  $N$  到圆上的最短距离也要小于 2,

此时  $CN < 3$ ,

$$\text{则 } OC < \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore c < \sqrt{6},$$

$\therefore$  当  $\odot C$  在线段  $MN$  的右侧时,  $c < 2$ ;

$\therefore$  偏序点应该会形成圆环型的区域, 那么答案应该去掉半径为 1 的小圆, 找到相切状态,

$$\therefore -\sqrt{6} < c < -2 \text{ 或 } \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 < c < 2.$$

故线段  $MN$  上的点均为  $\odot C$  的某条直径的偏序点, 点  $C$  的横坐标  $c$  的取值的范围是  $-\sqrt{6} < c < -2$  或

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 < c < 2.$$



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

