2023 北京八一学校高三 10 月月考

数　　学

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x||x|<3\}$，$B=\{x\in\mathrm{N}|\ x^2<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 已知角 α 终边经过点 $P(2,1)$，则 $\sin\alpha=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 2

3. 已知命题 $\exists x\in(0,+\infty)$，$\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$，则 $\neg p$ 为（　）

A. $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$　　B. $\exists x\in(0,+\infty)$，$\ln x\leq 1-\frac{1}{x}$

C. $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x<1-\frac{1}{x}$　　D. $\forall x\notin(0,+\infty)$，$\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$

4. 已知 $a=\ln\frac{1}{2}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，$c=2^{-\frac{1}{2}}$，则（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，则 $\cos 2\alpha=$（　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $-\sqrt{2}$

6. 若 $a+b<0$，且 $b>0$，则（　）

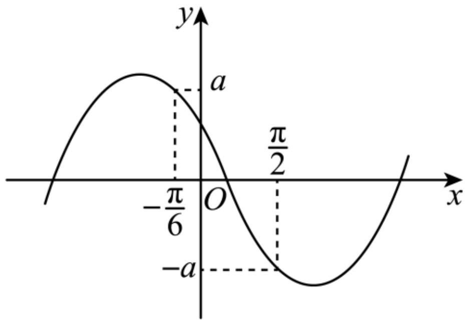
A. $ab<a^2<b^2$　　B. $a^2<b^2<-ab$　　C. $b^2<-ab<a^2$　　D. $a^2<-ab<b^2$

7. 已知函数 $f(x)=\tan x$ 和直线 $l:y=x+a$，那么“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”是“$a=0$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 t（$t>0$）个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象．若函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称，则 t 的最小值（　）



A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

9. 某批救灾物资随 41 辆汽车从某市以 v km/h 的速度匀速直达灾区，已知两地公路线长 360km，为安全起见，两辆汽车的间距不得小于 $\dfrac{v^2}{900}$ km（车长忽略不计），要使这批物资尽快全部到达灾区，则 $v=$（　）

A. 70　　B. 80　　C. 90　　D. 100

10. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，且 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.若对任意 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$，都有 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则满足 $f(\theta)<2\cos\theta\cdot f(\dfrac{\pi}{3})$ 的 θ 的取值范围是（　）

A. $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3})$　　B. $(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3})\cup(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

C. $(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$　　D. $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 在复平面内，复数 $z=1-2i$ 对应的点到原点的距离是_______.

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\notin Q\end{cases}$，则 $f\left(\sqrt{2}\right)=$______.

13. 若函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)+1$，其中 $\omega>0$ 对任意的 x 都有 $f(x)=f(2-x)$，写出一组符合条件的 ω，φ 的值______.

14. 设函数 $f(x)=xe^x-a(x-1)$，其中 $a<1$，若存在唯一整数 x_0，使得 $f(x_0)<a$，则 a 的取值范围是

__________.

15. 已知函数 $f(x)=\ln\left(ax+\sqrt{x^2+1}\right)$，则下列说法正确的是______.

①函数 $f(x)$ 的定义域为 R.

②$\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 为奇函数.

③$\forall a\in[0,+\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数.

④$\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 有极小值点.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos 2x(x\in\mathrm{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）求 $f(x)$ 的最小正周期，对称轴，对称中心；

（3）设 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，求 $f(x)$ 的值域.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足

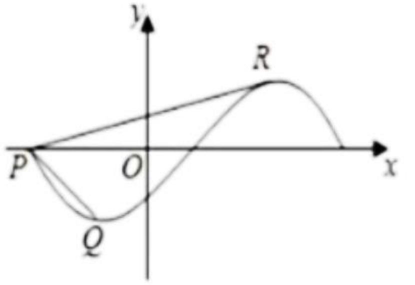
$(b-a)(\sin B+\sin A)=c\left(\sqrt{3}\sin B-\sin C\right)$

（1）求角 A 的大小；

（2）已知① $a=2$，② $B=\frac{\pi}{4}$，③ $c=2\sqrt{3}b$ 在这三个条件中任选两个，补充在下面的问题中，并解块该问题.

已知__________，__________，若 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积；若不存在，说明理由.

18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}\right)$ 在一个周期内的图象如图所示，其中，点 P 的坐标为 $(-6,0)$，点 Q 是 $f(x)$ 图象上的最低点且坐标为 $(-2,-3)$，点 R 是 $f(x)$ 图象上的最高点.



（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）记 $\angle RPO=\alpha$，$\angle QPO=\beta$（α，β 均为锐角），求 $\tan(2\alpha+\beta)$ 的值.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 的极大值点为 2，求 a 的取值范围；

（3）证明：当 $a\ge 1$ 时，$f(x)+\mathrm{e}\ge 0$

20. 已知函数 $f(x)=x\cos x-ax+a$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$(a\ne 0)$.

（1）当 $a\ge 1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求证：$f(x)$ 有且仅有一个零点.

21. 已知x为实数，用$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[1.2]=1$，$[-1.2]=-2$，$[1]=1$. 对于函数$f(x)$，若存在$m\in R$且$m\notin Z$，使得$f(m)=f([m])$，则称函数$f(x)$是“和谐”函数.

（1）判断函数$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$，$g(x)=\sin\pi x$是否是“和谐”函数；（只需写出结论）

（2）设函数$f(x)$是定义在R上的周期函数，其最小周期为T，若$f(x)$不是“和谐”函数，求T的最小值.

（3）若函数$f(x)=x+\frac{a}{x}$是“和谐”函数，求a的取值范围.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】根据绝对值不等式的解法化简集合 A，根据一元二次不等式的解法及自然数集化简集合 B，然后利用交集运算求解即可.

【详解】因为集合 $A=\{x||x|<3\}=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{x\in \mathrm{N}|\ x^2<2\}=\{0,1\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选：A.

2.【答案】B

【分析】由三角函数的定义即可求解.

【详解】由三角函数的定义可知，角 α 终边经过点 $P(2,1)$，故 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：B

3.【答案】C

【分析】由存在命题的否定是全称命题即可得出答案.

【详解】命题 $\exists x\in(0,+\infty)$，$\ln x\ge 1-\dfrac{1}{x}$，

则 $\neg p$ 为：$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x<1-\dfrac{1}{x}$.

故选：C.

4.【答案】A

【分析】根据对数函数的单调性得 $b>1, a<0$，由指数函数的性质得 $0<c<1$，即可比较.

【详解】$a=\ln\dfrac{1}{2}<\ln 1=0$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 2=1$，

又 $0<c=2^{-\frac{1}{2}}<2^0=1$，所以 $b>1>c>0>a$，即 $b>c>a$.

故选：A.

5.【答案】A

【分析】根据辅助角公式化简 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ 可得 α，进而可得 $\cos 2\alpha$.

【详解】$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ 即 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，故

$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,(k\in \mathrm{Z})$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,(k\in \mathrm{Z})$.

故 $\cos 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)=0,(k\in Z)$.

故选：A

6.【答案】C

【分析】根据不等式的性质可得 $a^2<b^2$，排除 ABD，再根据不等式性质判断 C 即可.

【详解】对 ABD，因为 $a+b<0$，故 $b<-a$，又 $b>0$，故 $0<b<-a$，故 $0<b^2<(-a)^2=a^2$，即 $b^2<a^2$，故 ABD 错误；

对 C，$b^2+ab=b(a+b)<0$，故 $b^2<-ab$，

又 $a^2+ab=a(a+b)$，因为 $a+b<0$，且 $b>0$，故 $a<0$，

故 $a(a+b)>0$，即 $-ab<a^2$，则 $b^2<-ab<a^2$，故 C 正确；

故选：C

7.【答案】B

【分析】根据导数的几何意义求解 a，再根据充分、必要条件的概念判断即可.

【详解】设直线 $l:y=x+a$ 与曲线 $f(x)=\tan x$ 相切于点 (x_0,y_0)，

由 $f(x)=\tan x$ 可得 $f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$，于是有：$\begin{cases}1=\frac{1}{\cos^2 x_0}\\ y_0=x_0+a\\ y_0=\tan x_0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\cos^2 x_0=1\\ a=-x_0\\ y_0=\tan x_0=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_0=k\pi,k\in Z\\ a=-k\pi,k\in Z\end{cases}$，

当 $k=0$ 时，$a=0$，所以 $a=0$ 时，直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切，

但是直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切时，a 不一定为 0，

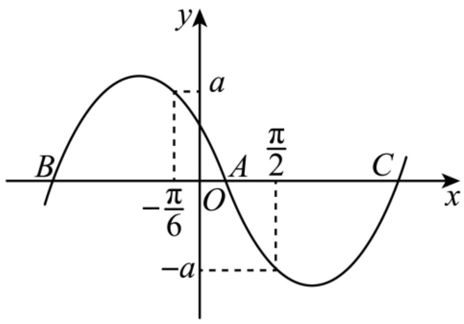
即“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”是“$a=0$”的必要不充分条件.

故选：B

8.【答案】B

【分析】结合函数图像求出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像距离原点最近的点的坐标，即可确定 t 的值

【详解】解：如图设函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像与 x 轴的交点为 A,B,C，



由图可知 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，

所以点 $\left(-\frac{\pi}{6},a\right)$ 与点 $\left(\frac{\pi}{2},-a\right)$ 关于点 A 对称，

设 $A(x_A,0)$，则 $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=2x_A$，解得 $x_A=\frac{\pi}{6}$，

因为将函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 函数的图像向左平移 t（$t>0$）个单位长度，得到函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像，

且图像关于原点对称，

所以平移后的函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，即 $f(0)=0$ 相当于把 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图像与 x 轴最近的交点

平移到坐标原点即，由图可知此点为 $A\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，

所以 $t=\frac{\pi}{6}$，

故选：B

9.【答案】C

【分析】根据题意列式后由基本不等式求解

【详解】第一辆汽车到达灾区所用的时间为 $\frac{360}{v}$ h，

由题意，知最短每隔 $\frac{\frac{v^2}{900}}{v}=\frac{v}{900}$ h 到达一辆，则最后一辆汽车到达灾区所用的时间为

$\left(\frac{360}{v}+40\times\frac{v}{900}\right)$h，

要使这批物资尽快全部到达灾区，即要求最后一辆汽车到达灾区所用的时间最短.

又 $\frac{360}{v}+40\times\frac{v}{900}=\frac{360}{v}+\frac{2v}{45}\geq 2\sqrt{\frac{360}{v}\cdot\frac{2v}{45}}=8$，当且仅当 $\frac{360}{v}=\frac{2v}{45}$，即 $v=90$ 时等号成立.

故选：C

10.【答案】D

【分析】

令 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，先判断函数 $g(x)$ 为奇函数，再判断函数 $g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，由

$f(\theta)<2\cos\theta\cdot f(\frac{\pi}{3})$，得 $g(\theta)<g(\frac{\pi}{3})$，即可求出．

【详解】令 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$x\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，

$\because f(x)$ 为奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数，

$\therefore g(x)$ 为奇函数．

$\because \forall x\in(-\frac{\pi}{2}，0)$，有 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，

$\therefore g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{cos^2x}<0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}，0)$ 上单调递减，又 $g(x)$ 为奇函数，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，

当 $x\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，$\cos x>0$，

$\because f(\theta)<2\cos\theta\cdot f(\frac{\pi}{3})$，

$\therefore \frac{f(\theta)}{\cos\theta}<\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{3}}$，

$\therefore g(\theta)<g(\frac{\pi}{3})$，

$\therefore \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$

故选：D

【点睛】本题主要考查利用导数研究函数的单调性、构造函数比较大小,属于难题.联系已知条件和结论，构造辅助函数是高中数学中一种常用的方法，解题中若遇到有关不等式、方程及最值之类问题，设法建立起目标函数，并确定变量的限制条件，通过研究函数的单调性、最值等问题，常可使问题变得明了，准确构造出符合题意的函数是解题的关键；解这类不等式的关键点也是难点就是构造合适的函数，构造函数时往往从两方面着手：①根据导函数的“形状”变换不等式“形状”；②若是选择题，可根据选项的共性归纳构造恰当的函数.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\sqrt{5}$

【详解】因为复数 $z=1-2i$，所以 $|z|=\sqrt{1+(-2)^2}=\sqrt{5}$，根据复数模的几何意义可知故选复数 $z=1-2i$ 对应的点到原点的距离是 $\sqrt{5}$，故答案为 $\sqrt{5}$.

12.【答案】0

【分析】根据分段函数解析式求值即可.

【详解】因为 $\sqrt{2}\notin Q$，所以 $f\left(\sqrt{2}\right)=0$.

故答案为：0

13.【答案】1, -1（答案不唯一）

【分析】根据余弦函数的对称性建立方程，然后赋值即可求解.

【详解】由 $f(x)=f(2-x)$ 得直线 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个对称轴，

令 $\omega x+\varphi=k\pi, k\in Z$ 得 $x=\dfrac{k\pi}{\omega}-\dfrac{\varphi}{\omega}, k\in Z$，当 $k=0$ 时，$x=-\dfrac{\varphi}{\omega}$，

不妨取 $-\dfrac{\varphi}{\omega}=1$，即 $\varphi=-\omega$，

则符合题意的一组 ω，φ 的值为 1, -1（答案不唯一）.

故答案为：1, -1（答案不唯一）.

14.【答案】$\left[\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}\right)$

【分析】令 $g(x)=xe^x$，$h(x)=ax$，求出 $g'(x)$ 后画出 $g(x)$、$h(x)$ 的图象，数形结合建立不等式组，即可得解.

【详解】存在唯一整数 x_0，使得 $f(x_0)<a$，即存在唯一整数 x_0，使得 $x_0e^{x_0}<ax_0$

令 $g(x)=xe^x$，$h(x)=ax$，则 $g'(x)=xe^x+e^x=(x+1)e^x$，

$\therefore$ 当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减；

当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

而 $g(-1)=-\dfrac{1}{e}, g(0)=0, g(-2)=-2e^{-2}$；

当 $x\to-\infty$ 时，$e^x\to0$，所以 $xe^x\to0$ 且当 $x<0$ 时，$xe^x<0$

因为存在唯一的整数 x_0 使得 $x_0e^{x_0}<ax_0$.

当直线 $h(x)=ax$ 与 $g(x)=xe^x$ 相切时，

设切点为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，则切线的斜率为 $k=(x_0+1)e^{x_0}$，

又直线 $h(x)=ax$ 过原点，所以此时 $h(x)=(x_0+1)e^{x_0}x$

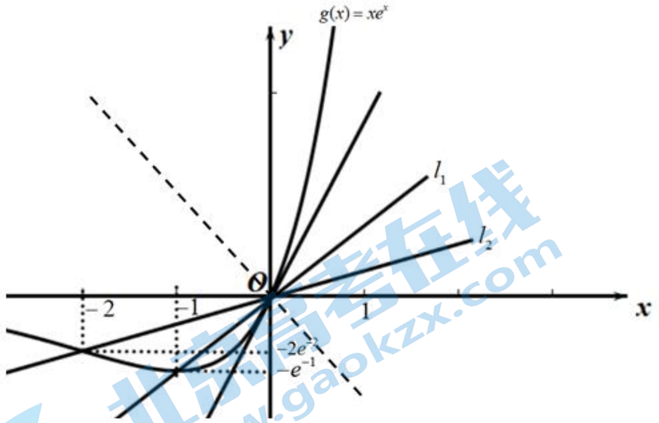
由切点再切线上，可得 $x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}x_0$，解得 $x_0=0$

所以 $a=k=(0+1)e^{0}=1$

所以当直线 $h(x)=ax$ 与 $g(x)=xe^{x}$ 相切时， $a=1$

因为 $x\geq 0$ 时， $e^{x}\geq 1$， $x<0$ 时， $e^{x}<1$

所以 $xe^{x}-x=x\left(e^{x}-1\right)\geq 0$，则 $h(x)\leq g(x)$，此时不满足条件.



所以结合图形知：当 $a\leq 0$ 时，有无数多个整数 x_0 使得 $f(x_0)<a$，故不满足题意.

又 $a<1$，由图可知当直线 $h(x)=ax$ 在 l_1 与 l_2 之间时，满足条件的整数 x_0 只有 -1

$$k_{l_1}=\frac{-\frac{1}{e}-0}{-1-0}=\frac{1}{e}，\quad k_{l_2}=\frac{-\frac{2}{e^{2}}-0}{-2-0}=\frac{1}{e^{2}}$$

所以满足条件的 a 的范围是：$\frac{1}{e^{2}}\leq a<\frac{1}{e}$

故答案为：$\left[\frac{1}{e^{2}},\frac{1}{e}\right)$

15.【答案】②③④

【分析】举反例判断①，根据奇函数的性质和对数运算法则判断②，利用导数法判断函数单调性判断③，举例说明判断存在量词命题的正确性判断④.

【详解】对于①，当 $a=-2$ 时， $f(x)=\ln\left(-2x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$，

令 $-2x+\sqrt{x^{2}+1}>0$，解得 $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，其定义域为 $\left(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，不是 R.，错误；

对于②，因为函数 $f(x)=\ln\left(ax+\sqrt{x^{2}+1}\right)$ 是奇函数，

所以 $f(x)+f(-x)=\ln\left(ax+\sqrt{x^{2}+1}\right)+\ln\left(-ax+\sqrt{x^{2}+1}\right)=0$，即 $\ln\left(-a^{2}x^{2}+x^{2}+1\right)=0$，

所以 $-a^{2}x^{2}+x^{2}+1=0$，即 $\left(1-a^{2}\right)x^{2}=0$，所以 $1-a^{2}=0$，解得 $a=\pm 1$，经检验符合题意，

即 $\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 为奇函数，正确；

对于③，$f(x)=\ln\left(ax+\sqrt{x^2+1}\right)$，则 $f'(x)=\dfrac{a+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{ax+\sqrt{x^2+1}}$，

因为 $a\geq 0$，$x>0$，所以 $f'(x)>0$，

所以 $\forall a\in[0,+\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，（利用增函数的性质判断增函数也可以），正确；

对于④，当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$，则 $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，令 $f'(x)>0$，得 $x>0$，令 $f'(x)<0$，得 $x<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 有极小值点 0，故 $\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 有极小值点，正确.

故答案为：②③④.

【点睛】关键点点睛：利用导数判断函数的单调性是解题的关键点，另外举反例判定全称量词命题为假命题，利用特例法判断存在量词命题为真命题也是解决难题的方法之一.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$，$k\in Z$

（2）$f(x)$ 的最小正周期为 π；$f(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in Z$．$f(x)$ 的对称中心为 $\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12},0\right)(k\in Z)$.

（3）$[-1,2]$

【分析】（1）利用二倍角公式及和（差）角公式将函数解析式化简，再根据正弦函数的性质计算可得.

（2）根据三角函数基本性质求得最小正周期、对称轴和对称中心.

（3）根据正弦函数图象性质求得区间内的值域.

【小问 1 详解】

$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in Z$，

所以函数的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$，$k\in Z$.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$ 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，故 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$.

令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in Z$ 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$，故 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},0\right)(k\in Z)$.

【小问 3 详解】

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，

所以 $-1\le 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\le 2$，即 $-1\le f\left(x\right)\le 2$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-1,2]$.

17.【答案】（1）$A=\frac{\pi}{6}$

（2）答案见解析

【分析】（1）根据正弦定理，结合余弦定理进行求解即可；

（2）若选择①②：根据正弦定理、两角和正弦公式、三角形面积公式进行求解即可；若选择②③：根据正弦定理进行求解判断即可；若选择①③：根据余弦定理、三角形面积公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

根据正弦定理由 $(b-a)(\sin B+\sin A)=c\left(\sqrt{3}\sin B-\sin C\right)\Rightarrow(b-a)(b+a)=c\left(\sqrt{3}b-c\right)$

$\Rightarrow b^2-a^2=\sqrt{3}bc-c^2\Rightarrow a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，

由余弦定理可知：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

因此 $2\cos A=\sqrt{3}\Rightarrow\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$；

【小问 2 详解】

选择①②：① $a=2$，② $B=\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理可得 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}\Rightarrow b=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，

$\sin C=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$；

选择②③：② $B=\frac{\pi}{4}$，③ $c=2\sqrt{3}b$，

由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{6}$，所以

$$\sin C=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

因为 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\neq 2\sqrt{3}$，

所以不存在 $\triangle ABC$；

选择①③：①$a=2$，③$c=2\sqrt{3}b$，由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{6}$，

由余弦定理定理可知：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow 4=b^2+12b^2-2b\cdot 2\sqrt{3}b\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

即 $c=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$.

18.【答案】(1) $f(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\dfrac{77}{36}$

【分析】(1) 由图象可得 A，由函数 $y=f(x)$ 的最小正周期求得 ω 的值，利用正弦函数的对称中心结合 φ 的取值范围可求得 φ 的值，即可求得函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 利用函数周期求得 $R(6,3)$，由两点式斜率公式及诱导公式求得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$，$\tan\beta=\dfrac{3}{4}$，进而利用二倍角正切公式和两角和的正切公式求解即可.

【小问 1 详解】

由图象及 $P(-6,0)$，$Q(-2,-3)$ 可知，$A=3$，

又函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left[-2-(-6)\right]=16$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{8}$，

因为点 $P(-6,0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个对称中心，所以 $\dfrac{\pi}{8}\times(-6)+\varphi=k\pi,k\in Z$，即 $\varphi=k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in Z$，

又 $|\varphi|\leq\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=0,\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

【小问 2 详解】

由（1）函数周期及最值知 $R(6,3)$，因为 $\angle RPO=\alpha$，$\angle QPO=\beta$，$P(-6,0)$，$Q(-2,-3)$，

所以 $\tan\alpha = k_{PR} = \frac{3-0}{6-(-6)} = \frac{1}{4}$， $\tan(\pi-\beta) = -\tan\beta = k_{PQ} = \frac{-3-0}{-2-(-6)} = -\frac{3}{4}$，即 $\tan\beta = \frac{3}{4}$，

所以 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15}$，

所以 $\tan(2\alpha+\beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{\frac{8}{15}+\frac{3}{4}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{77}{36}$.

19.【答案】(1) $2x-y-1=0$

(2) $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 对函数求导，根据导函数的函数值等于原函数的图象在该点处的切线的斜率得到该点切线斜率，进而得到切线方程；

(2) 求导可得 $f'(x) = \frac{(x-2)(-ax-1)}{e^x}$，再分情况讨论导数的根与函数单调性，进而分析是否满足极大值点为 2 即可；

(3) 分析可得 $f(x) = \frac{ax^2+x-1}{e^x} \geq \frac{x^2+x-1}{e^x}$，再利用导数研究函数的单调性、最值，从而证明 $\frac{x^2+x-1}{e^x} + e \geq 0$ 即可.

【小问 1 详解】

由题意得 $f'(x) = \frac{-ax^2+(2a-1)x+2}{e^x}$，则 $f'(0) = 2$，

因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程是 $y = 2x-1$，即 $2x-y-1=0$；

【小问 2 详解】

由题意 $f'(x) = \frac{-ax^2+(2a-1)x+2}{e^x} = \frac{(x-2)(-ax-1)}{e^x}$，设 $g(x) = (x-2)(-ax-1)$，

①当 $a=0$ 时，$g(x) = 2-x$，令 $g(x)>0$ 有 $x<2$，令 $g(x)<0$ 有 $x>2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，满足 $f(x)$ 的极大值点为 2；

②当 $a>0$ 时，令 $g(x) = (x-2)(-ax-1) = 0$ 有 $x_1 = 2$，$x_2 = -\frac{1}{a}$，$g(x)$ 开口向下；

令 $g(x)>0$ 有 $-\frac{1}{a}<x<2$，令 $g(x)<0$ 有 $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>2$，

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{a},2\right)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，满足 $f(x)$ 的极大值点为 2；

③当 $a<0$ 时，令 $g(x)=(x-2)(-ax-1)=0$ 有 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{a}$，$g(x)$ 开口向上；

i. 当 $-\frac{1}{a}=2$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=(x-2)(-ax-1)\geq 0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，无极大值点；

ii. 当 $-\frac{1}{a}>2$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，令 $g(x)<0$ 有 $2<x<-\frac{1}{a}$，令 $g(x)>0$ 有 $x>-\frac{1}{a}$ 或 $x<2$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $\left(2,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，满足 $f(x)$ 的极大值点为 2；

iii. 当 $-\frac{1}{a}<2$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，令 $g(x)<0$ 有 $-\frac{1}{a}<x<2$，令 $g(x)>0$ 有 $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>2$，

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},2\right)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，不满足 $f(x)$ 的极大值点为 2；

综上有当 $f(x)$ 的极大值点为 2时，a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

【小问 3 详解】

证明：当 $a\geq 1$ 时，$f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}\geq\frac{x^2+x-1}{e^x}$，

则 $f(x)+e\geq\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$，

令 $g(x)=x^2+x-1+e^{x+1}$，

则 $g'(x)=2x+1+e^{x+1}$，易得 $g'(x)$ 在 R 上单调递增，

且 $g'(-1)=-2+1+e^0=0$，

故当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0, g(x)$ 单调递减；

当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0, g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处取到极小值，也即最小值，

所以 $g(x)\geq g(-1)=0$，因此 $f(x)+e\geq 0$.

20. 【答案】（1）$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，没有单调递增区间.

（2）见解析

【分析】（1）根据题意，求出函数 $f(x)$ 的导数，设其导数为 $g\left(x\right)$，求出 $g'\left(x\right)$，分析可得 $g\left(x\right)$ 的最值，分子可得 $g\left(x\right)\le 0$，即 $f'(x)\le 0$，即可求出答案；

（2）分类讨论 a 的范围，讨论 $f\left(0\right)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的值，由函数的零点存在性定理求解即可.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)=x\cos x-ax+a$，$f'(x)=\cos x-x\sin x-a$，

令 $g(x)=\cos x-x\sin x-a$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $g'(x)=-2\sin x-x\cos x\le 0$，所以 $g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

当 $a\ge 1$ 时，$g\left(0\right)=1-a\le 0$，所以 $g\left(x\right)\le 0$，即 $f'(x)\le 0$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，没有单调递增区间.

【小问 2 详解】

由（1）知，$g\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，且 $g\left(0\right)=1-a$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-a$，

当 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

因为 $f\left(0\right)=a>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(1-\frac{\pi}{2}\right)<0$，

所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

当 $-\frac{\pi}{2}-a\ge 0$，即 $a\le -\frac{\pi}{2}$ 时，$g\left(x\right)\ge 0$，即 $f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

因为 $f\left(0\right)=a<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(1-\frac{\pi}{2}\right)>0$，

所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

当 $-\frac{\pi}{2}<a<1$，$g\left(0\right)=1-a>0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-a<0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g\left(x_0\right)=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

因为 $f(0)=a$， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$，且 $a\neq 0$，

所以 $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)<0$，所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

综上所述， $f(x)$ 有且仅有一个零点.

【点睛】方法点睛：函数的零点问题的求解，常用的方法有：

（1）方程法（直接解方程得解）；

（2）图象法（画出函数 $f(x)$ 的图象分析得解）；

（3）方程+图象法（令 $f(x)=0$ 得到 $g(x)=h(x)$，再分析 $g(x),h(x)$ 的图象得解）. 要根据已知条件灵活选择方法求解.

21. 【答案】（1） $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是“和谐”函数， $g(x)=\sin\pi x$ 不是“和谐”函数.（2）最小值为 1.

（3） $a>0$ 且 $\forall k\in N^*$， $a\neq k^2$ 且 $a\neq k(k+1)$

【分析】（1）根据“和谐”函数的定义即可判断 $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$， $g(x)=\sin\pi x$ 是否是“和谐”函数.

（2）根据周期函数的定义，结合“和谐”函数的条件，进行判断和证明即可.

（3）根据“和谐”函数的定义，分别讨论 $a=0$， $a<0$ 和 $a>0$ 时，满足的条件即可.

【详解】（1）由题知： $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是“和谐”函数，

$g(x)=\sin\pi x$ 不是“和谐”函数.

（2） T 的最小值为1.

因为 $f(x)$ 是以 T 为最小正周期的周期函数，所以 $f(T)=f(0)$.

假设 $T<1$，则 $[T]=0$，所以 $f([T])=f(0)$，矛盾.

所以必有 $T\geq 1$，

而函数 $l(x)=x-[x]$ 的周期为 1，且显然不是“和谐”函数，

综上， T 的最小值为 1.

（3）当函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是“和谐”函数时，

若 $a=0$，则 $f(x)=x$ 显然不是“和谐”函数，矛盾.

若 $a<0$，则 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$， $(0,+\infty)$ 上单调递增，

此时不存在 $m\in(-\infty,0)$，使得 $f(m)=f([m])$，

同理不存在$m\in(0,+\infty)$，使得$f(m)=f([m])$，

又注意到$m[m]\geq 0$，即不会出现$[m]<0<m$的情形，

所以此时$f(x)=x+\frac{a}{x}$不是“和谐”函数.

当$a>0$时，设$f(m)=f([m])$，

所以$m+\frac{a}{m}=[m]+\frac{a}{[m]}$，所以有$a=m[m]$，其中$[m]\neq 0$，

当$m>0$时，

因为$[m]<m<[m]+1$，所以$[m]^2<m[m]<[m]([m]+1)$，

所以$[m]^2<a<[m]([m]+1)$.

当$m<0$时，$[m]<0$，

因为$[m]<m<[m]+1$，所以$[m]^2>m[m]>[m]([m]+1)$，

所以$[m]^2>a>[m]([m]+1)$.

记$k=[m]$，综上，我们可以得到“$a>0$且$\forall k\in N^*$，$a\neq k^2$且$a\neq k(k+1)$”.

【点睛】本题主要考查函数的新定义和函数的周期性，同时考查了学生的运算和推理能了，综合性较强，属于难题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！