2023 北京石景山高一（下）期末

数　　学

本试卷共 6 页，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟。请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1． $\sin 330^\circ =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2．已知正四棱锥的底面边长为 2，高为 6，则它的体积为

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 24

3．在复平面内，复数 $i(2-i)$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4．在单位圆中，200° 的圆心角所对的弧长为

A. $\frac{7\pi}{10}$　　B. $\frac{10\pi}{9}$　　C. 9π　　D. 10π

5．已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则

A. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6})$ 上单调递减　　B. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12})$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上单调递减　　D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12})$ 上单调递增

6．平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 等于

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 12

7．要得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

8．在 ΔABC 中，内角 A，B，C 满足 $2\sin B\cos C=\sin A$，则 ΔABC 的形状为

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形　　C. 等腰直角三角形　　D. 正三角形

9．在 $\triangle ABC$ 中，“$\tan A\tan B=1$”是“$\sin^2 A+\sin^2 B=1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10．扇形 AOB 的半径为1，$\angle AOB=120^\circ$，点 C 在弧 AB 上运动，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，下列说法错误的是

A. $x+y$ 的最小值是 1　　　　B. $x+y$ 的最大值是 2

C. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的取值范围为$[-\frac{1}{2},0]$　　D. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为 $[-1,1]$

第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

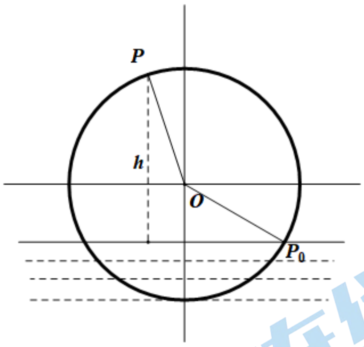
11．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,k)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $k=$__________.

12．若复数 $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $\bar{z}=$_________，$|z|=$_____________.

13．已知一个正方体的8个顶点都在一个球面上，则球的表面积与这个正方体的全面积之比为__________.

14．函数 $f(x)=\cos 2x+\sin x$ 的值域是_____.

15．水车在古代是进行灌溉的工具，是人类的一项古老的发明，也是人类利用自然和改造自然的象征.如图，一个半径为6米的水车逆时针匀速转动，水轮圆心 O 距离水面3米.已知水轮每分钟转动1圈，如果当水轮上一点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计时，经过 t 秒后，水车旋转到 P 点.



给出下列结论：

① 在转动一圈内，点 P 的高度在水面3米以上的持续时间为30秒；

② 当 $t=[0,15]$ 时，点 P 距水面的最大距离为6米；

③ 当 $t=10$ 秒时，$PP_0=6$；

其中所有正确结论的序号是___________________.

三、解答题共 5 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．(本小题满分 8 分)

已知角 α 的顶点与坐标原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

（Ⅰ）求 $\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)$；

（Ⅱ）若角 β 满足 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

17．（本小题满分 8 分）

已知向量 $\overrightarrow{OA}=(2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(3,-2)$，$\overrightarrow{OC}=(6-m,-3-m)$.

（Ⅰ）若点 A,B,C 共线，求实数 m 的值；

（Ⅱ）若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，求实数 m 的值.

18．（本小题满分 8 分）

在△ABC 中，$(2a-c)\cos B=b\cos C$.

（Ⅰ）求 $\angle B$ 的大小；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$ ，$a+c=4$，求△ABC 的面积.

19．(本小题满分 8 分)

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)+\cos 2x(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ ，$-\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个零点.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）当 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m$ 有 2 个公共点，求 m 的取值范围.

20．(本小题满分 8 分)

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$ ，$\angle BAC=\angle DAC$ ，$CD=2AB=4$.

再从条件①，条件②这两个条件中选择一个作为已知，解决下列问题.

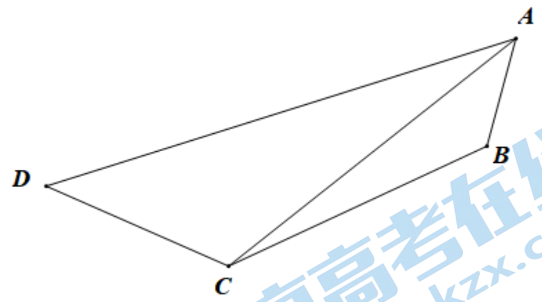
（Ⅰ）求 $\sin\angle BAC$ 的值；

（Ⅱ）求 $\angle ADC$ 的大小.

①△ABC 面积 $S_{\triangle ABC}=2$；

② $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	B	C	B	C	B	A	D

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分.

题号	11	12	13	14	15
答案	-3	$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}, \frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$[-2,\frac{9}{8}]$	①③

三、解答题：本大题共 5 个小题，共 40 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．(本小题满分 8 分)

解:（Ⅰ）因为角 α 终边过点 $P(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$，

所以 $|OP|=\sqrt{(-\frac{\sqrt{5}}{5})^2+(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=1$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{|OP|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha=\frac{x}{|OP|}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$， ·········2 分

所以 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$． ·········4 分（Ⅱ）由（Ⅰ）得：

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，

以 $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(\alpha-\beta)]$

$=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}$

$=\frac{-2+\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=-1$ ·········8 分

17．(本小题满分 8 分)

解：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4-m,-4-m)$，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3-m,-1-m)$．

（Ⅰ）因为点 A，B，C 共线，所以 $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$，

$-3(4-m)=1\cdot(-4-m)$，解得 $m=2$； ·········2 分

（Ⅱ）①若 $\angle A$ 为直角则 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，

$\therefore 4-m+3(4+m)=0$，解得 $m=-8$；　　　　　　　　　　………4 分②若 $\angle B$ 为直角则

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，

$\therefore 3-m+3(1+m)=0$，解得 $m=-3$；　　　　　　　　　　………6 分③若 $\angle C$ 为直角则

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，

$\therefore (4-m)(3-m)+(4+m)(1+m)=0$，

方程无解.

综上，当 $m=-8$ 或 $m=-3$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形.　　　………8 分

18．(本小题满分 8 分)

解：（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，$\because (2a-c)\cos B=b\cos C$，

结合正弦定理得 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，

$2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin A$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A\neq 0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.　　　　　　………4 分

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{7}$，$a+c=4$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得，$ac=3$，　　　　　　………6 分

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.　　　　　　………8 分

19．(本小题满分 8 分)

解：（Ⅰ）由题设 $f(-\dfrac{\pi}{12})=\sin(-\dfrac{\pi}{6}+\varphi)+\cos(-\dfrac{\pi}{6})=0$.

所以 $\sin(\varphi-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-\dfrac{2\pi}{3}<\varphi-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$.　　　………2 分

所以 $\varphi-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.　　　　　　　　　　………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\cos 2x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.　　　　　　　　　　………5 分

因为 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$.

于是，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 1；

当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$．

又 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$．　　　　………7 分

所以 m 的取值范围是 $[\frac{1}{2},1)$．　　　　………8 分

20．(本小题满分 8 分)

解：选①（Ⅰ）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin\angle ABC=2$

得 $BC=2\sqrt{2}$．　　　　………1 分

又 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$ 得 $AC=2\sqrt{5}$．　　　　………2 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times AB\times\sin\angle BAC=2$

所以 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$．　　　　………4 分

（Ⅱ）因为 $\angle BAC=\angle DAC$，所以 $\sin\angle DAC=\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

在 $\triangle ADC$ 中 $\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$ 解得 $\sin\angle ADC=\frac{1}{2}$．　　　　………6 分

又因为 $AC\times\sin\angle DAC=2<CD<AC$

所以满足这样的三角形有两解.

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$．　　　　………8 分

选②（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中 $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\sin\angle BAC=\sin(\pi-\angle ABC-\angle ACB)=\sin(\frac{\pi}{4}-\angle ACB)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．　　　　………4 分

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$ 解得 $AC=2\sqrt{5}$．

因为 $\angle BAC=\angle DAC$，所以 $\sin\angle DAC=\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

在 $\triangle ADC$ 中 $\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$ 解得 $\sin\angle ADC=\frac{1}{2}$．

又因为 $AC\times\sin\angle DAC=2<CD<AC$

所以满足这样的三角形有两解.

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………8 分

（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）