

西城区高二年级第二学期期末练习

数 学

2019.7

学校_____ 班级_____ 姓名_____ 成绩_____

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数是 ()

A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

2. 已知函数 $f(x) = \cos x$ ，则 $f'(x) =$ ()

A. $\cos x$ B. $-\cos x$ C. $\sin x$ D. $-\sin x$

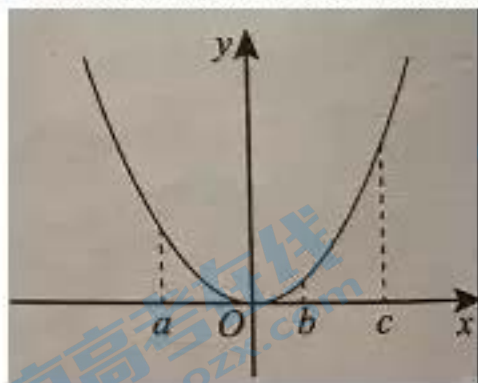
3. 用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字，可以组成没有重复数字的小强数学四位数的个数是 ()

A. 360 B. 300 C. 240 D. 180

4. 曲线 $y = x^3 + x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ()

A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 2x$ D. $y = x$

5. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上有导函数， $f(x)$ 图象如图所示，则下列不等式正确的是 ()



A. $f'(a) < f'(b) < f'(c)$ B. $f'(b) < f'(c) < f'(a)$

C. $f'(a) < f'(c) < f'(b)$ D. $f'(c) < f'(a) < f'(b)$

6. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 个参加某次社区服务，要求必须有女生，那么不同的选派方案总数为 ()

A. 14 B. 24 C. 28 D. 48

7.甲、乙、丙、丁4个人进行网球比赛，首先甲、乙一组，丙、丁一组进行比赛，两组的胜者进行决赛，决赛的胜者为冠军，败者为亚军.4个人相互比赛的胜率如下表所示，表中的数字表示所在行选手击败所在列选手的概率.

	甲	乙	丙	丁
甲	~	0.3	0.3	0.8
乙	0.7	~	0.6	0.4
丙	0.7	0.4	~	0.5
丁	0.2	0.6	0.5	~

那么甲得冠军且丙得亚军的概率是()

- A.0.15 B.0.105 C.0.045 D.0.21

8. 设 $0 < p < 1$ ，随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{p}{3}$	$\frac{3-2p}{3}$	$\frac{p}{3}$

那么，当 p 在 $(0,1)$ 内增大时， $D(\xi)$ 的变化是()

- A. 减小 B. 增大 C. 先减小后增大 D. 先增大后减小

9.已知函数 $f(x) = x^2 - 1$ ， $g(x) = \ln x$ ，下列说法中正确的是()

- A. $f(x)$ ， $g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有相同的切线
 B. 对于任意 $x > 0$ ， $f(x) \geq g(x)$ 恒成立
 C. $f(x)$ ， $g(x)$ 的图象有且只有一个交点
 D. $f(x)$ ， $g(x)$ 的图象有且只有两个交点

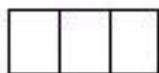
10.算筹是在珠算发明以前我国独创并且有效的计算工具，为我国古代数学的发展做出了很大贡献.在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示小强数学数字，如下图：

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	┌	┐	┑	┒
横式	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

表示多位数时，各位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇0则置空，如下图：

⊥	┐	=	┑	6728
⊥	┐		┑	6708

如果把 5 根算筹以合适的方式全部放入右面的表格中，



那么可以表示的三位数的个数为 ()

- A.46 B.44 C.42 D.40

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

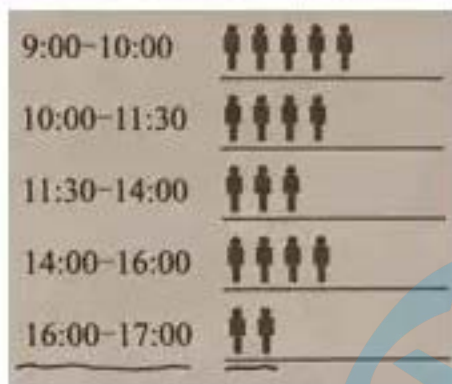
11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ，则 $f'(1) =$ _____.

12. 二项式 $(2x^2 - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项是 _____ (用数字作答)

13. 若复数 z 满足 $i - z = 1 + 2i$ ，则 $|z| =$ _____.

14. 能说明“若 $f'(0) = 0$ ，则 $x = 0$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点”为假命题的一个函数是 _____.

15. 北京市某银行营业点在银行大厅悬挂着不同营业时间段服务窗口个数的提示牌，如下图



设某人到达银行的时间是随机的，记到达银行时服务窗口的个数为 X ，则 $E(X) =$ _____.

16. 容器中有 A, B, C 3 种粒子，若相同种类的两颗粒子发生碰撞，则变成一颗 B 粒子；不同种类的两颗粒子发生碰撞，会变成小强数学另外一种粒子. 例如：一颗 A 粒子和一颗 B 粒子发生碰撞则变成一颗 C 粒子.

现有 A 粒子 10 颗，B 粒子 8 颗，C 粒子 9 颗，如果经过各种两两碰撞后，只剩一颗粒子. 给出下列结论：

- ①最后一颗粒子可能是 A 粒子；
- ②最后一颗粒子一定是 C 粒子；
- ③最后一颗粒子一定不是 B 粒子；
- ④以上都不正确.

其中正确结论的序号是 _____ (写出所有正确命题的序号)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题 13 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx$ ，且 $f'(2) = -3$ 。

(I) 求 b ；

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间。

18. (本小题 13 分) 某工厂生产一种汽车的元件，该元件是经过 A、B、C 三道工序加工而成的，A、B、C 三道工序加工的元件合格率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 。

已知每道工序的加工都相互独立，三道工序加工都合格的元件为一等品；恰有两道工序加工合格的元件为二等奖；其它的为废品，不进入市场。

(I) 生产一个元件，求该元件为二等品的概率；

(II) 若从该工厂生产的这种元件中任意取出 3 个元件进行检测，求至少有 2 个元件是一等品的概率。

19. (本小题 13 分) 已知函数 $f(x) = (x+a)e^x$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值。

20.(本小题 13 分)某校在学期期末举行“我最喜欢的文化课”我最喜欢的文化课评选活动,投票规则是一人一票.高一(1)班 44 名学生和高一(7)班 45 名学生的投票结果如下表(无废票):

	语文	数学	外语	物理	化学	生物	政治	历史	地理
高一(1)班	6	9	7	5	4	5	3	3	2
高一(7)班	a	6	b	4	5	6	5	2	3

该校把上表的数据作为样本,把两个班同一科的得票之和定义为该年级该学科的“好感指数”.

- (I)如果数学学科的“好感指数”比高一年级其它小强数学文化课都高,则 a 的所有取值;
 (II)从高一(1)班投票给政治、历史、地理的学生中任意选 3 位同学,设随机变量 X 为投票给地理学科的人数,求 X 的分布列和期望;
 (III)当 a 为何值时,高一年级的语文、数学、外语三科的“好感指数”的方差最小?(结论不需证明)

21.(本小题 14 分)已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - x$.

- (I)当 $a = -1$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (II)若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在极值点,求 a 的取值范围.

22.(本小题 14 分)已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + a(x-1)$.

- (I)若 a , 求 $f(x)$ 的极值;
 (II)若在区间 $(1, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;
 (III)判断 $f(x)$ 的零点个数.(直接写出结论)

西城区高二年级第二学期期末练习

数 学

2019.7

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{2}{1-i}$ 的共轭复数是 ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

解析： $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$ ， $\bar{z} = 1-i$ ，选 B.

2. 已知函数 $f(x) = \cos x$ ，则 $f'(x) =$ ()

- A. $\cos x$ B. $-\cos x$ C. $\sin x$ D. $-\sin x$

解析：送分题，选 D.

3. 用 0,1,2,3,4,5 这 6 个数字，可以组成没有重复数字的小强数学四位数的个数是 ()

- A. 360 B. 300 C. 240 D. 180

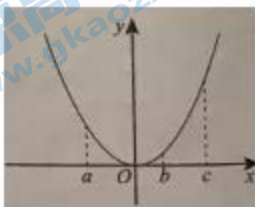
解析： $A_5^4 - A_4^4 = 360 - 60 = 300$ ，选 B.

4. 曲线 $y = x^3 + x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 2x$ D. $y = x$

解析：点 $(0,0)$ 过曲线， $y'|_{x=0} = 1$ ，选 D.

5. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上有导函数， $f(x)$ 图象如图所示，则下列不等式正确的是 ()



- A. $f'(a) < f'(b) < f'(c)$ B. $f'(b) < f'(c) < f'(a)$
 C. $f'(a) < f'(c) < f'(b)$ D. $f'(c) < f'(a) < f'(b)$

解析：导数几何意义，看斜率即可，选 A.

6. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 个参加某次社区服务, 要求必须有女生, 那么不同的选派方案总数为 ()

A.14

B.24

C.28

D.48

解析: $C_2^1 \cdot C_4^3 + C_2^2 \cdot C_4^2 = 8 + 6 = 14$, 选 A.

7. 甲、乙、丙、丁 4 个人进行网球比赛, 首先甲、乙一组, 丙、丁一组进行比赛, 两组的胜者进行决赛, 决赛的胜者为冠军, 败者为亚军. 4 个人相互比赛的胜率如下表所示, 表中的数字表示所在行选手击败所在列选手的概率.

	甲	乙	丙	丁
甲	~	0.3	0.3	0.8
乙	0.7	~	0.6	0.4
丙	0.7	0.4	~	0.5
丁	0.2	0.6	0.5	~

那么甲得冠军且丙得亚军的概率是 ()

A.0.15

B.0.105

C.0.045

D.0.21

解析: $0.3 \times 0.5 \times 0.3 = 0.045$, 选 C.

8. 设 $0 < p < 1$, 随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{p}{3}$	$\frac{3-2p}{3}$	$\frac{p}{3}$

那么, 当 p 在 $(0,1)$ 内增大时, $D(\xi)$ 的变化是 ()

A. 减小

B. 增大

C. 先减小后增大

D. 先增大后减小

解析: $E(\xi) = 1$, $D(\xi) = \frac{2p}{3}$, 选 B.

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \ln x$, 下列说法中正确的是 ()

A. $f(x)$, $g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有相同的切线

B. 对于任意 $x > 0$, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立

C. $f(x)$, $g(x)$ 的图象有且只有一个交点

D. $f(x)$, $g(x)$ 的图象有且只有两个交点

解析: 数形结合, 画图即可, 选 D.

10.算筹是在珠算发明以前我国独创并且有效的计算工具，为我国古代数学的发展做出了很大贡献.在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示数字，如下图：

数字 \ 形式	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ	Ⅸ
横式	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

表示多位数时，各位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇 0 则置空，如下图：

⊥	Ⅱ	=	Ⅲ	6728
⊥	Ⅱ	Ⅲ	6708	

如果把 5 根算筹以合适的方式全部放入右面的表格中，



那么可以表示的三位数的个数为 ()

- A.46 B.44 C.42 D.40

解析:分类，由图，1 根表示 1,2 根表示 2、6；3 根表示 3、7,4 根表示 4,8,5 根表示 5、9.

①2 个 0 型：500 (2)

②1 个 0 型：104, 140, 401, 410, 都为 2；203, 230, 302, 320, 都为 4；

③无 0 型：113, 131, 311, 均为 2；122, 212, 221, 均为 4.

故，总共为 $2+24+18=44$ ，选 B.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ，则 $f'(1) =$ _____.

解析: $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ， $f'(1) = 0$ ， $f'(1) = 0$.

12. 二项式 $(2x^2 - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项是 _____ (用数字作答)

解析: $C_6^2 (2x^2)^2 \cdot (-x^{-1})^4 = 60$.

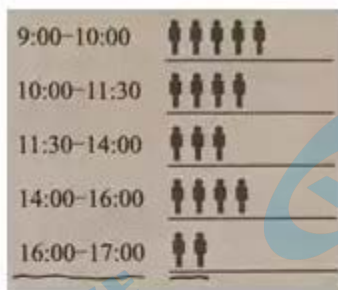
13. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + 2i$ ，则 $|z| =$ _____.

解析: $z = \frac{1+2i}{i} = \frac{-i(1+2i)}{i(-i)} = 2-i$ ， $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

14.能说明“若 $f'(0) = 0$ ，则 $x = 0$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点”为假命题的一个函数是_____.

解析： $y = x^3$ （答案不唯一）

15.北京市某银行营业点在银行大厅悬挂着不同营业时间段服务窗口个数的提示牌，如下图



设某人到达银行的时间是随机的，记到达银行时服务窗口的个数为 X ，则 $E(X) =$ _____.

解析： X 的分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$

则 $E(X) = 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} + 5 \times \frac{1}{8} = \frac{57}{16}$.

16.容器中有 A, B, C 3 种粒子，若相同种类的两颗粒子发生碰撞，则变成一颗 B 粒子；不同种类的两颗粒子发生碰撞，会变成另外一种粒子.例如：一颗 A 粒子和一颗 B 粒子发生碰撞则变成一颗 C 粒子.

现有 A 粒子 10 颗，B 粒子 8 颗，C 粒子 9 颗，如果经过各种两两碰撞后，小强数学只剩一颗粒子给出下列结论：

- ①最后一颗粒子可能是 A 粒子；
- ②最后一颗粒子一定是 C 粒子；
- ③最后一颗粒子一定不是 B 粒子；
- ④以上都不正确.

其中正确结论的序号是_____。（写出所有正确命题的序号）

解析：此类题不会做的话，就写一个自己最能确定的，得 3 分也不错.

令 $A = -1$ ， $B = 1$ ， $C = -1$ ，则 $(-1)^{10} \cdot 1^8 \cdot (-1)^9 = -1$ ，所以可能 A 粒子和 C 粒子.

填①③.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题 13 分）已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + bx$ ，且 $f'(2) = -3$.

（I）求 b ；

（II）求 $f(x)$ 的单调区间.

解析：答案略

18. (本小题 13 分) 某工厂生产一种汽车的元件, 该元件是经过 A、B、C 三道工序加工而成的, A、B、C 三道工序加工的元件合格率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$.

已知每道工序的加工都相互独立, 三道工序加工都合格的元件为一等品; 恰有两道工序加工的元件为二等奖; 其它的为废品, 不进入市场.

(I) 生产一个元件, 求该元件为二等品的概率;

(II) 若从该工厂生产的这种元件中任意取出 3 个元件进行检测, 求至少有 2 个元件是一等品的概率.

解析: 一道老题, 别忘了设事件.

$$(I) \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{24};$$

$$(II) \text{一等品 } \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5}{32}.$$

19. (本小题 13 分) 已知函数 $f(x) = (x+a)e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;



(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最小值.

解析: 此题为 2011 年北京高考题改编的, 考察区间左、中、右.

定义域 \mathbb{R} .

$$(I) f'(x) = (x+a+1)e^x, \text{ 令 } f'(x) = 0, x = -a-1,$$

$f'(x)$ 、 $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -a-1)$	$-a-1$	$(-a-1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-\frac{1}{e^{a+1}}$	

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, -a-1)$; 单调递增区间是 $(-a-1, +\infty)$.

(II) ①当 $-a-1 \leq 0$, 即 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增, 此时最小值为 $f(0) = a$;

②当 $-a-1 \geq 4$, 即 $a \leq -5$ 时, $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递减, 此时最小值为 $f(4) = (a+4)e^4$;

③当 $0 < -a-1 < 4$, 即 $-5 < a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 上单调递减, 在 $(-a-1, 4)$ 上单调递增,

此时最小值为 $f(-a-1) = -\frac{1}{e^{a+1}}$.

20. (本小题 13 分) 某校在学期期末举行“我最喜欢的文化课”我最喜欢的文化课评选活动, 投票规则是一人一票. 高一(1)班 44 名学生和高一(7)班 45 名学生的投票结果如下表(无废票):

	语文	数学	外语	物理	化学	生物	政治	历史	地理
高一(1)班	6	9	7	5	4	5	3	3	2
高一(7)班	a	6	b	4	5	6	5	2	3

该校把上表的数据作为样本, 把两个班同一科的得票之和定义为该年级该学科的“好感指数”.

- (I) 如果数学学科的“好感指数”比高一年级其它文化课都高, 则 a 的所有取值;
 (II) 从高一(1)班投票给政治、历史、地理的学生中任意选 3 位同学, 设随机变量 X 为投票给地理学科的人数, 求 X 的分布列和期望;
 (III) 当 a 为何值时, 高一年级的语文、数学、外语三科的“好感指数”的方差最小? (结论不需证明)

解析: (I) 7, 8;

(II) 超几何

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

则 $E(X) = \frac{3}{4}$;

(III) 语文 $6+a$, 数学 15, 外语 $21-a$, 平均数为 14, 语文和外语越靠近 14 越好, 故 a 为 7 或 8.

21. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - x$.

- (I) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (II) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在极值点, 求 a 的取值范围.

解析: 参变分离

定义域 $(0, +\infty)$.

(I) 略;

(II) 由题, $f'(x) = e^x - \frac{a}{x} - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有零点, 即 $a = xe^x - x$ 在 $(0, 1)$ 上有零点.

令 $g(x) = xe^x - x$, $g'(x) = xe^x + e^x - 1$, 令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = (x+2)e^x > 0$,

又 $g'(0) = 0$, 故在 $(0, 1)$ 上单增, $f(0) = 0$, $f(1) = e - 1$, 故 a 的取值范围为 $(0, e - 1)$.

22. (本小题 14 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + a(x-1)$.

(I) 若 a , 求 $f(x)$ 的极值;

(II) 若在区间 $(1, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(III) 判断 $f(x)$ 的零点个数. (直接写出结论)

解析: 与今年海淀高三一模导数题相似, 数形结合判断零点个数.

定义域 $(0, +\infty)$.

(I) 略;

(II) 参变分离

$f(x) = \frac{\ln x}{x} + a(x-1) < 0$, 即 $a < \frac{\ln x}{x(1-x)}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 只需求新函数最小值;

(III) 如图所示, 转化成 $y_1 = \frac{\ln x}{x}$ 与 $y_2 = -a(x-1)$ 的交点即可.

