数

海淀区 2021—2022 学年第一学期期末练习

高三数学

2022.01

本试卷共4页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|x(x-2)<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

（2）抛物线 $x^2=2y$ 的准线方程为

A. $x=-1$　　B. $y=-1$　　C. $x=-\frac{1}{2}$　　D. $y=-\frac{1}{2}$

（3）复数 $\frac{5}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

（4）在 $(x-\frac{1}{x^2})^4$ 的展开式中，x 的系数为

A. -4　　B. 4　　C. -6　　D. 6

（5）已知角 α 的终边在第三象限，且 $\tan\alpha=2$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha=$

A. -1　　B. 1　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

（6）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和．则“$a_4>a_3$”是“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\neq3$，$S_n>S_3$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

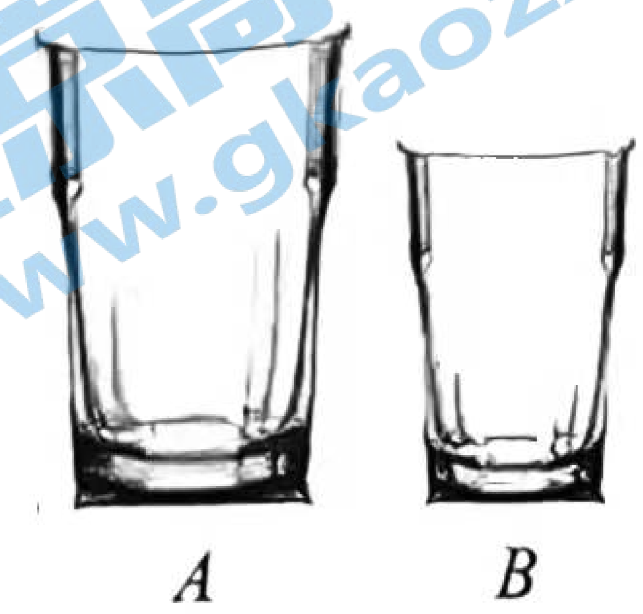
（7）若函数 $y=\sin(\pi x-\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,m]$ 上单调递增，则 m 的最大值为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

(8) 已知圆 C 过点 $A(-1,2)$，$B(1,0)$，则圆心 C 到原点距离的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

(9) 如图，A,B 是两个形状相同的杯子，且 B 杯高度是 A 杯高度的 $\frac{3}{4}$，则 B 杯容积与 A 杯容积之比最接近的是



A. 1∶3　　B. 2∶5

C. 3∶5　　D. 3∶4

(10) 已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_a x$. 若对于 $f(x)$ 图象上的任意一点 P，在 $g(x)$ 的图象上总存在一点 Q，满足 $OP\perp OQ$，且 $|OP|=|OQ|$，则实数 $a=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程为______

(12) 已知甲盒中有 3 个白球，2 个黑球；乙盒中有 1 个白球，2 个黑球 . 现从这 8 个球中随机选取一球，该球是白球的概率是______，若选出的球是白球，则该球选自甲盒的概率是______.

(13) 已知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3,3]$，$f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位后所得的函数图象与 $f(x)$ 的图象重合，写出符合上述条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式：______.

(14) 若 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}^2=4$，且 $|\overline{AP}|=1$，则 $|\overline{AB}|=$______，$\overline{CP}\cdot\overline{AB}$ 的最大值为 ______

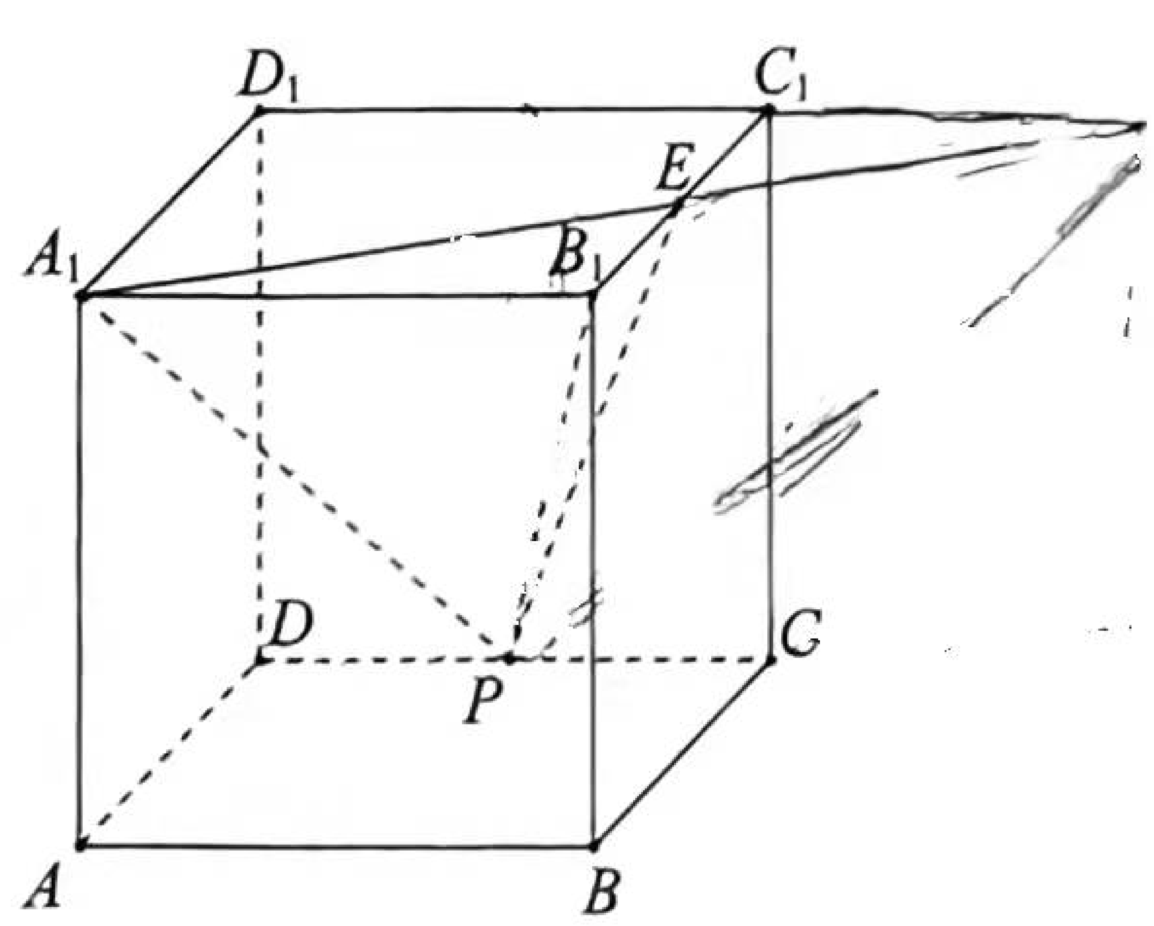
(15) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 B_1C_1 的中点. 动点 P 沿着棱 DC 从点 D 向点 C 移动，对于下列三个结论：

①存在点 P，使得 $PA_1=PE$；

②$\triangle PA_1E$ 的面积越来越小；

③四面体 A_1PB_1E 的体积不变.

所有正确的结论的序号是______.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$b^2+c^2-a^2+bc=0$.

（Ⅰ）求$\angle A$的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得$\triangle ABC$存在，求$\triangle ABC$的面积.

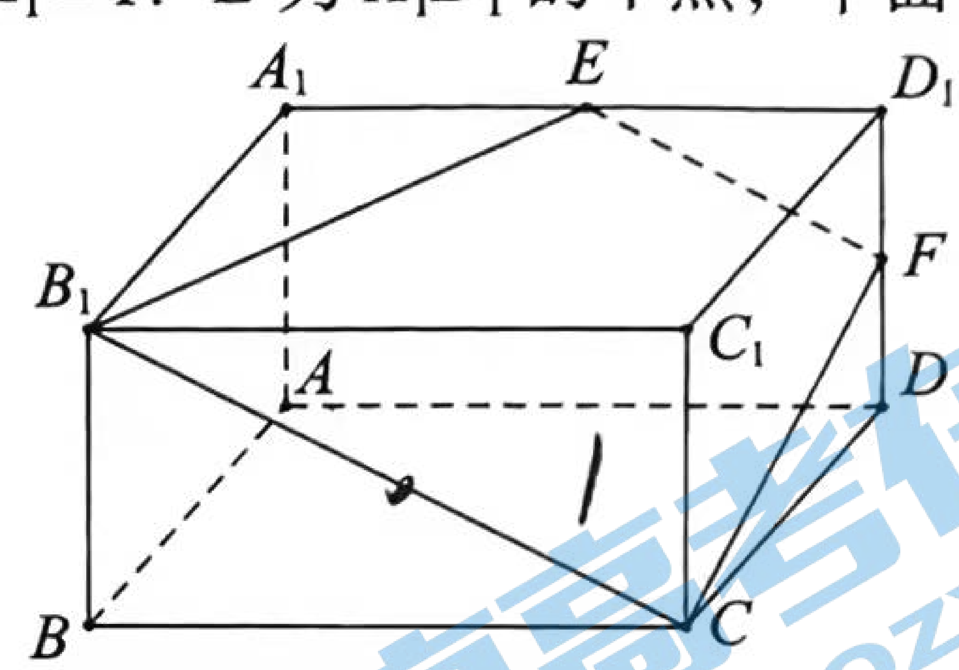
条件①：$\cos B=\frac{1}{3}$；

条件②：$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

条件③：$a=\sqrt{3}$.

（17）（本小题 14 分）

如图，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2$，$AA_1=1$．E为A_1D_1的中点，平面CB_1E交棱DD_1于点F.



（Ⅰ）求证：$B_1C//EF$；

（Ⅱ）求二面角$C-B_1E-C_1$的余弦值，并求点A到平面CB_1E的距离.

（18）（本小题 14 分）

某班组织冬奥知识竞赛活动，规定首轮比赛需要从 6 道备选题中随机抽取 3 道题目进行作答．假设在 6 道备选题中，甲正确完成每道题的概率都是$\frac{2}{3}$且每道题正确完成与否互不影响，乙能正确完成其中 4 道题且另外 2 道题不能完成.

（Ⅰ）求甲至少正确完成其中 2 道题的概率；

（Ⅱ）设随机变量X表示乙正确完成题目的个数，求X的分布列及数学期望EX；

（Ⅲ）现规定至少正确完成其中 2 道题才能进入下一轮比赛，请你根据所学概率知识进行预测，谁进入下一轮比赛的可能性较大，并说明理由.

(19)(本小题 14 分)

已知点 $A(0,-1)$ 在椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程和离心率；

(Ⅱ) 设直线 $l: y=k(x-1)$（其中 $k\neq 1$）与椭圆 C 交于不同两点 E, F，直线 AE，AF 分别交直线 $x=3$ 于点 M, N. 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ 时，求 k 的值.

(20)(本小题 15 分)

函数 $f(x)=ae^x-\sin x+2x$.

(Ⅰ) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 当 $a\geqslant 0$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值；

(Ⅲ) 直接写出 a 的一个值，使 $f(x)\leqslant a$ 恒成立，并证明.

(21)(本小题 14 分)

已知 n 行 n 列（$n\geqslant 2$）的数表 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 中，对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有 $a_{ij}\in\{0,1\}$.

若当 $a_{st}=0$ 时，总有 $\sum_{i=1}^{n}a_{it}+\sum_{j=1}^{n}a_{sj}\geqslant n$，则称数表 A 为典型表，此时记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

(Ⅰ) 若数表 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，请直接写出 B，C 是否是典型表；

(Ⅱ) 当 $n=6$ 时，是否存在典型表 A 使得 $S_6=17$；若存在，请写出一个 A；若不存在，请说明理由；

(Ⅲ) 求 S_n 的最小值.

(考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效)