绝密★启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟试题

注意事项：

1.本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2.答卷前，考生务必将自己的班级和姓名填写在答题纸上。

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题纸对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题纸上，写在本试卷上无效。

4.考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若集合 $A=\left\{x \mid x-3>0\right\}$，则 $\left(\complement_{R} A\right)\cap \mathrm{N}=$（　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

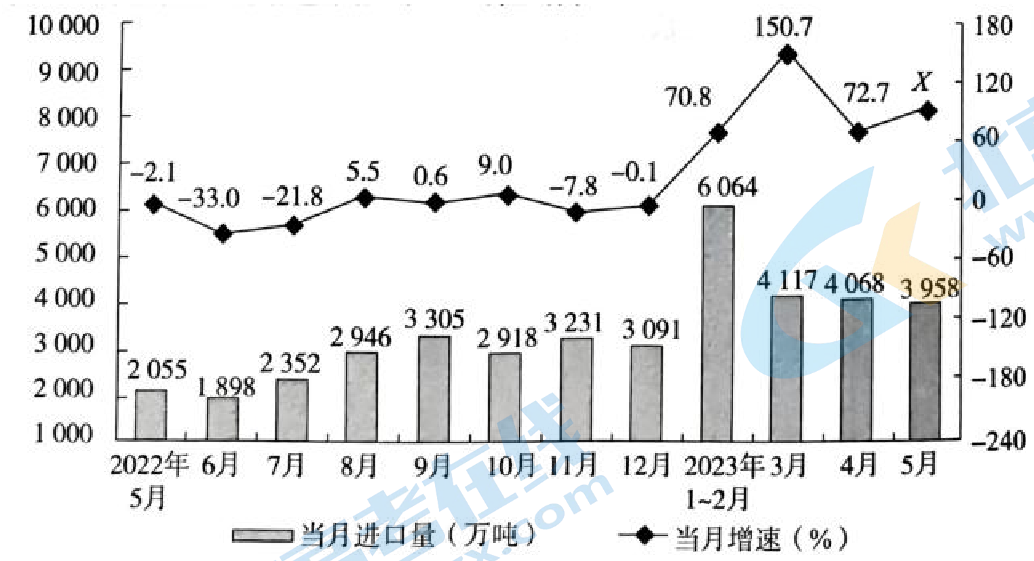
2.在递增的等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，若 $a_3-a_1=\dfrac{5}{2}$，$a_2=3$，则公比 $q=$（　　）

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C.2　　D. $\dfrac{5}{2}$

3.已知函数 $f(x)=3^x+x-6$ 有一个零点 $x=x_0$，则 x_0 属于下列哪个区间（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　C. $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$　　D. $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$

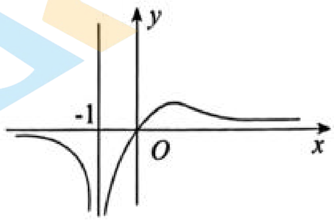
4.如图是国家统计局发布的 2022 年 5 月至 2023 年 5 月全国煤炭进口走势图，每组数据中的增速是与上一年同期相比的增速，则图中 X 的值约为（　　）



全国煤炭进口月度走势图

A.90.2　　　B.90.8　　　C.91.4　　　D.92.6

5.如图是下列四个函数中某一个的部分图象，则该函数为（　　）



A. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln\left|x+2\right|}$　　　B. $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{e^{x+1}-1}$

C. $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\left(x+1\right)^2}$　　　D. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}$

6.已知离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P\left(x_0,y_0\right)$是椭圆上位于第一象限的一点，且$\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{3}$，则$x_0=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$　　　B. $\dfrac{1}{2}a$　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

7.已知对任意实数x，y，函数$f\left(x\right)$满足$f\left(xy+1\right)=f\left(x+1\right)+f\left(y+1\right)$，则$f\left(x\right)$（　　）

A.有对称中心　　　B.有对称轴

C.是增函数　　　D.是减函数

8.已知半径为R的球中有一个内接正四棱锥，底面边长为a，当正四棱锥的高为h时，正四棱锥的体积取得最大值V，则（　　）

A. $h=2a$　　B. $h=\frac{3}{2}a$　　C. $h=a$　　D. $h=\frac{1}{2}a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$是奇函数

B. $f\left(x\right)$是增函数

C.曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线过原点

D.存在实数 a，使得 $y=f\left(x\right)$ 的图象与 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

10.先后两次抛掷一枚质地均匀的骰子，得到向上的点数分别为 x，y，设事件 $A_1=$“$x+y=5$”，事件 $A_2=$“$y=x^2$”，事件 $A_3=$“$x+2y$ 为奇数”，则（　　）

A. $P\left(A_1\right)=\frac{1}{9}$　　B. $P\left(A_2\right)=\frac{1}{12}$

C. A_1 与 A_3 相互独立　　D. A_2 与 A_3 相互独立

11.已知复数 $z_0=1-\mathrm{i}$，$z=x+y\mathrm{i}\left(x,y\in\mathbf{R}\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A.方程 $\left|z-z_0\right|=2$ 表示的 z 在复平面内对应点的轨迹是圆

B.方程 $\left|z-z_0\right|+\left|z-\overline{z_0}\right|=2$ 表示的 z 在复平面内对应点的轨迹是椭圆

C.方程 $\left|z-z_0\right|-\left|z-\overline{z_0}\right|=1$ 表示的 z 在复平面内对应点的轨迹是双曲线的一支

D.方程 $\left|z+\frac{1}{2}\left(z_0+\overline{z_0}\right)\right|=\left|z-z_0\right|$ 表示的 z 在复平面内对应点的轨迹是抛物线

12.已知定义：$\mathrm{e}_+^x=\begin{cases}1,x<0,\\ \mathrm{e}^x,x\geq 0,\end{cases}$ 则下列命题正确的是（　　）

A. $\forall b\in\mathbf{R}^+$，$\left(\mathrm{e}_+^x\right)^b=\mathrm{e}_+^{bx}$　　B.若 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则 $\mathrm{e}_+^{x_1}\cdot\mathrm{e}_+^{x_2}=\mathrm{e}_+^{x_1+x_2}$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\ln\left(\mathrm{e}_+^x+1\right)-\frac{x}{2}\geq\ln 2$　　D.若 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则 $\mathrm{e}_+^{x_1}\div\mathrm{e}_+^{x_2}=\mathrm{e}_+^{x_1-x_2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.若 $3\cos 2\theta-14\cos\theta+7=0$，则 $\cos 2\theta=$__________.

14.高三（1）班某竞赛小组有 3 名男生和 2 名女生，现选派 3 人分别领取数学、物理、化学竞赛资料，则至少有一名女生的选派方法共有____________种.（用数字作答）

15.已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其右支上有一点 P 满足 $\angle F_1PF_2=60°$，过点 F_2 向 $\angle F_1PF_2$ 的平分线引垂线交于点 H，若 $|F_2H|=\frac{1}{2}b$，则双曲线 C 的离心率 $e=$________.

16.在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 的边长为 2，$\triangle PAC$ 为正三角形，点 M，N 分别在 PB，PD 上，且 $PM=2MB$，$PN=2ND$，过点 A,M,N 的截面交 PC 于点 H，则四棱锥 $P-AMHN$ 的体积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $4S_n=n(a_n+a_{n+1}+1)$.

（1）证明：$2a_n+d=2nd+1$；

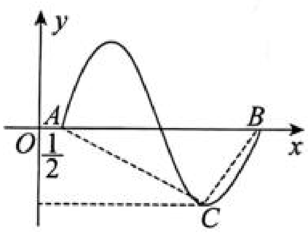
（2）若 $a_3=8$，求 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，且 $\angle ACB=90°$.

（1）求 ω 与 φ 的值；

（2）若斜率为 $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求切点坐标.

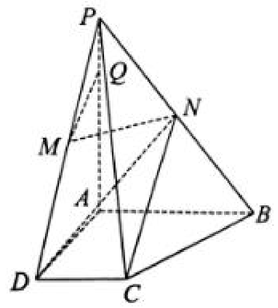


19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=2$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle BAD=90°$，$AB=2$，$CD=AD=1$，N 是 PB 的中点，点 M，Q 分别在线段 PD 与 AP 上，且 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QP}$.

（1）当 $\lambda=1$ 时，求平面 MDN 与平面 DNC 的夹角大小；

（2）若 $MQ\,//$ 平面 PBC，证明：$\mu=1+2\lambda$.



20.（本小题满分 12 分）

已知 $x\in[0,1)$，$f(x)=\mathrm{e}^{x}$.

（1）证明：$x+1\le f(x)\le\dfrac{1}{1-x}$；

（2）比较 $f(2x)$ 与 $\dfrac{1+x}{1-x}$ 的大小.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C：$y^{2}=2px(p>0)$ 上有一点 $P(1,m)(m>0)$，F 为抛物线 C 的焦点，$E\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，且 $|EP|=\sqrt{2}|PF|$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）过点 P 向圆 E：$\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^{2}+y^{2}=r^{2}$（点 P 在圆外）引两条切线，交抛物线 C 于另外两点 A，B，求证：直线 AB 过定点.

22.（本小题满分 12 分）

某排球教练带领甲、乙两名排球主力运动员训练排球的接球与传球，首先由教练第一次传球给甲、乙中的某位运动员，然后该运动员再传回教练.每次教练接球后按下列规律传球：若教练上一次是传给某运动员，则这次有 $\dfrac{1}{3}$ 的概率再传给该运动员，有 $\dfrac{2}{3}$ 的概率传给另一位运动员.已知教练第一次传给了甲运动员，且教练第 n 次传球传给甲运动员的概率为 p_n.

（1）求 p_2，p_3；

（2）求 p_n 的表达式；

（3）设 $q_n=|2p_n-1|$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}(q_{i+1}-q_i)(\sin q_{i+1}-\sin q_i)<\dfrac{1}{2}$.