2021年河南省六市高三第一次联考

数 学（理科）

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分.考试时间为120分钟,其中第Ⅱ卷22题,23题为选考题,其它题为必考题.考试结束后,将答题卡交回.
2. 答题前,考生必须将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内.
3. 选择题必须用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整、笔迹清楚.
4. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效.
5. 保持卡面清洁,不要折叠、不要弄破、不准使用涂改液、刮纸刀.

第Ⅰ卷 选择题(共60分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x|\frac{2x-1}{x+1}\leqslant 0\}$,集合 $B=\{x|y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}\}$,则集合 $A\cup B$ 等于

A. $[0,\frac{1}{2}]$ B. $(-1,+\infty)$ C. $(-1,1)$ D. $[-1,+\infty)$

2. 已知 i 是虚数单位,复数 z 满足 $\frac{(1-i)^2}{z}=1+i$,则 $|z|$ 等于

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{5}$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$S_{15}=30$,$a_{10}=4$,则 a_9 等于

A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

4. 为了得到函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象,需将函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)$ 的图象

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

5. $2^{\frac{1}{3}}$,$\log_2 6$,$3\log_3 2$ 的大小关系是

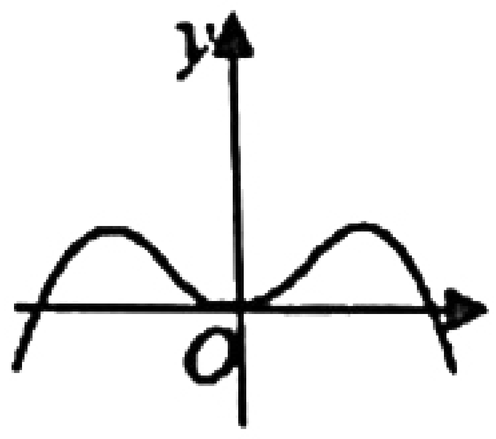
A. $2^{\frac{1}{3}}<\log_2 6<3\log_3 2$ B. $2^{\frac{1}{3}}<3\log_3 2<\log_2 6$

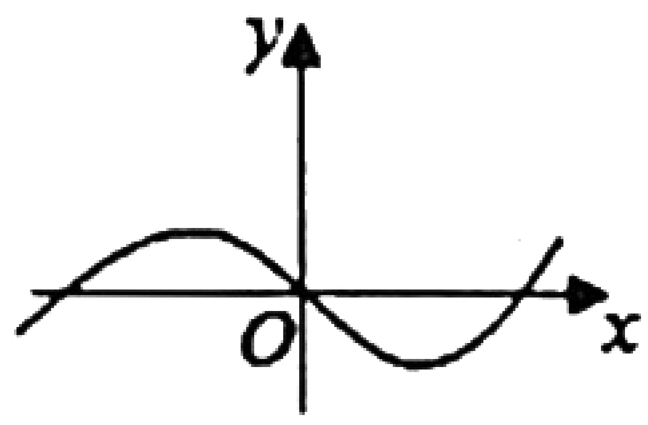
C. $3\log_3 2<2^{\frac{1}{3}}<\log_2 6$ D. $3\log_3 2<\log_2 6<2^{\frac{1}{3}}$

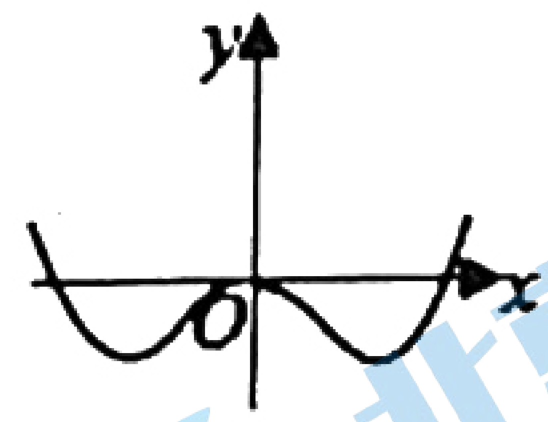
6. $(1-x)\cdot(x+\frac{1}{x}+2)^4$ 的展开式中 x 的系数是

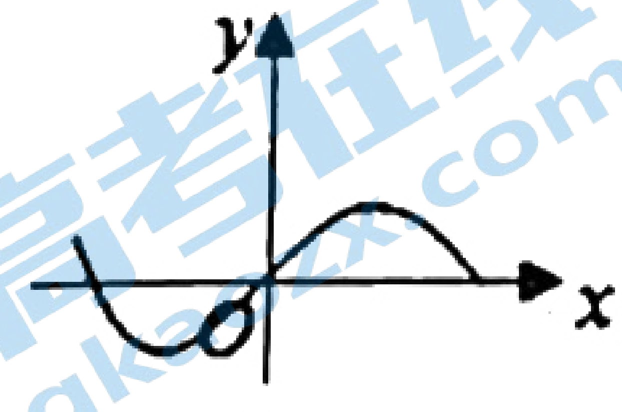
A. 10 B. 2 C. -14 D. 34

7. 函数 $f(x)=(\frac{2}{1+e^x}-1)\sin x$ 的部分图象大致形状是

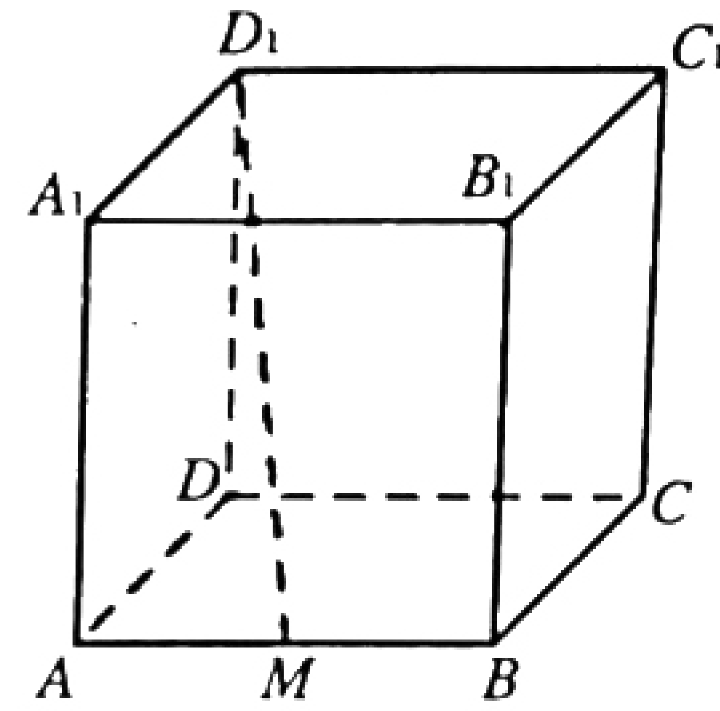

A.


B.


C.


D.

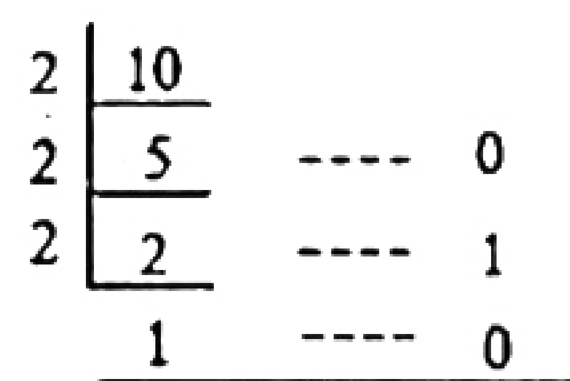
8. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 AB 的中点，动点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动，总有 $AP\perp D_1M$，则动点 P 的轨迹的长度为

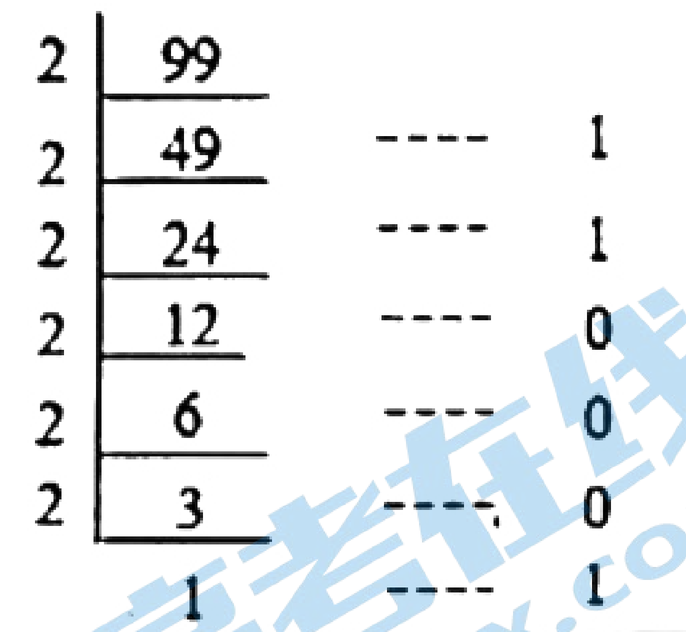


A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\pi}{16}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 二进制是计算机技术中广泛采用的一种数制. 二进制数据是用 0 和 1 两个数码来表示的数. 它的基数为 2，进位规则是“逢二进一”，借位规则“借一当二”. 当前的计算机系统使用的基本上是二进制系统，计算机中的二进制则是一个非常微小的开关，用 1 来表示“开”，用 0 来表示“关”. 如图所示，把十进制数$(10)_{10}$化为二进制数$(1010)_2$，十进制数$(99)_{10}$化为二进制数$(1100011)_2$，把二进制数$(10110)_2$ 化为十进制数为 $1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0=16+4+2=22$，随机取出 1 个不小于$(100000)_2$，且不超过$(111111)_2$ 的二进制数，其数码中恰有 4 个 1 的概率是


$(10)_{10}=(1010)_2$


$(99)_{10}=(1100011)_2$

A. $\frac{9}{32}$　　B. $\frac{9}{31}$

C. $\frac{10}{31}$　　D. $\frac{5}{16}$

10. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=CD=4$，$AC=BD=AD=BC=3$，则该三棱锥的内切球的表面积为

A. $\frac{4\pi}{5}$　　B. 17π　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

11. 已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，$M(x_0,\frac{1}{2})$为该抛物线上一点，若以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A，$\angle AMF=120°$，过 F 且与 y 轴垂直的直线 l 与 C 交于 G，H 两点，P_0 为 C 的准线上的一点，则$\triangle GHP_0$ 的面积为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 9

12. 若函数 $f(x)=(2ax+\frac{\ln x}{x})\ln x-(a-1)x^3$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$　　B. $(1,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$

C. $(0,1)\cup(1,\frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$　　D. $(0,1)\cup\{\frac{4e^2+1}{4e^2-4e}\}$

第Ⅱ卷　非选择题(共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(k,1)$,且 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $90°$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为__________.

14. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\\x-2y+4\geqslant 0\end{cases}$,则 $z=x-3y$ 的最小值为__________.

15. 设正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n,且 $S_n+2T_n=1$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是__________.

16. 已知直线 l:$x-\sqrt{3}y=0$ 交双曲线 Γ:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 于 A,B 两点,过 A 作直线 l 的垂线 AC 交双曲线 Γ 于点 C.若 $\angle ABC=60°$,则双曲线 Γ 的离心率为__________.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

必考题:共 60 分

17.(本小题满分 12 分)

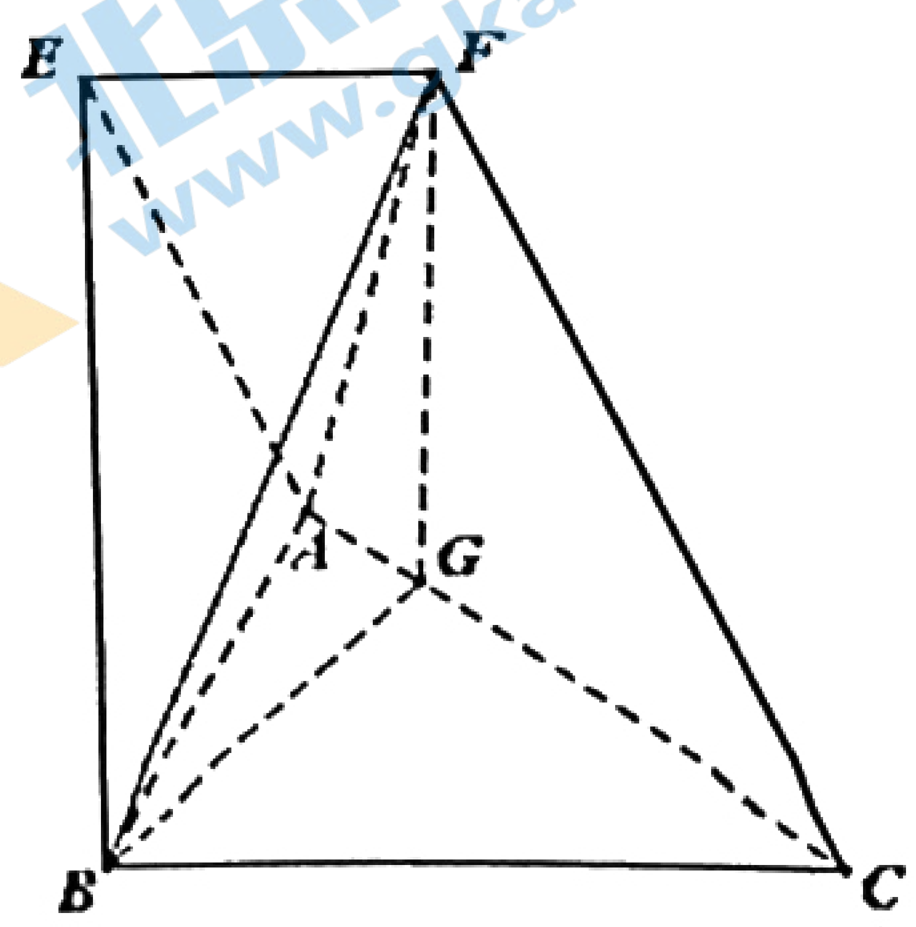
在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $\frac{\sqrt{2}c-b}{a}=\sin C\tan A-\cos C$.

(Ⅰ)求角 A 的大小;

(Ⅱ)若 $b=3\sqrt{2}$,$c=2$,点 D 在边 BC 上,且 $CD=2DB$,求 a 及 AD.

18.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $A-BCFE$ 中,四边形 $EFCB$ 为梯形,$EF/\!/BC$,且 $2EF=BC$,△ABC 是边长为 2 的正三角形,顶点 F 在 AC 上的射影为点 G,且 $FG=\sqrt{3}$,$CF=\frac{\sqrt{21}}{2}$,$BF=\frac{5}{2}$.



(Ⅰ)求证:平面 $FGB\perp$平面 ABC;

(Ⅱ)求二面角 $E-AB-F$ 的余弦值.

19.(本小题满分 12 分)

某种机器需要同时装配两个部件 S 才能正常运行,且两个部件互不影响,部件 S 有两个等级:一等品售价 5 千元,使用寿命为 5 个月或 6 个月(概率均为0.5);二等品售价 2 千元,使用寿命为 2 个月或 3 个月(概率均为 0.5)

(Ⅰ)若从 4 件一等品和 2 件二等品共 6 件部件 S 中任取 2 件装入机器内,求机器可运行时间不少于 3 个月的概率.

（Ⅱ）现有两种购置部件 S 的方案，方案甲：购置 2 件一等品；方案乙：购置 1 件一等品和 2 件二等品，试从性价比（即机器正常运行时间与购置部件 S 的成本之比）角度考虑，选择哪一种方案更实惠.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(0,2)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若矩形 $ABCD$ 的四条边均与椭圆相切，求该矩形面积的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）证明：$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$.

选考题：共 10 分.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4－4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\ y=1+t\sin\varphi\end{cases}$（$t$ 为参数，$\varphi\in[0,\pi)$），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求圆 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设点 P 的坐标为 $P(1,1)$，若直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点，求 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$ 的最大值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4－5：不等式选讲】

已知 a,b,c 为正数，且 $a+b+c=2$，求证：

（Ⅰ）$ab+bc+ac\leqslant\frac{4}{3}$；

（Ⅱ）$\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant8$.

2021年河南省六市高三第一次联合调研检测
数学理科参考答案

一、选择题

1-5 CABDB 6-10 CCADA 11-12 DB

二、填空题

13. $-\dfrac{2\sqrt{145}}{29}$ 14. -7 15. $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(n=1)\\ \dfrac{4}{4n^2-1}(n\geq 2)\end{cases}$ 16. $\sqrt{2}$

三、解答题

17. 解：(Ⅰ)由正弦定理，原式可化为$\sqrt{2}\sin C-\sin B=\sin A(\sin C\tan A-\cos C)$，

即$\sqrt{2}\sin C-\sin(A+C)=\sin A(\sin C\tan A-\cos C)$， ………………………… 2分

$\therefore \sqrt{2}\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}-\sin A\cos C$，

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore \dfrac{\sin^2 A}{\cos A}+\cos A=\sqrt{2}$， ………………………… 4分

即 $1-\cos^2 A+\cos^2 A=\sqrt{2}\cos A$，

$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………… 6分

(Ⅱ)由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=18+4-12=10$，

$\therefore a=\sqrt{10}$， ………………………… 8分

$\because$点 D 在边 BC 上，且 $CD=2DB$，$\therefore BD=\dfrac{a}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，

又 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$， ………………………… 10分

$\therefore AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=\dfrac{58}{9}$，$\therefore AD=\dfrac{\sqrt{58}}{3}$. ………… 12分

18. (Ⅰ)证明：由顶点 F 在 AC 上投影为点 G，可知，$FG\perp AC$. 取 AC 的中点为 O，连结 OB，GB.

在 $Rt\Delta FGC$ 中，$FG=\sqrt{3}$，$CF=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，$\therefore CG=\dfrac{3}{2}$. ………………………… 1分

在 $Rt\Delta GBO$ 中，$OB=\sqrt{3}$，$OG=\dfrac{1}{2}$，$\therefore BG=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. ………………………… 2分

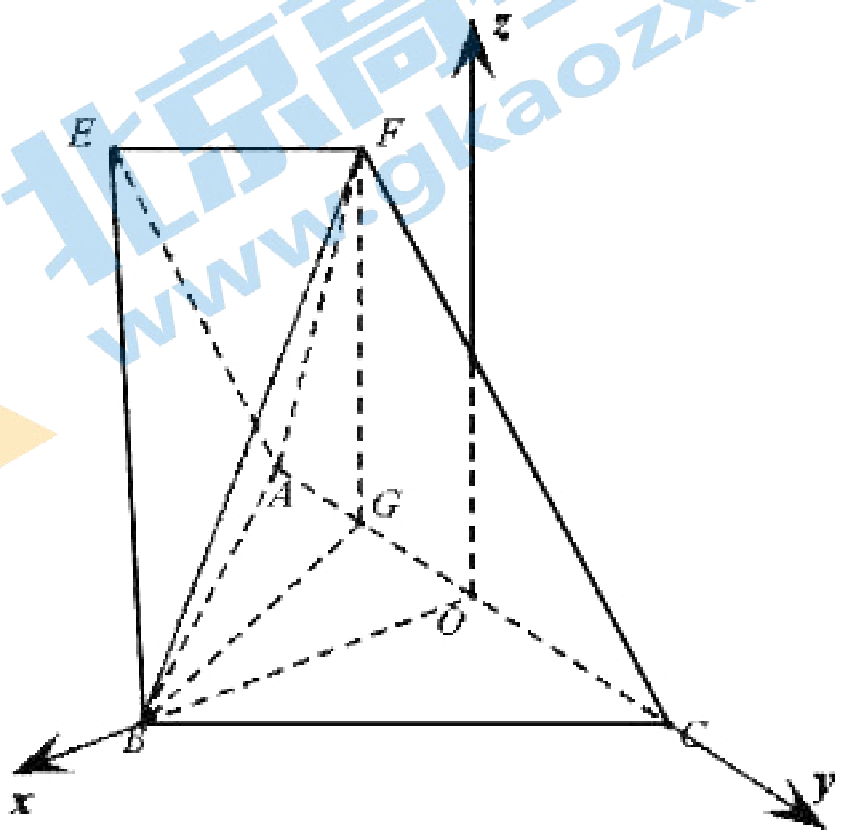
$\because BG^2+GF^2=FB^2$，$\therefore FG\perp BG$. ………………………… 3分

$\because$ $FG\perp AC$，$FG\perp GB$，$AC\cap BG=G$ $\therefore FG\perp$ 面 ABC．又 $FG\subseteq$ 面 FGB，

$\therefore$ 面 $FGB\perp$ 面 ABC． ………………………………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）解：$\because O$ 是 AC 的中点，$\therefore OB\perp AC$，由（Ⅰ）知 $OB\perp FG$

$\therefore OB\perp$ 面 AFC，且 $FG\perp$ 面 ABC．以 OB 所在直线为 x 轴，OC 所在直线为 y 轴，过点 O 作平面 ABC 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示：



$A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$E(\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-1,0)$，

$\overrightarrow{BE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ ………………………………… 8 分

设平面 ABE，ABF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，

解得：$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},-\frac{1}{2})$， ………………………………………………………………… 9 分

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，解得：$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\frac{1}{2})$， ……………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{15}{17}$，

$\therefore$ 二面角 $E-AB-F$ 的余弦值为 $\frac{15}{17}$． ……………………………………………… 12 分

19．解：（Ⅰ）由题意知机器运行时间不少于 3 个月，共有三种可能： ……… 1 分

第一，取到 2 个一等品，对应概率为 $\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$，

第二，取到 1 个一等品，1 个二等品，且二等品的使用寿命为 3 个月，对应概率为 $\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{15}$，

第三，取到 2 个二等品，且二者使用寿命均为 3 个月，对应概率为：$\dfrac{C_2^2}{C_6^2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{60}$，

$\therefore$ 机器可运行时间不少于 3 个月的概率 $P=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{41}{60}$． …………… 5 分

（Ⅱ）若采用甲方案，则机器正常运行的时间为 X（单位：月），

则 X 的可能取值为 5，6．

$P(X=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=5)=1-P(X=6)=\frac{3}{4}$,

则 X 的分布列为：

X	5	6
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E(X)=5\times\frac{3}{4}+6\times\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$,它与成本价之比为 $\frac{E(X)}{5+5}=\frac{21}{40}$, …………… 7 分

若采用方案乙,两个二等品的使用寿命之和 Y(单位:月),

Y 的可能取值为 4,5,6,

$P(Y=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(Y=5)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $P(Y=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

则 Y 的分布列为：

Y	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

…………………………………………………………………………………… 9 分

记 M 为一等品的使用寿命(单位:月),此时机器的正常运行时间为 Z,

则 Z 的可能取值为 4,5,6,

$P(Z=4)=P(Y=4)=\frac{1}{4}$,

$P(Z=5)=P(M=5,Y\geqslant5)+P(M=6,Y=5)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$,

$P(Z=6)=P(M=y=6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$,

Z 的分布列为：

Z	4	5	6
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(Z)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{39}{8}$,它与成本价之比为 $\frac{E(Z)}{5+2+2}=\frac{13}{24}$, … 11 分

$\because\frac{21}{40}<\frac{13}{24}$,

$\therefore$ 从性价比角度考虑,方案乙更实惠. …………………………………… 12 分

20. 解：(Ⅰ)$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore a^2=4b^2$

又椭圆 C 过点 $(0,2)$，$\therefore a^2=4, b^2=1$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$ ………………………………………………… 3 分

(Ⅱ) ①当矩形的一边与坐标轴平行时，易知 $S=8$. ………………………… 4 分

②当矩形的各边均不与坐标轴平行时，由矩形及椭圆的对称性，设其中一边所在的直线方程为：$y=kx+m$，则其对边所在的直线方程为：$y=kx-m$，

另外两边所在的直线方程分别为：$y=-\frac{1}{k}x+n$，$y=-\frac{1}{k}x-n$， ………… 5 分

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\4x^2+y^2=4\end{cases}$ 整理可得：$(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-4=0$，由题意可得 $\triangle=0$，整理可得 $k^2+4=m^2$，

设矩形与直线 $y=kx+m$ 对应的一条边长为 d_1，则 $d_1=\frac{|2m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

同理可得 $\frac{1}{k^2}+4=n^2$，设矩形相邻的另一条边长为 d_2，则 $d_2=\frac{|2n|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$， … 8 分

所以矩形的面积 $S=d_1\cdot d_2=\frac{|2m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|2n|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\frac{4|mnk|}{1+k^2}$

$=4\cdot\sqrt{\frac{(1+4k^2)(4+k^2)}{(1+k^2)^2}}=4\cdot\sqrt{\frac{4k^4+17k^2+4}{(1+k^2)^2}}=4\cdot\sqrt{\frac{4(1+k^2)^2+9k^2}{(1+k^2)^2}}$ …… 10 分

$=4\cdot\sqrt{4+\frac{9k^2}{k^4+2k^2+1}}=4\cdot\sqrt{4+\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}$，因为 $k^2>0$，所以 $k^2+\frac{1}{k^2}\geqslant 2$，当且仅当 $k^2=1$ 时取等号，所以 $\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}\in(0,\frac{9}{4}]$，所以 $\sqrt{4+\frac{9}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}\in(2,\frac{5}{2}]$，所以 $S\in(8,10]$.

综上所述：该矩形面积的取值范围为 $[8,10]$. ………………………………… 12 分

21. 解：(Ⅰ) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$，

易知 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{2}{x}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(1)=0$， ………… 3 分

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$；

令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$； ………… 4 分

(Ⅱ)证明：设 $g(x)=(x-2)^3-3(x-2)(x>0)$，$g'(x)=3(x-1)(x-3)$，
令 $g'(x)<0$，解得 $1<x<3$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>3$，
∴当 $x=1$ 时，$g(x)$取得极大值，且极大值为 2，
由(1)知，$f(x)_{min}=f(1)=2$，
故当 $0<x\leqslant 3$ 时，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$成立。 …………………………… 6 分
当 $x>3$ 时，设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^{x-1}-2\ln x-(x-2)^3+4x-6$，

则 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{2}{x}-3(x-2)^2+4$，

设 $p(x)=h'(x)$，$p'(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{x^2}-6(x-2)$，

设 $q(x)=p'(x)$，则 $q'(x)=e^{x-1}-\dfrac{4}{x^3}-6$， ……………………………………… 8 分

易知 $q'(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

∴$q'(x)>q'(3)=e^2-\dfrac{4}{27}-6>0$，则 $q(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

从而 $p'(x)>p'(3)=e^2+\dfrac{2}{9}-6>0$，则 $h'(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

所以 $h'(x)>h'(3)=e^2+\dfrac{1}{3}>0$，则 $h(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，

于是 $h(x)>h(3)=e^2+5-2\ln 3>0$，故当 $x>3$ 时，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$；
综上，$f(x)\geqslant(x-2)^3-3(x-2)$. ………………………………………………… 12 分

22.解：(Ⅰ)圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos(\theta-\dfrac{\pi}{3})$，

则 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，

由极坐标与直角坐标的转化公式得圆 C 的直角坐标方程是：$x^2+y^2=2x+2\sqrt{3}y$，

即 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$. …………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)将直线 l 的参数方程$\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\ y=1+t\sin\varphi\end{cases}$($t$ 为参数)，

代入 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$ 得：

$t^2-2(\sqrt{3}-1)\sin\varphi\cdot t-2\sqrt{3}=0$，

设点 A，B 所对应的参数分别为 t_1 和 t_2，

则 $t_1+t_2=2(\sqrt{3}-1)\sin\varphi$，$t_1\cdot t_2=-2\sqrt{3}$，

则$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2\sin^2\varphi+8\sqrt{3}}$，

当 $\sin\varphi=1$ 时，$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$的最大值为 4. ………………………… 10 分

23.证明：(Ⅰ)将 $a+b+c=2$ 平方得：$a^2+b^2+c^2+2ab+2ab+2ac=4$， … 1 分

由基本不等式知：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

三式相加得：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，………………………………………… 3 分

则 $4=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geqslant 3ab+3bc+3ac$，

$ab+bc+ac\leqslant\frac{4}{3}$，当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立 ……………………… 5 分

（Ⅱ）由 $\frac{2-a}{b}=\frac{b+c}{b}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{b}$，同理 $\frac{2-b}{c}=\frac{a+c}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{c}$，$\frac{2-c}{a}=\frac{b+a}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{ba}}{a}$，

…………………………………………………………………………………………… 7 分

则 $\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{c}\cdot\frac{2\sqrt{ba}}{a}=8$，

即 $\frac{2-a}{b}\cdot\frac{2-b}{c}\cdot\frac{2-c}{a}\geqslant 8$，当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立.………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。