2023年湛江市普通高考第二次模拟测试

数　　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,5)$，则 $1+z$ 在复平面内对应的点为

A. $(3,-5)$　　B. $(3,5)$　　C. $(-3,-5)$　　D. $(-3,5)$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x>4\}$，$B=\{x|2^x>2\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$

A. $[-1,2)$　　B. $(4,+\infty)$　　C. $(1,4)$　　D. $(1,4]$

3. 广东省第七次人口普查统计数据显示，湛江市九个管辖区常住人口数据如表所示，则这九个管辖区的数据的第70%分位数是

管辖区	常住人口
赤坎区	303824
霞山区	487093
坡头区	333239
麻章区	487712
遂溪县	886452
徐闻县	698474
廉江市	1443099
雷州市	1427664
吴川市	927275

A. 927275

B. 886452

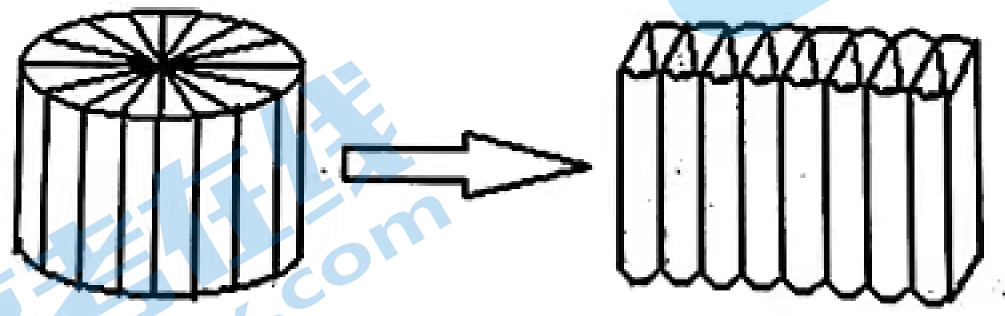
C. 698474

D. 487712

4. $(2x^2-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x^4 的系数是

A. 40　　B. -40　　C. 80　　D. -80

5. 如图，将一个圆柱 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$ 等分切割，再将其重新组合成一个与圆柱等底等高的几何体，n 越大，重新组合成的几何体就越接近一个"长方体"．若新几何体的表面积比原圆柱的表面积增加了10，则圆柱的侧面积为



A. 10π　　B. 20π　　C. $10n\pi$　　D. 18π

6. 若与 y 轴相切的圆 C 与直线 $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 也相切，且圆 C 经过点 $P(2,\sqrt{3})$，则圆 C 的直径为

A. 2　　B. 2或$\frac{14}{3}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{7}{4}$或$\frac{16}{3}$

7. 当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{4x^4+17x^2y+4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}<\dfrac{m}{4}$ 恒成立，则 m 的取值范围是

A. $(25,+\infty)$　　　　B. $(26,+\infty)$

C. $(\dfrac{99}{4},+\infty)$　　　　D. $(27,+\infty)$

8. 对于两个函数 $h(t)=e^{t-1}(t>\dfrac{1}{2})$ 与 $g(t)=\ln(2t-1)+2(t>\dfrac{1}{2})$，若这两个函数值相等时对应的自变量分别为 t_1,t_2，则 t_2-t_1 的最小值为

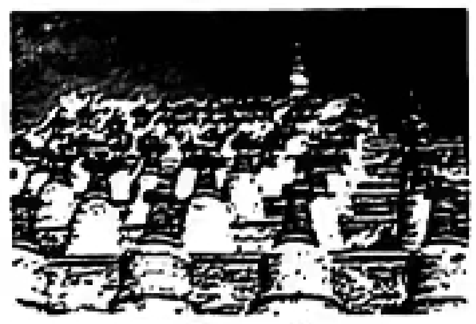
A. -1　　B. $-\ln 2$　　C. $1-\ln 3$　　D. $1-2\ln 2$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若 $5\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha+1=0$，则 $\tan\alpha$ 的值可能为

A. 2　　B. 3　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

10. 一百零八塔始建于西夏时期，是中国现存最大且排列最整齐的塔群之一，塔群随山势凿石分阶而建，自上而下一共 12 层，第 1 层有 1 座塔，从第 2 层开始每层的塔数均不少于上一层的塔数，总计 108 座塔. 已知包括第 1 层在内的其中 10 层的塔数可以构成等差数列 $\{a_n\}$，剩下的 2 层的塔数分别与上一层的塔数相等，第 1 层与第 2 层的塔数不同，则



A. 第 3 层的塔数为 3　　B. 第 6 层的塔数为 9

C. 第 4 层与第 5 层的塔数相等　　D. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2

11. 廉江红橙是广东省廉江市特产、中国国家地理标志产品. 设廉江地区某种植园成熟的红橙单果质量 M(单位：g)服从正态分布 $N(165,\sigma^2)$，且 $P(M<162)=0.15$，$P(165<M<167)=0.3$. 下列说法正确的是

A. 若从种植园成熟的红橙中随机选取 1 个，则这个红橙的质量小于 167 g 的概率为 0.7

B. 若从种植园成熟的红橙中随机选取 1 个，则这个红橙的质量在 167 g～168 g 的概率为 0.05

C. 若从种植园成熟的红橙中随机选取 600 个，则质量大于 163 g 的个数的数学期望为 480

D. 若从种植园成熟的红橙中随机选取 600 个，则质量在 163 g～168 g 的个数的方差为 136.5

12. 已知双曲线 $C:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上焦点为 F，过焦点 F 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 A，并与另一条渐近线交于点 B，若 $|FB|=4|AF|$，则 C 的离心率可能为

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

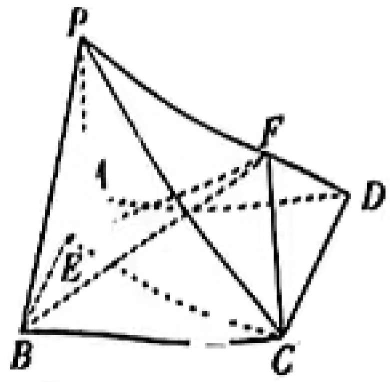
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知奇函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3^{-x},x<0,\\ g(x)+1,x>0,\end{cases}$ 则 $g(x)=$ ___▲___.

14. 若抛物线 C 的焦点到准线的距离为 $\sqrt{3}$，且 C 的开口朝上，则 C 的标准方程为 ___▲___.

15. 若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$ 上具有单调性，且 $x=\frac{2\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的一个零点，则 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$ 上单调递__▲__（填增或减），函数 $y=f(x)-\lg x$ 的零点个数为__▲__.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

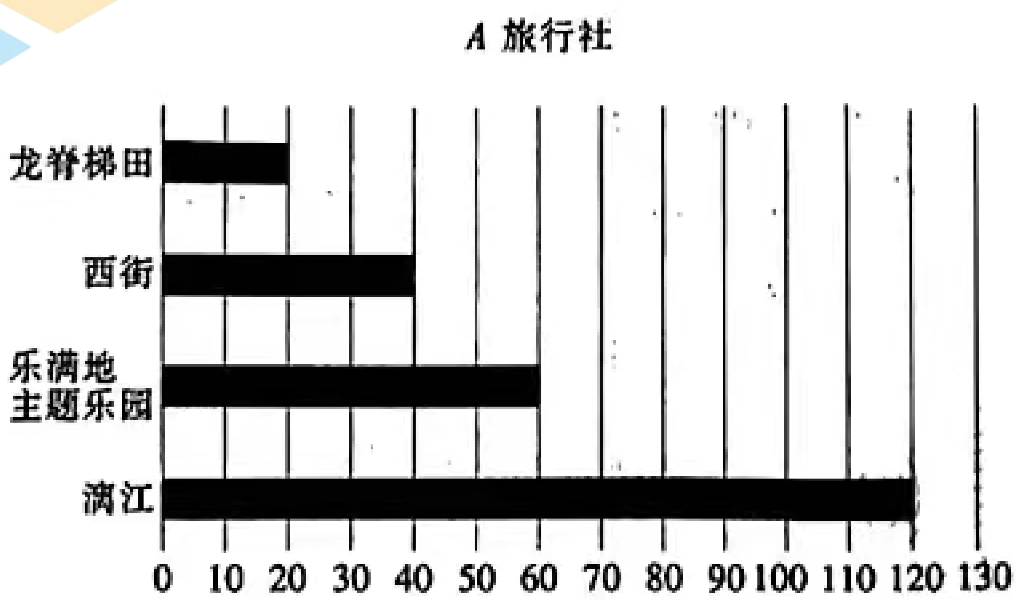
16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$AP\perp$ 底面 $ABCD$，E 为棱 AB 上任意一点（不包括端点），F 为棱 PD 上任意一点（不包括端点），且 $\frac{AE}{AB}=\frac{DF}{DP}$. 已知 $AB=AP=1$，$BC=2$，当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时，EF 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为__▲__.

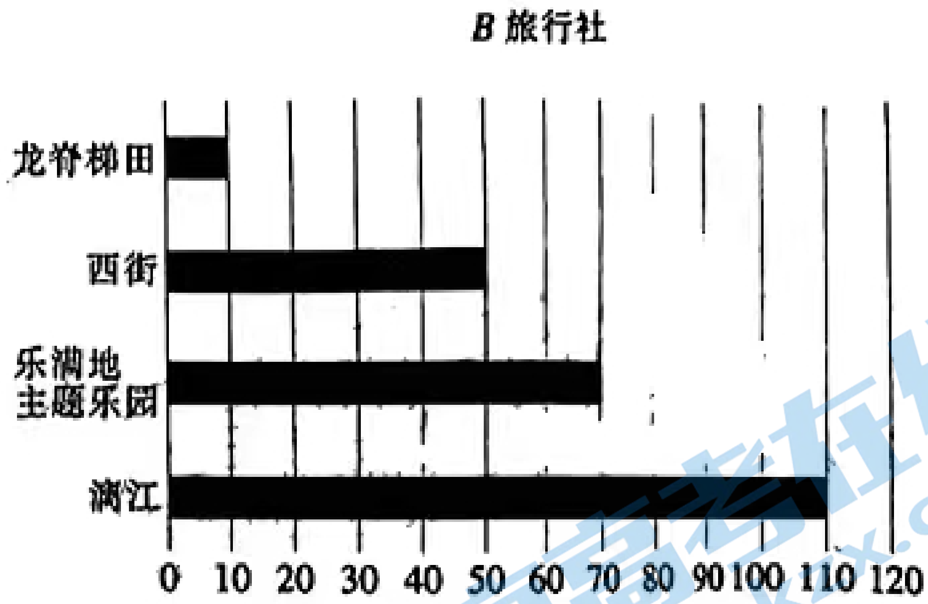


四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

现有 A，B 两个广西旅行社，统计了这两个旅行社的游客去漓江、乐满地主题乐园、西街、龙脊梯田四个景点旅游的各 240 人次的数据，并分别绘制出这两个旅行社 240 人次分布的柱形图，如图所示. 假设去漓江、乐满地主题乐园、西街、龙脊梯田旅游每人次的平均消费分别为 1200 元、1000 元、600 元、200 元.





(1) 通过计算，比较这两个旅行社 240 人次的消费总额哪个更大；

(2) 若甲和乙分别去 A 旅行社、B 旅行社，并都从这四个景点中选择一个去旅游，以这 240 人次去漓江的频率为概率，求甲、乙至少有一人去漓江的概率.

18.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b^2+c^2=a^2-bc$.

(1) 求 A；

(2) 若 $b\sin A=4\sin B$，且 $\lg b+\lg c\geq 1-2\cos(B+C)$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19.(12分)

如图1，在五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCE$ 为正方形，$CD\perp DE$，$CD=DE$，如图2，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起，使得 A 至 A_1 处，且 $A_1B\perp DE$.

(1)证明：$DE\perp$ 平面 A_1BE.

(2)求二面角 $C-A_1E-D$ 的余弦值.

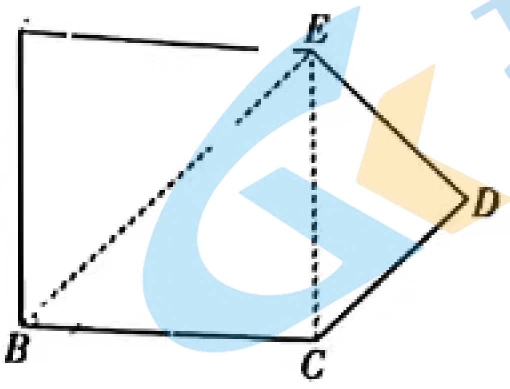


图1

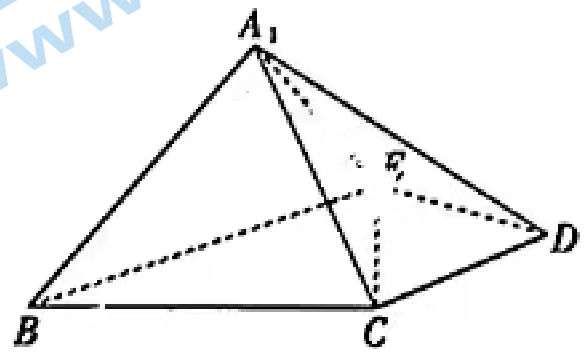


图2

20.(12分)

已知两个正项数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{a_n-b_n}=b_n$，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{b_n}{n^2+1}$.

(1)求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求数列 $\{[a_n+a_{n+1}]\cdot 2^{b_n}\}$ 的前 n 项和 S_n.

21.(12分)

设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$ 分别是椭圆的左、右顶点，直线 l 过点 $C(6,0)$，当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时，直线 l 与椭圆相切.

(1)求椭圆的方程.

(2)若直线 l 与椭圆交于 P，Q(异于 A，B)两点.

(i)求直线 BP 与 BQ 的斜率之积；

(ii)若直线 AP 与 BQ 的斜率之和为 $-\dfrac{1}{2}$，求直线 l 的方程.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{2}x^2+x-m\ln x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

(2)若存在 $x_1\neq x_2$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：

(i)$m>0$；

(ii)$2m>e(\ln x_1+\ln x_2)$.

2023 年湛江市普通高考第二次模拟测试
数学参考答案

1. A　依题意得 $z=2+5i$，则 $1+\bar{z}=1+(2-5i)=3-5i$，所以 $1+\bar{z}$ 在复平面内对应的点为$(3,-5)$.

2. D　由 $\complement_{R}A=\{x|x^2-3x\leqslant 4\}=[-1,4]$，$B=(1,+\infty)$，得$(\complement_{R}A)\cap B=(1,4]$.

3. A　这九个管辖区的数据按照从小到大的顺序排列为 303824，333239，487093，487712，698474，886452，927275，1427664，1443099，因为 $9\times 70\%=6.3$，所以这九个管辖区的数据的第 70%分位数是 927275.

4. C　$(2x^2-\frac{1}{x})^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k(2x^2)^{5-k}(-\frac{1}{x})^k=C_5^k2^{5-k}(-1)^kx^{10-3k}$，令 $10-3k=4$，得 $k=2$. 所以 x^4 的系数是 $C_5^2\times 2^3\times(-1)^2=80$.

5. A　显然新几何体的表面积比原几何体的表面积多了原几何体的轴截面面积，设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则 $2rh=10$，所以圆柱的侧面积为 $2\pi rh=10\pi$.

6. B　因为直线 l：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 $30°$，

所以圆 C 的圆心在两切线所成角的角平分线 $y=\sqrt{3}x$ 上.

设圆心 $C(a,\sqrt{3}a)$，则圆 C 的方程为$(x-a)^2+(y-\sqrt{3}a)^2=a^2$.

将点 $P(2,\sqrt{3})$的坐标代入，得$(2-a)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2=a^2$，解得 $a=1$ 或 $a=\frac{7}{3}$.

故圆 C 的直径为 2 或$\frac{14}{3}$.

7. A　当 $x,y\in(0,+\infty)$时，$\frac{4x^4+17x^2y+4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}=\frac{(4x^2+y)(x^2+4y)}{(x^2+y)^2}\leqslant\frac{(\frac{4x^2+y+x^2+4y}{2})^2}{(x^2+y)^2}=\frac{25}{4}$，

当且仅当 $4x^2+y=x^2+4y$，即 $y=x^2$ 时，等号成立，所以$\frac{4x^4+17x^2y+4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}$的最大值为$\frac{25}{4}$.

所以$\frac{m}{4}>\frac{25}{4}$，即 $m>25$.

8. B　设 $h(t_1)=g(t_2)=m$，则 $t_1=1+\ln m$，$t_2=\frac{1}{2}(e^{m-2}+1)$，由 $t>\frac{1}{2}$，得 $m>e^{-\frac{1}{2}}$，则 $t_2-t_1=\frac{1}{2}(e^{m-2}+1)-(1+\ln m)=\frac{1}{2}e^{m-2}-\ln m-\frac{1}{2}$，$m>e^{-\frac{1}{2}}$，设函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\ln x-\frac{1}{2}$，$x>e^{-\frac{1}{2}}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}-\frac{1}{x}$，$f'(x)$在$(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$上为增函数，且 $f'(2)=0$，所以当 $e^{-\frac{1}{2}}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)_{\min}=f(2)=-\ln 2$.

9. BD　因为 $5\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha+1=0$，所以 $10\sin\alpha\cos\alpha+5(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$，

整理得 $2\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，则 $2\tan^2\alpha-5\tan\alpha-3=0$，解得 $\tan\alpha=3$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

10. ACD　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.若$d=1$,则这10层的塔数之和为$10\times1+\frac{10\times9}{2}=55$,则最多有$55+10+10=75$座塔,不符合题意;若$d\geqslant3$,则这10层的塔数之和不少于$10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3>108$,不符合题意.所以$d=2$,这10层的塔数之和为$10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$,塔数依次是1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,依题意剩下2层的塔数为3与5.所以这12层塔的塔数分别为1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19,因此A,C,D正确,B错误.

11. BCD　因为$M\sim N(165,\sigma^2)$,所以$P(M<167)=0.5+0.3=0.8$,所以A错误.因为$P(165<M<168)=P(162<M<165)=0.5-0.15=0.35$,所以$P(167<M<168)=0.35-0.3=0.05$,所以B正确.$P(M>163)=P(M<167)=0.8$,若从种植园成熟的红橙中随机选取600个,则质量大于163 g的个数$X\sim B(600,0.8)$,所以$E(X)=600\times0.8=480$,所以C正确.$P(163<M<168)=0.35+0.3=0.65$,若从种植园成熟的红橙中随机选取600个,则质量在163 g~168 g的个数$Y\sim B(600,0.65)$,所以$D(Y)=600\times0.65\times(1-0.65)=136.5$,所以D正确.

12. AC　当$a=b$时,直线AF与另一条渐近线平行,所以$a\neq b$.

当$a>b$时,如图1,过F作另一条渐近线的垂线,垂足为P,则$|AF|=|PF|$,由$|FB|=4|AF|$,得$\sin\angle PBF=\frac{|PF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOP=\frac{1}{4}$,所以$2\cos^2\angle AOF-1=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$,所以$\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{5}}$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{3}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

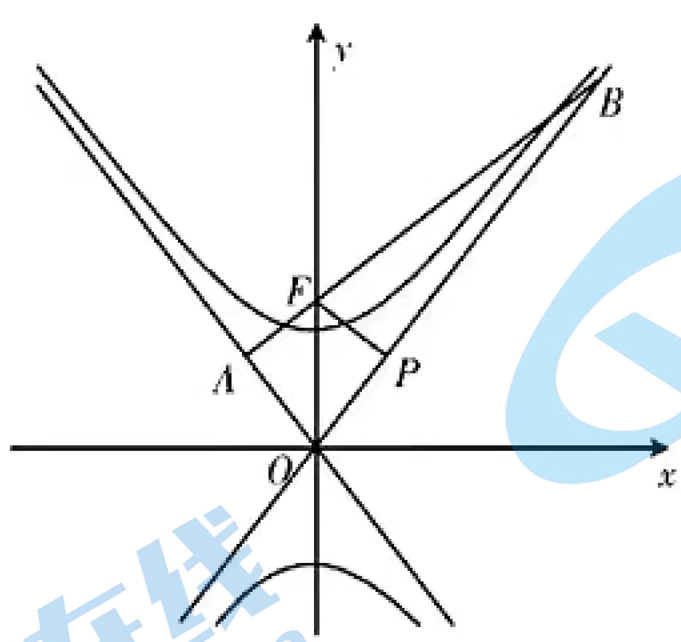


图1

当$a<b$时,如图2,过F作另一条渐近线的垂线,垂足为Q,则$|AF|=|QF|$,由$|FB|=4|AF|$,得$\sin\angle QBF=\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOQ=-\frac{1}{4}$,所以$2\cos^2\angle AOF-1=-\frac{1}{4}$,则$\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$,所以$\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{3}}$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{5}{3}}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

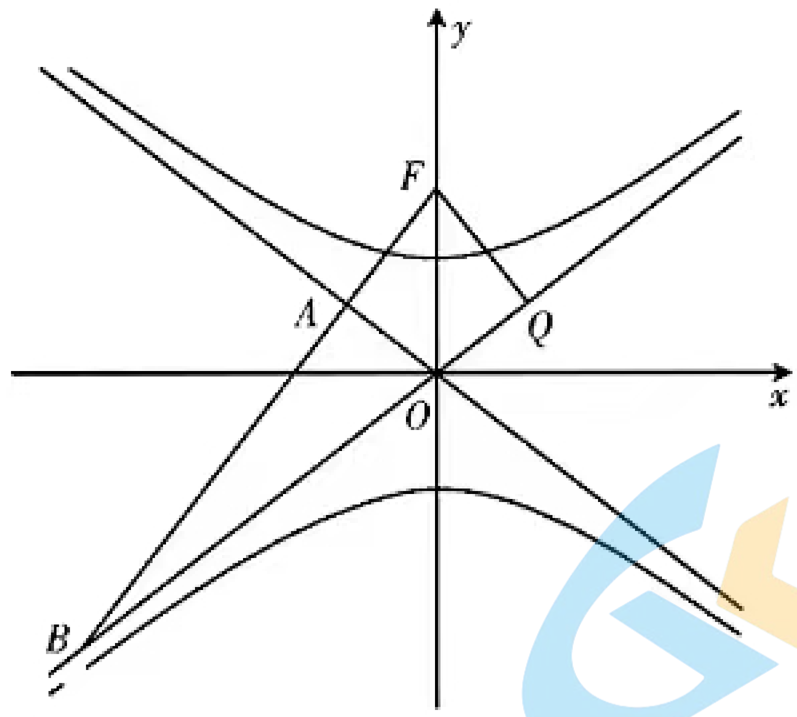


图 2

综上，C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. $-x^2+3^x-1$　当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=g(x)+1=-f(-x)=-[(-x)^2-3^{-(-x)}]=-x^2+3^x$，则 $g(x)=-x^2+3^x-1$.

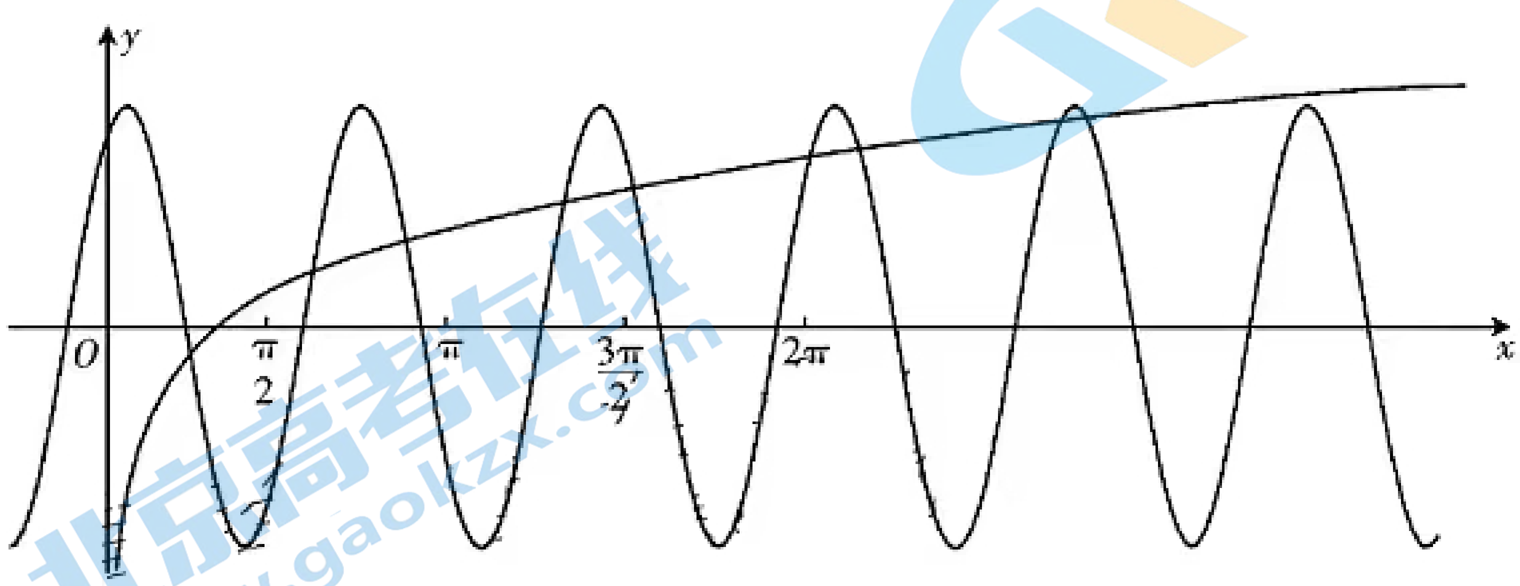
14. $x^2=2\sqrt{3}y$　依题意可设 C 的标准方程为 $x^2=2py(p>0)$，因为 C 的焦点到准线的距离为 $\sqrt{3}$，所以 $p=\sqrt{3}$，所以 C 的标准方程为 $x^2=2\sqrt{3}y$.

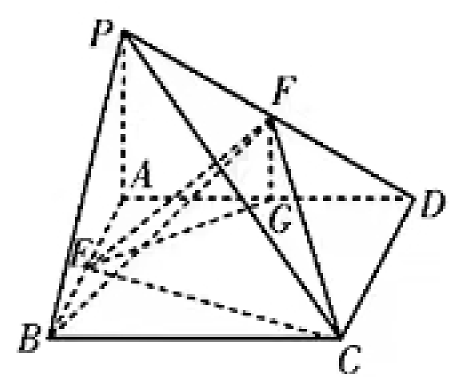
15. 增；9　因为 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$ 上具有单调性，所以 $\frac{\pi}{18}-(-\frac{\pi}{6})\leqslant\frac{T}{2}$，即 $\frac{2\pi}{9}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，$0<\omega\leqslant\frac{9}{2}$.

又因为 $f(\frac{2\pi}{9})=\sin(\frac{2\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{3})=0$，所以 $\frac{2\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{9}{2}k-\frac{3}{2}$，只有 $k=1$，$\omega=3$ 符合要求，此时 $f(x)=\sin(3x+\frac{\pi}{3})$.

当 $x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$ 时，$3x+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{18})$ 上单调递增.

作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 的图象，由图可知，这两个函数的图象共有 9 个交点，所以函数 $y=f(x)-\lg x$ 的零点个数为 9.





16. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　如图，在 AD 上取点 G，使得 $FG/\!/AP$.

由 $\frac{AE}{AB}=\frac{DF}{DP}$，设 $AE=xAB$，$DF=xPD$，其中 $0<x<1$.

由 $AB=AP=1$，$BC=2$，$AP\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=$

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AE=x$，$DF=\sqrt{5}x$，$BE=1-x$.

$\because FG/\!/AP$，$AP\perp$平面$ABCD$，$\therefore FG\perp$平面$ABCD$.

在$\triangle APD$中，有$\frac{GF}{AP}=\frac{DF}{PD}$，可得$\frac{GF}{1}=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$，可得$GF=x$.

$\triangle BCE$的面积为$\frac{1}{2}BE\cdot BC=\frac{1}{2}(1-x)\times 2=1-x$.

$V_{C-BEF}=V_{F-BCE}=V(x)=\frac{1}{3}(1-x)x=\frac{1}{3}[-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}]$，

可得当$x=\frac{1}{2}$时，三棱锥$C-BEF$的体积取得最大值$V(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$.

当三棱锥$C-BEF$的体积取得最大值时，E为AB的中点，F为DP的中点.

连接EG，则$\angle FEG$为EF与平面$ABCD$所成的角，$\because FG=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}$，$EG=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore \tan\angle FEG=\frac{FG}{EG}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. 解：(1)A旅行社240人次的消费总额为$20\times200+40\times600+60\times1000+120\times1200=232000$元，…………………………………………………………………… 2分

B旅行社240人次的消费总额为$10\times200+50\times600+70\times1000+110\times1200=234000$元，
…………………………………………………………………………………… 4分

因为$234000>232000$，所以B旅行社240人次的消费总额更大. ………………………… 5分

(2)对于A旅行社，这240人次去漓江的频率为$\frac{120}{240}=\frac{1}{2}$，

所以甲去漓江的概率为$\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 6分

对于B旅行社，这240人次去漓江的频率为$\frac{110}{240}=\frac{11}{24}$，

所以乙去漓江的概率为$\frac{11}{24}$. ……………………………………………………………… 7分

故甲、乙至少有一人去漓江的概率为$1-(1-\frac{11}{24})\times(1-\frac{1}{2})=\frac{35}{48}$. …………………… 10分

18. 解：(1)因为$b^2+c^2=a^2-bc$，

所以$b^2+c^2-a^2=-bc$. ………………………………………………………………… 1分

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$. …………………………………………… 3分

因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 4分

(2)由$b\sin A=4\sin B$及正弦定理，得$ab=4b$，……………………………………………… 5分

所以$a=4$. …………………………………………………………………………………… 6分

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant 2bc+bc$，……………………………………… 7分

所以 $bc\leqslant\frac{16}{3}$, …………………………………………………………………………… 8 分

当且仅当 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立. …………………………………………………………… 9 分

因为 $\lg b+\lg c\geqslant 1-2\cos(B+C)$,所以 $\lg(bc)\geqslant 1+2\cos A=0$,则 $bc\geqslant 1$, ………… 10 分

所以 $1\leqslant bc\leqslant\frac{16}{3}$,因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$,所以 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\frac{4\sqrt{3}}{3}]$. …………………………………………………………………………………… 12 分

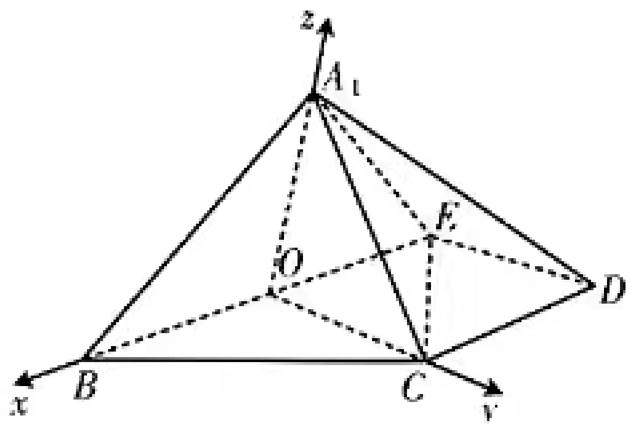
19. (1)证明:由题意可知 $\angle BEC=\angle CED=\frac{\pi}{4}$, $\angle BED=\frac{\pi}{2}$, $DE\perp BE$, …………………… 2 分

因为 $A_1B\perp DE$, $A_1B\cap BE=B$, ………………………………………………………………… 3 分

所以 $DE\perp$ 平面 A_1BE. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)解:取 BE 的中点 O,连接 A_1O, CO,

易知 $A_1O\perp BE$, $CO\perp BE$,



由 $BE=\sqrt{2}CE$, $CE=\sqrt{2}CD$,可知 $BE=2CD$, $OE=CD$, ………

……………………………………………………………… 5 分

由 $DE\perp BE$ 且 $CD\perp DE$,可知 $OE/\!/CD$,四边形 $OCDE$ 为平行四边形,$CO/\!/DE$, $CO\perp$ 平面 A_1BE, …………………………………………………………… 6 分

设 $BE=2$,以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系,则 $A_1(0,0,1)$, $E(-1,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(-1,1,0)$, $\overrightarrow{EA_1}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{EC}=(1,1,0)$. ………

……………………………………………………………………………………………… 7 分

设平面 A_1EC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{EA_1}\cdot\boldsymbol{n}=x+z=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=x+y=0,\end{cases}$ ……………………… 8 分

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$, ……………………………………………………………… 9 分

平面 A_1ED 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$, ……………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, ………………………………………………………… 11 分

由图可知二面角 $C-A_1E-D$ 为锐角,故二面角 $C-A_1E-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……… 12 分

20. 解:(1)由 $\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$,得 $a_nb_n=n^2+1$, ……………………………………………… 1 分

由 $\frac{1}{a_n-b_n}=b_n$,得 $a_nb_n=1+b_n^2$, …………………………………………………………… 2 分

两式相减得 $b_n^2=n^2$,因为 $\{b_n\}$ 是正项数列,所以 $b_n=n$, ……………………………… 4 分

所以 $a_n=\frac{n^2+1}{b_n}=n+\frac{1}{n}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2) $[a_n+a_{n+1}]=[n+\frac{1}{n}+n+1+\frac{1}{n+1}]=[2n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]=\begin{cases}4,n=1,\\2n+1,n\geqslant 2,\end{cases}$ ……… 6 分

则当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n+1)\times 2^n$，…… 7 分

所以 $2S_n=16+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n+1)\times 2^{n+1}$，…… 8 分

两式相减得 $-S_n=12+2\times(2^3+2^4+\cdots+2^n)-(2n+1)\times 2^{n+1}$ …… 9 分

$=12+2\times\frac{2^3-2^n\times 2}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n+1}=(1-2n)\times 2^{n+1}-4$，…… 10 分

即 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. …… 11 分

因为 $S_1=8$ 满足 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$，所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+4$. …… 12 分

21. 解：(1) 依题意可得 $a=2$. …… 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时，l 的方程为 $x=-4\sqrt{2}y+6$，…… 2 分

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得 $(8b^2+1)y^2-12\sqrt{2}b^2y+8b^2=0$，…… 3 分

$\Delta=(-12\sqrt{2}b^2)^2-4(8b^2+1)\times 8b^2=32b^2(b^2-1)=0$，…… 4 分

解得 $b^2=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 5 分

(2)(i) 依题意可得直线 l 的斜率不为 0，可设 $l:x=my+6$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$，

则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{12m}{m^2+4},\\y_1y_2=\frac{32}{m^2+4},\end{cases}$ …… 6 分

则 $k_{BP}k_{BQ}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$

$=\frac{\frac{32}{m^2+4}}{\frac{32m^2}{m^2+4}-\frac{48m^2}{m^2+4}+16}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$. …… 8 分

(ii) 因为 $k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{1-\frac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\frac{1}{4}$，…… 9 分

所以 $k_{AP}=-\frac{1}{2}k_{BQ}$，又因为 $k_{AP}+k_{BQ}=-\frac{1}{2}$，所以 $k_{BQ}=-1$，…… 10 分

则直线 BQ 的方程为 $y=-x+2$. 与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $Q(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$. …… 11 分

所以 l 的方程为 $y=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-6}(x-6)$，即 $y=-\frac{1}{6}x+1$. …… 12 分

22. (1)解：因为 $f'(x)=e^{x-1}-x+1-\frac{m}{x}$，所以 $f'(1)=1-m$，…… 1分

又 $f(1)=\frac{3}{2}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=(1-m)(x-1)$，

即 $y=(1-m)x+m+\frac{1}{2}$. …… 3分

(2)证明：(i)依题意可知 $f'(x)$ 有零点，即 $m=x(e^{x-1}-x+1)$ 有正数解. …… 4分

令 $\varphi(x)=e^{x-1}-x+1$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}-1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增. …… 5分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=1>0$，所以 $m>0$. …… 6分

(ii)不妨设 $x_1>x_2>0$. 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可得 $m=\frac{e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-e^{x_2-1}+\frac{1}{2}x_2^2-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，…… 7分

因为 $x_1>x_2$，所以 $\ln x_1>\ln x_2$，

要证 $2m>e(\ln x_1+\ln x_2)$，

只要证 $e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-\frac{e}{2}(\ln x_1)^2>e^{x_2-1}-\frac{1}{2}x_2^2+x_2-\frac{e}{2}(\ln x_2)^2$. …… 8分

令 $g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{e}{2}(\ln x)^2$，即只要证 $g(x_1)>g(x_2)$，

即只要证 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 9分

即只要证 $g'(x)=e^{x-1}-x+1-e\frac{\ln x}{x}\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即只要证 $e^{x-1}-x+1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. …… 10分

令 $h(x)=\frac{e\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(e)=1$. …… 11分

由(i)知，$\varphi(x)=e^{x-1}-x+1\geqslant1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $e^{x-1}-x+1\geqslant1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $2m>e(\ln x_1+\ln x_2)$. …… 12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。