# 2023 年“三新”协同教研共同体高三联考
# 数学试卷参考答案

1. B 【解析】本题考查复数的运算与复数的实部，考查数学运算的核心素养.
因为 $z_2=3+2i$，所以 $z_1+z_2=5-i$，所以 $z_1+z_2$ 的实部为 5.

2. C 【解析】本题考查抛物线的准线方程，考查数学运算的核心素养.
因为 $2p=\frac{1}{3}$，所以 $p=\frac{1}{6}$，所以抛物线 $y^2=\frac{1}{3}x$ 的准线方程为 $x=-\frac{1}{12}$.

3. A 【解析】本题考查函数的奇偶性与函数求值，考查数学运算的核心素养.
因为 $g(-10)+1=f(-10)=-f(10)=-(100+1)=-101$，所以 $g(-10)=-102$.

4. C 【解析】本题考查圆台体积的实际应用，考查直观想象与数学运算的核心素养.
当杯中盛满溶液时，溶液的体积 $V=\frac{\pi}{3}\times10\times(4^2+4\times5+5^2)=\frac{610\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$，此时杯中溶液的质量 $m=\rho V=\frac{610\pi}{3}$ g.

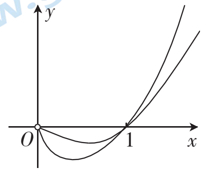
5. B 【解析】本题考查排列组合的实际应用，考查应用意识.
分三步，先分 1 个给老师，共有 $C_6^1$ 种分法，再把剩余的 5 个分成 3 组，共有 $\frac{C_5^3C_2^1+C_5^2C_3^1}{A_2^2}$ 种分组方法，最后将分好组的吉祥物分给 3 位学生，共有 $A_3^3$ 种分法，故这 6 个生肖吉祥物的分配方法共有 $C_6^1\cdot\frac{C_5^3C_2^1+C_5^2C_3^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=900$ 种.

6. D 【解析】本题考查平面向量的数量积与模，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.
因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，整理得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4$，所以 $\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=4$，即 $|\boldsymbol{b}|=2$. 又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，所以当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$|\boldsymbol{a}|$ 取得最大值，且最大值为 $2+2=4$.

7. D 【解析】本题考查三角恒等变换与三角函数的图象及其性质，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.
$f(x)=2\sin 2x$，$g(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. 当 $f(x)$ 取得最大值时，$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $g(x)=1$，A 错误.
当 $g(x)$ 取得最大值时，$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$f(x)=1$，B 错误.
因为 $f(\frac{2\pi}{3}-x)=2\sin(\frac{4\pi}{3}-2x)=2\sin[\pi-(2x-\frac{\pi}{3})]=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})=g(x)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，C 错误，D 正确.

8. B 【解析】本题考查函数的零点与导数的应用，考查直观想象与逻辑推理的核心素养以及化归与转化的数学思想.
令 $f(x)=(x\ln x-m)(x^2\ln x-m)=0$，得 $x\ln x=m$ 或 $x^2\ln x=m$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$. 当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$. 当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to 0$.




设函数 $h(x)=x^2\ln x$，则 $h'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{\sqrt{e}})=-\frac{1}{2e}$. 当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$.

作出 $g(x)=x\ln x$ 与 $h(x)=x^2\ln x$ 的大致图象，如图所示. 由图可知，当 $-\frac{1}{2e}<m<0$ 时，直线 $y=m$ 与这两个函数的图象各有两个交点，且这些交点各不相同，此时 $f(x)$ 恰有 4 个零点.

9. ABD 【解析】本题考查统计的图表、极差、中位数、百分位数，考查数据处理能力.

由图可知，A 正确. 将江西省 2017 年到 2022 年这 6 年的常住人口(单位:万)按照从小到大的顺序排列为 4517.40，4518.86，4527.98，4622.10，4647.60，4666.10，则极差为 $4666.10-4517.40=148.70$ 万，中位数为 $\frac{4527.98+4622.10}{2}=4575.04$ 万，B 正确，C 错误. 因为 $6\times 0.8=4.8$，所以第 80 百分位数为 4647.60 万，D 正确.

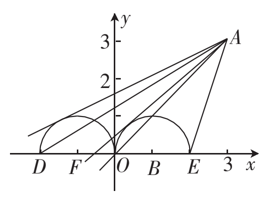
10. ACD 【解析】本题考查等差数列的性质与基本不等式，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $a_3+a_4+a_8=3a_5=15$，所以 $a_5=5$，则 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 $9a_5=45$，A 正确，B 错误. 因为 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$，所以 $a_2a_8\leqslant(\frac{a_2+a_8}{2})^2=(a_5)^2=25$，当且仅当 $a_2=a_8=5$ 时，等号成立，C 正确.

因为 $a_2+a_8=2a_5=10$，$a_2a_8>0$，所以 $a_2>0$，$a_8>0$，所以 $\frac{1}{10}(\frac{1}{a_2}+\frac{4}{a_8})(a_2+a_8)=\frac{1}{10}(5+\frac{a_8}{a_2}+\frac{4a_2}{a_8})\geqslant\frac{1}{10}(5+4)=\frac{9}{10}$，当且仅当 $\frac{a_8}{a_2}=\frac{4a_2}{a_8}$，即 $a_8=2a_2=\frac{20}{3}$ 时，等号成立，D 正确.

11. BC 【解析】本题考查直线与圆的位置关系，考查直观想象与数学运算的核心素养.

由 $y=\sqrt{1-(|x|-1)^2}$，得 $(|x|-1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，则曲线 $C$ 表示两个关于 $y$ 轴对称的半圆弧(半径为 1)，且左半圆的圆心为 $F(-1,0)$，右半圆的圆心为 $B(1,0)$，曲线 $C$ 与 $x$ 轴的交点为 $D(-2,0)$，$O(0,0)$，$E(2,0)$.

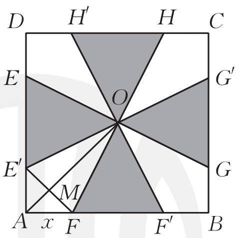


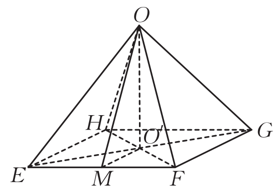

故曲线 $C$ 的周长为 $2\pi$，A 错误. 若直线 $l:y=k(x-3)+3$ 与左半圆相切，则 $\frac{|-4k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{12\pm 2\sqrt{6}}{15}$，由图可知 $k=\frac{12-2\sqrt{6}}{15}$. 若直线 $l:y=k(x-3)+3$ 与右半圆相切，则 $\frac{|-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=$

$\frac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$,由图可知 $k=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$. 若直线 $l:y=k(x-3)+3$ 经过点 $D$,则 $k=\frac{3}{5}$. 若直线 $l:y=k(x-3)+3$ 经过点 $O$,则 $k=1$. 若直线 $l:y=k(x-3)+3$ 经过点 $E$,则 $k=3$. 若 $l$ 与 $C$ 恰有 1 个公共点,则 $k$ 的取值范围为 $(\frac{3}{5},\frac{6-2\sqrt{3}}{3})\cup(1,3]\cup\{\frac{12-2\sqrt{6}}{15}\}$,D 错误. 若 $l$ 与 $C$ 恰有 2 个公共点,则 $k$ 的取值范围为 $(\frac{12-2\sqrt{6}}{15},\frac{3}{5}]\cup\{1,\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\}$,C 正确. 若 $l$ 与 $C$ 恰有 3 个公共点,则 $k$ 的取值范围为 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{3},1)$,B 正确.

12. BC 【**解析**】**本题考查立体几何中的翻折问题与四棱锥的内切球,考查空间想象能力与运算求解能力.**

设翻折前 $AE'=x(0<x<2)$,则翻折后 $EF=\sqrt{2}x$,斜高 $OM=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x$,




该四棱锥的高 $OO'=\sqrt{OM^2-O'M^2}=\sqrt{8-4x}$,

则 $V_{O-EFGH}=\frac{1}{3}OO'\cdot S_{四边形EFGH}=\frac{1}{3}\times\sqrt{8-4x}\times2x^2=\frac{4x^2}{3}\sqrt{2-x}$.

该四棱锥的表面积 $S=S_{正方形ABCD}-4S_{\triangle OFF'}=16-4\times\frac{1}{2}\times2\times(4-2x)=8x$.

因为该正四棱锥的内切球半径为 $\frac{1}{2}$,所以 $\frac{3V_{O-EFGH}}{S}=\frac{1}{2}$,即 $x\cdot\sqrt{2-x}=1$,

则 $x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)=0$,解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$(负根舍去),

故 $S=8$ 或 $4+4\sqrt{5}$.

13. 6 【**解析**】**本题考查集合的交集与一元二次不等式的解法,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

因为 $A=\{x|-4\leqslant x\leqslant6\}$,$m^2\geqslant0$,所以 $m^2\geqslant6$,所以 $m^2$ 的最小值为 6.

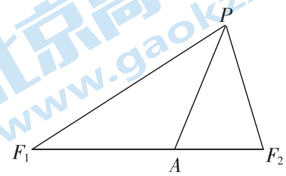
14. 20 【**解析**】**本题考查二项分布的期望与方差,考查数学运算的核心素养.**

因为 $X\sim B(100,p)$,所以 $D(X)=100p(1-p)=16$,解得 $p=\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$,因为 $0<p<\frac{1}{2}$,所以 $p=\frac{1}{5}$,所以 $E(X)=100p=20$.

15. $xe^x$(答案不唯一,形如 $xa^x(a>1)$ 均可) 【**解析**】**本题以开放题的形式考查函数的解析式与性质,考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.**

因为 $a^x\cdot a^{-x}=1$,$f(x)\cdot f(-x)=-x^2$,所以可设 $f(x)=xa^x$,则 $y=\frac{f(x)}{x}=a^x$. 因为函数 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $a>1$,所以 $f(x)=xa^x(a>1)$ 满足这两个条件.

16. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **【解析】本题考查双曲线的离心率,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.**




如图,在线段 $F_1F_2$ 上取一点 $A$,使得 $|PA|=|PF_2|$. 因为 $|PF_1|=|F_1F_2|$, $\angle PF_1F_2=36^\circ$,所以 $\angle PF_2F_1=\angle F_1PF_2=\angle PAF_2=72^\circ$,所以 $\angle APF_1=72^\circ-36^\circ=36^\circ$,所以 $|PA|=|AF_1|=|PF_2|$.

易知 $\triangle F_1PF_2$ 与 $\triangle PAF_2$ 相似,则 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{|AF_2|}{|AP|}=\frac{|AF_2|}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|PF_2|}$. 设 $|PF_1|=x$, $|PF_2|=y$,则有 $\frac{y}{x}=\frac{x-y}{y}$,则 $\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}-1=0$,解得 $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (负根舍去),所以 $C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{x}{x-y}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-1}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

17. 解:(1)在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$, ………………………… 2 分

则 $CD=\frac{BD\sin\angle CBD}{\sin\angle BCD}=\frac{5\sin 60^\circ}{\frac{1}{4}}=10\sqrt{3}$. ………………………………………… 4 分

(2)因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle ADB=\angle CBD=60^\circ$. ……………………………………… 5 分

由余弦定理得 $AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cdot\cos\angle ADB=19$, ………………………… 7 分

则 $AB=\sqrt{19}$, ……………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$. ………………………………………… 10 分

18. (1)证明:在正方形 $ABCD$ 中,$CD=AB=3$.

因为 $CD^2+PD^2=PC^2$,所以 $CD\perp PD$. ……………………………………………………… 1 分

在正方形 $ABCD$ 中,$CD\perp AD$. ……………………………………………………………… 2 分

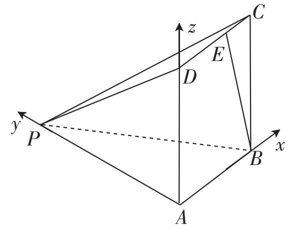
因为 $PD\cap AD=D$,所以 $CD\perp$ 平面 $PAD$. ………………………………………………… 3 分

又 $CD\subset$ 平面 $PCD$,所以平面 $PCD\perp$ 平面 $PAD$. ………………………………………… 4 分

(2)解:由(1)知 $CD\perp$ 平面 $PAD$,则 $CD\perp PA$,则 $AB\perp PA$. …………………………… 5 分

因为 $AD\perp PA$, $AD\perp AB$, $AB\cap PA=A$,所以 $AD\perp$ 平面 $PAB$. ……………………… 6 分

以 $A$ 为坐标原点,$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 $x$, $y$, $z$ 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,




则 $P(0,\sqrt{7},0)$, $B(3,0,0)$, $E(2,0,3)$, $C(3,0,3)$, $D(0,0,3)$. …………………………………………………………………………… 7 分

设平面 $PCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$, $\overrightarrow{PD}=(0,-\sqrt{7},3)$, ………………………………………………………………………………… 8 分

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=3x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=-\sqrt{7}y+3z=0,\end{cases}$ ………………………………………………… 9 分

令 $z=\sqrt{7}$，得 $\boldsymbol{m}=(0,3,\sqrt{7})$. ……………………………………………………… 10 分

因为$\overrightarrow{BE}=(-1,0,3)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{3\sqrt{7}}{4\times\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{70}}{40}$，…………… 11 分

所以直线 $BE$ 与平面 $PCD$ 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{70}}{40}$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1)由表可知该地居民中青少年寒假去庐山旅游的概率为 $0.1+0.05=0.15$，…… 1 分

该地居民中中年人寒假去庐山旅游的概率为 $0.3+0.1=0.4$，………………………… 2 分

该地居民中老年人寒假去庐山旅游的概率为 $0.2+0.1=0.3$，………………………… 3 分

所以根据全概率公式可得，此人寒假去庐山旅游的概率为 $0.15\times\frac{3}{3+4+3}+0.4\times\frac{4}{3+4+3}$ $+0.3\times\frac{3}{3+4+3}=0.295$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)由表可知该地居民中中年人、老年人寒假去三清山旅游的概率分别为 $0.2+0.1$，$0.3+0.1$，即 $0.3$，$0.4$. ………………………………………………………………………… 8 分

$X$ 的可能取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=(1-0.3)\times(1-0.4)=0.42$，………………………………………………… 9 分

$P(X=1)=0.3\times(1-0.4)+0.4\times(1-0.3)=0.46$，……………………………… 10 分

$P(X=2)=0.3\times0.4=0.12$，…………………………………………………………… 11 分

则 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.42 | 0.46 | 0.12 |

……………………………………………………………………………………………… 12 分

【注】第(1)问中，得到所求概率为 $0.15\times\frac{3}{3+4+3}+0.4\times\frac{4}{3+4+3}+0.3\times\frac{3}{3+4+3}$，但最后的结果计算错误，扣 1 分.

20. (1)证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，线段 $A_nA_{n+1}$ 的中点为 $B_{n+2}$，$B_{n+2}(\frac{a_n+a_{n+1}}{2},\frac{b_n+b_{n+1}}{2})$，

则 $A_{n+2}(\frac{b_n+b_{n+1}}{2},\frac{a_n+a_{n+1}}{2})$. ……………………………………………………… 1 分

由$\begin{cases}a_{n+2}=\frac{b_n+b_{n+1}}{2},\\ b_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2},\end{cases}$ ……………………………………………………………… 2 分

得 $a_{n+2}+b_{n+2}=\frac{a_n+b_n+a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$，……………………………………………… 3 分

所以 $a_{n+2}+b_{n+2}-a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n}{2}$，即 $c_{n+1}=-\frac{1}{2}c_n$. ………… 4 分

因为 $c_1=a_2+b_2-a_1-b_1=2$，所以 $\{c_n\}$ 是以 2 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ……… 5 分

(2)解：由(1)知 $c_n=2\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，……………………………………………………… 6 分

即 $a_{n+1}+b_{n+1}-a_n-b_n=2\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，

则 $a_2+b_2-a_1-b_1=2\times(-\frac{1}{2})^0$，$a_3+b_3-a_2-b_2=2\times(-\frac{1}{2})^1$，…，$a_n+b_n-a_{n-1}-b_{n-1}=2\times(-\frac{1}{2})^{n-2}(n\geqslant 2)$，……………………………………………………………………… 8 分

将以上各式相加得 $a_n+b_n-(a_1+b_1)=2[(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-2}]=2\times\dfrac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$. ……………………………………………… 10 分

因为 $a_1+b_1=3$，所以 $a_n+b_n=\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$. …………………………………… 11 分

当 $n=1$ 时，$a_1+b_1=3$ 也符合上式，故 $a_n+b_n=\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$. ………………… 12 分

21. 解：(1)设 $P(x,y)$，则 $E(x,0)$，$F(x,-\frac{x^2}{4})$，……………………………………………… 1 分

则 $|PE|=|y|$，$|EF|=|-\frac{x^2}{4}|=\frac{x^2}{4}$. …………………………………………………………… 2 分

因为 $|PE|^2+|EF|=1$，所以 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以 $C$ 为椭圆. ……………………………………………………………………………………… 3 分

(2)由题可知切线的斜率存在，设切线方程为 $y=kx-1$，圆 $Q:(x-1)^2+y^2=r^2(0<r<1)$，

则 $\frac{|k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，

整理得 $(1-r^2)k^2-2k+1-r^2=0$. ……………………………………………………………… 4 分

设切线 $BM$，$BN$ 的斜率分别为 $k_1$，$k_2(k_1\neq k_2)$，则 $k_1$，$k_2$ 是上述方程的两根，由韦达定理得 $k_1k_2=1$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases} y=k_1x-1, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(1+4k_1^2)x^2-8k_1x=0$. ………………… 6 分

因为 $x_1\neq 0$，所以 $x_1=\frac{8k_1}{1+4k_1^2}$，$y_1=\frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2}$. …………………………………………… 7 分

同理可得 $x_2=\frac{8k_2}{1+4k_2^2}$，$y_2=\frac{4k_2^2-1}{1+4k_2^2}$. 因为 $k_1k_2=1$，所以 $x_2=\frac{8k_1}{k_1^2+4}$，$y_2=\frac{4-k_1^2}{k_1^2+4}$，……… 8 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{\frac{4-k_1^2}{k_1^2+4}-\frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2}}{\frac{8k_1}{k_1^2+4}-\frac{8k_1}{1+4k_1^2}}=\dfrac{8-8k_1^4}{24k_1^3-24k_1}=-\dfrac{k_1^2+1}{3k_1}$，………………………………… 9 分

所以直线 $MN$ 的方程为 $y-\frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2}=-\frac{k_1^2+1}{3k_1}(x-\frac{8k_1}{1+4k_1^2})$， ………………………… 10 分

即 $y=-\frac{k_1^2+1}{3k_1}(x-\frac{8k_1}{1+4k_1^2})+\frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2}$，整理得 $y=-\frac{k_1^2+1}{3k_1}\cdot x+\frac{5}{3}$. ………………… 11 分

令 $x=0$，得 $y=\frac{5}{3}$，故存在定点 $G(0,\frac{5}{3})$满足题意. ………………………………… 12 分

22.(1)解：$f'(x)=m(1+x)^{m-1}-m=m[(1+x)^{m-1}-1]$. 由 $x>-1$，得 $x+1>0$.

$f'(0)=0$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

当 $0<m<1$ 时，$m-1<0$，$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减，若 $x\in(-1,0)$，则 $f'(x)>0$，若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………………… 2 分

当 $m>1$ 时，$m-1>0$，$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，若 $x\in(-1,0)$，则 $f'(x)<0$，若 $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………………… 3 分

(2)解：$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin x\in(0,1)$，$1+\cos^2x>1$.

当 $a\leqslant 1$ 时，$a\sin x<1$，$(1+\cos^2x)^{\sin x}>1$，所以 $a\leqslant 1$ 满足题意. ……………………… 4 分

当 $a>1$ 时，由(1)知当 $0<m<1$ 时，$f(x)\leqslant f(0)=0$，即$(1+x)^m\leqslant 1+mx$，则$(1+\cos^2x)^{\sin x}<1+\sin x\cos^2x$，…………………………………………………………………………… 5 分

所以 $a\sin x<1+\sin x\cos^2x$，即 $a<\frac{1+\sin x\cos^2x}{\sin x}=1+\frac{1}{\sin x}-\sin^2x$.

令 $t=\sin x\in(0,1)$，$g(t)=1+\frac{1}{t}-t^2$，……………………………………………………… 6 分

则 $g(t)$为减函数，则 $a\leqslant g(1)=1$，这与 $a>1$ 矛盾，所以 $a>1$ 不满足题意. ………… 7 分

综上，$a$ 的取值范围是$(-\infty,1]$. ……………………………………………………………… 8 分

(3)证明：$\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}=\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{3}}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{n}}}{1-\sin x}$.

当 $m\in(0,1)$时，$(1+k)^m\leqslant 1+mk(k>-1)$，设 $k=\sin x-1$. ……………………………… 9 分

因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $k\in(-1,0)$，所以 $1-(\sin x)^m>m(1-\sin x)$. …… 10 分

令 $m=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$，得 $1-(\sin x)^{\frac{1}{n}}>\frac{1}{n}(1-\sin x)$. ……………………………… 11 分

故$\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{1-\sin x}\cdot\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{3}}}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{1-(\sin x)^{\frac{1}{n}}}{1-\sin x}>\frac{\frac{1}{2}(1-\sin x)}{1-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{3}(1-\sin x)}{1-\sin x}\cdot\cdots\cdot\frac{\frac{1}{n}(1-\sin x)}{1-\sin x}=\frac{1}{n!}$，

即$\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}>\frac{1}{n!}$. ………………………………… 12 分