2022届高三考试
数学试题(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：小题考查集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角函数与解三角形，平面向量，大题考查同高考。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid \ln x<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 P，且点 P 位于第四象限，点 P 到 y 轴的距离为 $\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{7}{5}$

3. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$2\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{3}$；命题 q：若 $a>b>0$，且 $c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$. 现有下列四个命题：

①$p\vee q$；②$(\neg p)\wedge q$；③$(\neg p)\wedge(\neg q)$；④$p\wedge(\neg q)$.

其中，真命题是

A. ①②　　B. ①④　　C. ②③　　D. ③④

4. 已知 $k\in\mathbf{Z}$，则“$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$”是“函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 为偶函数”的

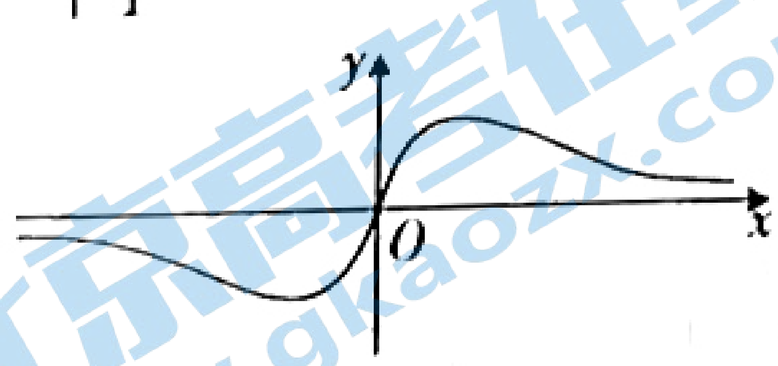
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

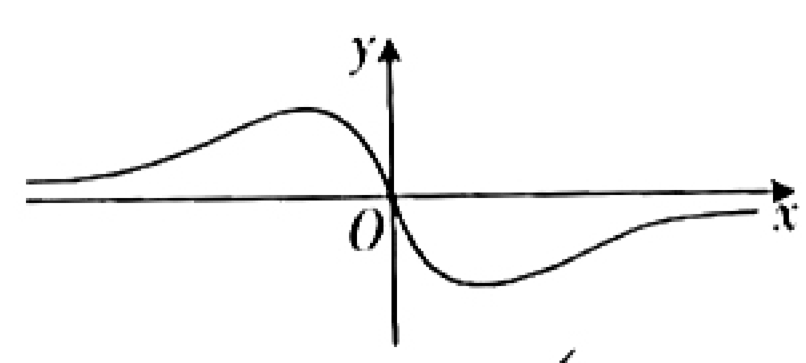
5. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. 4　　B. $\sqrt{41}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 5

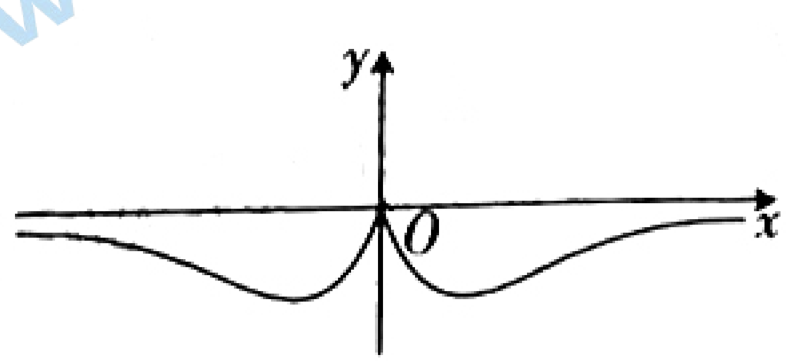
6. 函数 $f(x)=\frac{\sin x-x}{x^2+1}$ 的图象大致为



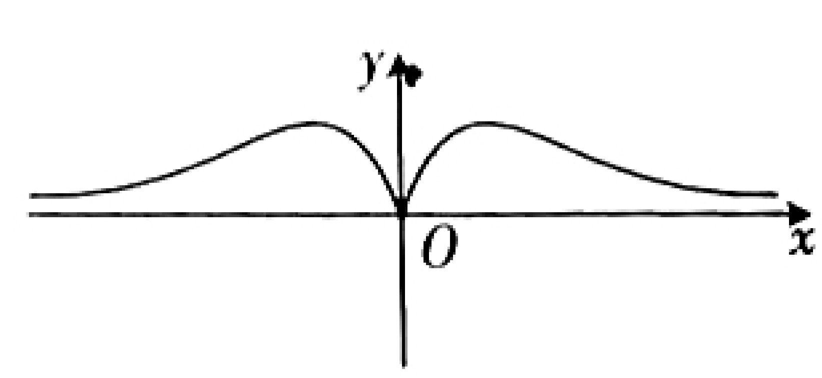
A



B



C



D

7. 将函数 $y=\cos 2x$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{8},0)$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{8}$ 对称

D. $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

8. 已知 a 是函数 $f(x)=\ln x+x^2-2$ 的零点，则 $e^{a-1}+a-5$ 的值为

A. 正数　　B. 0　　C. 负数　　D. 无法判断

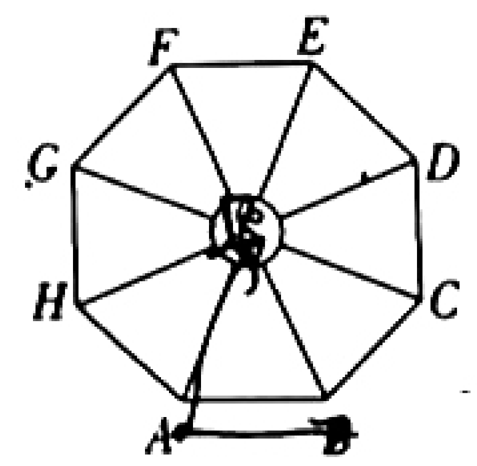
9. 已知 a,b,c 是不等于 1 的正实数，且 $ab\neq 1$，若 $\log_{ab}c=\log_a c\cdot\log_b c$，则 $\log_a c+\log_b c=$

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\log_{ab}c$

10. 设 $a\in\mathbf{R}$，若"$x>1$"是"$ax>\ln x$"的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,+\infty)$　　B. $(\frac{1}{e},+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

11.《易经》是阐述天地世间关于万象变化的古老经典，如图所示的是《易经》中记载的几何图形——八卦图. 图中正八边形代表八卦，中间的圆代表阴阳太极图，其余八块面积相等的图形代表八卦田. 已知正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长为 2，P 是正八边形 $ABCDEFGH$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是



A. $(4-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　B. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

C. $(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$　　D. $(-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$

12. 已知 $a=e^{0.05}$，$b=\frac{\ln 1.1}{2}+1$，$c=\sqrt{1.1}$，则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=$ ▲ .

14. 曲线 $y=\frac{3x+1}{x-1}$ 在点 $(-1,1)$ 处的切线方程为 ▲ .

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(4+x)+f(-x)=0$，当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=2^x$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2022)=$ ▲ .

16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，A 为钝角，且 $a\cos B-b\cos A=\frac{5}{3}c$，则 $\tan C$ 的最大值是 ▲ .

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

中国射击队在东京奥运会上共夺得 4 金 1 银 6 铜 11 枚奖牌的成绩，创下了中国射击队奥运参赛史上奖牌数最多的新纪录. 现从某射击训练基地随机抽取了 20 名学员(男女各 10 人)的射击环数，数据如下表所示：

男生	8	9	7	9	7	6	10	10	8	6
女生	10	9	8	6	8	7	9	7	8	8

若射击环数大于或等于 9 环，则认为成绩优异；否则认为成绩不优异.

(1)分别计算男生、女生射击环数的平均数和方差；

(2)完成 2×2 列联表，并判断是否有 90%的把握认为“成绩优异”与性别有关.

	男生	女生	总计
成绩优异			
成绩不优异			
总计			

参考公式和数据：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.010
k	2.706	3.841	6.635

18.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且$a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{a_n}$.

(1)证明：数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$为等差数列. $a_n=\frac{4+1}{2}$

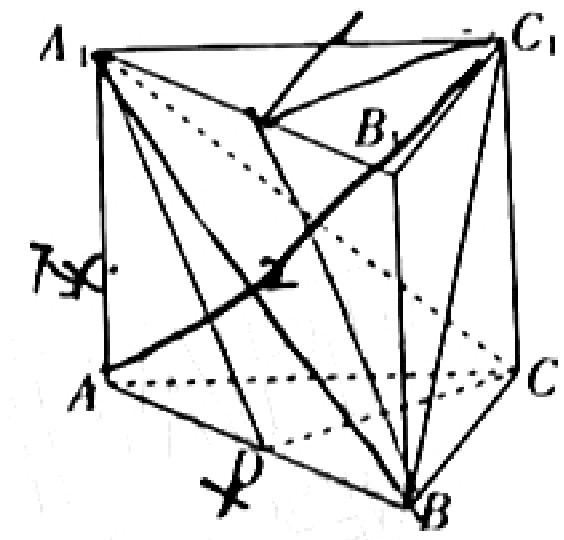
(2)已知$b_n=\lg a_n$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，若$S_m>2$，求整数m的最小值.

19.（12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 AB 的中点.

（1）证明：BC_1 // 平面 A_1CD.

（2）已知 $AA_1=\sqrt{3}AB$，求二面角 $A-BC_1-C$ 的余弦值.



20.（12 分）

已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 Γ 的方程.

（2）过椭圆 Γ 的左焦点 F_1 的直线 l 交椭圆 Γ 于 A，B 两点，若在直线 $x=-2$ 上存在点 C，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形，求点 C 的坐标.

21.（12 分）

已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\ln(a+x)+\dfrac{e^x}{1+x}+\dfrac{x^2}{2}-ax$ 的一个极值点.

（1）求 a 的值.

（2）证明：$f(x)\geqslant 1$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $(3+\sin^2\theta)\rho^2=12$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta+14=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-1|-|x+2|$.

（1）求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集.

（2）证明：对一切正数 a，b，均有 $\dfrac{f(x)}{6}\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

2022届高三考试
数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

因为 $B=\{x|0<x<e\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

设 $z=a+bi$,则 $\bar{z}=a-bi$. 又 $z+2\bar{z}=3a-bi=3+4i$,

所以 $\begin{cases}3a=3,\\-b=4,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-4$,故 $z=1-4i$.

3. B 【解析】本题考查圆锥的直观图,考查空间想象能力.

因为轴截面为等边三角形,所以母线长 l 等于圆锥底面截面的直径,则 $l=2r$. 又圆锥表面积 $S=\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2=3\pi$,所以 $r=1$.

4. A 【解析】本题考查随机事件,考查数学抽象的核心素养.

由题意,$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$,所以事件 A 与 B 是独立事件. 因为事件 A 与 B 包含一个共同事件:出现5点,所以事件 A 与事件 B 不互斥. 故选A.

5. C 【解析】本题考查二项式定理,考查运算求解能力.

因为 $(1+\sqrt[3]{x})^5$ 展开式中 x 项的系数为 C_5^3,$(1+\sqrt{y})^6$ 展开式中 y 项的系数为 C_6^2,所以 xy 的系数为 $C_5^3C_6^2=150$.

6. D 【解析】本题考查线性规划,考查数形结合的数学思想.

作出约束条件 $\begin{cases}x\geqslant1,\\y\geqslant1,\\x+y\leqslant5\end{cases}$ 所表示的可行域(图略)可知,当直线 $z=2x-y$ 经过点 $(1,4)$ 时,z 取得最小值,且最小值为 -2.

7. A 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.

若函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 为偶函数,则 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$,所以“$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$”是“函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 为偶函数”的充分不必要条件.

8. B 【解析】本题考查函数的图象,考查数形结合的数学思想.

函数的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=\frac{\sin(-x)+x}{(-x)^2+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称,所以排除C,D. 因为当 $x>0$ 时,$\sin x<x$,即 $f(x)<0$,所以排除A. 故选B.

9. D 【解析】本题考查双曲线的性质,考查运算求解能力.

易知双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$,所以点 P 位于第一象限. 设 $|PF_2|=m$,$|PF_1|=m+2$,所以

$\cos\angle PF_2F_1=\frac{m^2+(2\sqrt{2})^2-(m+2)^2}{2\times2\sqrt{2}m}=\frac{1}{2}$,解得 $m=2-\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times(2-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

10. A 【解析】本题考查四面体的结构特征,考查空间想象能力.

由题可知 $AB\perp$ 平面 MCD,所以 $AB\perp PM$,则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PM=1$. 又 $AB=2$,所以 $PM=1$. 在 $\triangle MCD$ 中,$MC=MD=\sqrt{3}$,$CD=2$,则 CD 边上的高为 $\sqrt{2}$,所以点 P 到 CD 距离的最小值为 $\sqrt{2}-1$.

11. D 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查运算求解能力.

易知每个三角形的顶角为$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$,$\overrightarrow{AB}$的模为 2,根据正八边形的特征,可以得到$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的取值范围是$(-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$,结合向量数量积的定义式,可知$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$等于$\overrightarrow{AB}$的模与$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的乘积,所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是$(-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$.

12. D 【解析】本题考查指数、对数比较大小,考查逻辑推理的核心素养.

易证当 $x>0$ 时,$e^x>x+1$,所以 $e^{\frac{x}{2}}>\sqrt{x+1}$,令 $x=0.1$,则 $e^{0.05}>\sqrt{1.1}$,所以 $a>c$. 易证当 $x>0$ 时,$\ln x\leqslant x-1$(当且仅当 $x=1$ 时取等号),则 $\ln\sqrt{x}+1\leqslant\sqrt{x}$,即$\frac{\ln x}{2}+1\leqslant\sqrt{x}$,令 $x=1.1$,则$\frac{\ln 1.1}{2}+1<\sqrt{1.1}$,所以 $b<c$. 综上,$a>c>b$.

13. $-\frac{7}{2}$ 【解析】本题主要考查二倍角公式,两角和的余弦公式,考查运算求解能力.

因为 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$,则 $\cos 2\alpha=1-2\times(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{8}$,故$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{7}{8}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{7}{2}$.

14. 1 【解析】本题考查抛物线的性质,考查运算求解能力.

因为 $A(x_0,y_0)$是 C 上一点,$|AF|=\frac{5}{4}x_0$,$x_0>0$,所以$\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{p}{2}$,则 $x_0=2p$.

又$|OA|^2=x_0^2+y_0^2=x_0^2+2px_0=4p^2+4p^2=8$,且 $p>0$,所以 $p=1$.

15. $-\frac{1}{2}$ 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理的核心素养.

由题可知 $f(4+x)=-f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$的周期为 4,又 $f(-1)=\frac{1}{2}$,$f(0)=0$,$f(1)=-\frac{1}{2}$,$f(2)=0$,$f(3)=\frac{1}{2}$,$f(4)=0$,所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2022)=505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=-\frac{1}{2}$.

16. $\frac{3}{4}$ 【解析】本题考查解三角形,考查运算求解能力.

因为 $a\cos B-b\cos A=\frac{5}{3}c$,所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{5}{3}\sin C=\frac{5}{3}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$,则 $\sin A\cos B=-4\sin B\cos A$,即$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=-4$,故$\frac{\tan A}{\tan B}=-4$,则 $\tan A=-4\tan(A+C)$,$\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=-\frac{\tan A}{4}$,$\tan C=-\frac{3\tan A}{4+\tan^2 A}=-\frac{3}{\tan A+\frac{4}{\tan A}}\leqslant\frac{3}{4}$,当且仅当 $\tan A=-2$ 时取等号.

17. 解:(1)根据题中所给数据,得男生射击环数的平均数为$\overline{x}_{男}=\frac{1}{10}(8+9+7+9+7+6+10+10+8+6)=8$; …………………………………………………… 1 分

女生射击环数的平均数为$\overline{x}_{女}=\frac{1}{10}(10+9+8+6+8+7+9+7+8+8)=8$. ……………………………… 2 分

男生射击环数的方差为 $s_{男}^2=\frac{1}{10}[(8-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(6-8)^2]=2$; ……………………………… 4 分

女生射击环数的方差为 $s_{女}^2=\frac{1}{10}[(10-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(8-8)^2]=\frac{6}{5}$.

故男生射击环数的平均数为 8,方差为 2,女生射击环数的平均数为 8,方差为$\frac{6}{5}$. ……………………… 6 分

(2)2×2 列联表如下：

	男生	女生	总计
成绩优异	4	3	7
成绩不优异	6	7	13
总计	10	10	20

…………………………………………………………………… 8 分

所以 $K^2=\dfrac{20\times(4\times7-3\times6)^2}{7\times13\times10\times10}\approx0.2198<2.706$. …………………… 10 分

所以没有 90%的把握认为“成绩优异”与性别有关. …………………… 12 分

18. (1)证明：$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2a_n-1}{a_n}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_n-1}{a_n-1}=1$, …………………… 4 分

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$为等差数列. …………………… 5 分

(2)解：由(1)知$\dfrac{1}{a_n-1}=1+(n-1)=n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{n}+1=\dfrac{n+1}{n}$， …………………… 7 分

则 $b_n=\lg\dfrac{n+1}{n}$，故 $S_n=\lg(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+1}{n})=\lg(n+1)$. …………………… 10 分

又 $S_m>2$，所以 $\lg(m+1)>2$，解得 $m>99$，故整数 m 的最小值为 100. …………………… 12 分

19. (1)证明：连接 AC_1，设 $A_1C\cap AC_1=O$，连接 OD.

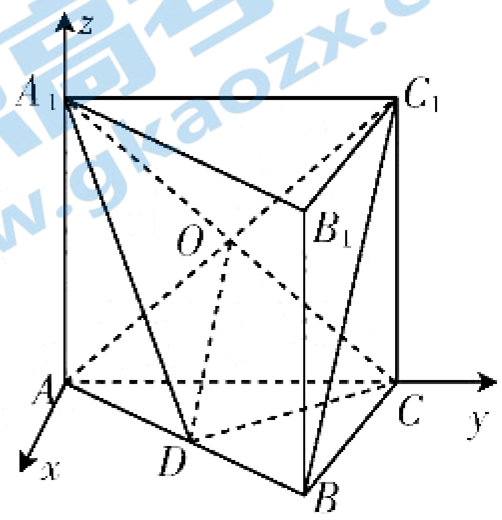
由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，得 $AO=OC_1$.

又因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AD=DB$，所以 $OD/\!/BC_1$， …………………… 3 分

又因为 $BC_1\not\subset$平面 A_1CD，$OD\subset$平面 A_1CD，

所以 $BC_1/\!/$平面 A_1CD. …………………… 5 分

(2)解：以 A 为原点，平面 ABC 内过 A 且垂直 AC 的直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，AA_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



设 $AB=1$，则 $C_1(0,1,\sqrt{3})$，$A(0,0,0)$，$B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$，$C(0,1,0)$.

由空间向量的坐标运算可得$\overrightarrow{BC_1}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{CB}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0)$. …………………… 6 分

设平面 CBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$代入可得$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1-\dfrac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$. …………………… 8 分

设平面 BAC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$代入可得$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2=0,\end{cases}$