

2018 北京临川学校高二（上）期末

数 学（理）

2018. 1

一、选择题（每题只有一个正确选项，每题 5 分，共 60 分）

1. 若命题 $p: \exists x_0 > 0, /x_0/ \leq 1$, 则命题 p 的否定是

()

A. $\forall x > 0, /x/ > 1$ B. $\forall x > 0, /x/ \geq 1$

C. $\forall x \leq 0, /x/ < 1$ D. $\forall x \leq 0, /x/ \leq 1$

2. 已知某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛得分的茎叶图如图所示，则甲、乙两人得分的中位数之和是

()

A. 62 B. 63 C. 64 D. 65

甲		乙
8	0	
4 6 3	1	2 5
3 6 8	2	5 4
3 8 9	3	1 6 1 6 7 9
2	4	4 9
1	5	0

3. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $2-x \geq 0$ ”是“ $|x-1| \leq 1$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

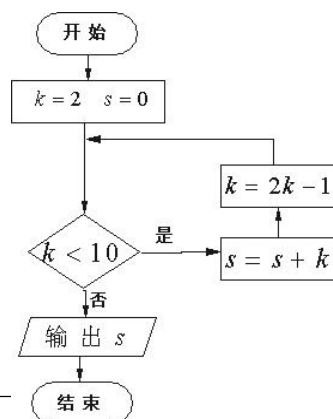
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$ ，样本数据分组为 $[17.5, 20)$ ， $[20, 22.5)$ ， $[22.5, 25)$ ， $[25, 27.5)$ ， $[27.5, 30)$. 根据直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()

A. 56

B. 60



题 (5) 图

C. 120

D. 140

5. 执行如题(5)图所示的程序框图, 则输出 s 的值为 ()

A. 10

B. 17

C. 19

D. 36

6. 已知椭圆 $mx^2 + 4y^2 = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则实数 m 等于 ()

A. 2

B. 2 或 $\frac{8}{3}$

C. 2 或 6

D. 2 或 8

7. 函数 $f(x) = \ln x - x$ 的单调递增区间是 ()

A. $(0, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$

8. 函数 $y = x^2 + (2a-1)x + 1$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 则实数 a 的范围是 ()

A. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$

B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, -\frac{3}{2}]$

D. $(-\infty, \frac{3}{2}]$

9. 若函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$, 则 ()

A. $f(7) > f(5) > f(6)$

B. $f(6) > f(7) > f(9)$

C. $f(9) > f(7) > f(6)$

D. $f(7) > f(9) > f(6)$

10. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in R)$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($m > 0$) 的左焦点为 $F_1(-4, 0)$, 则 $m =$ ()

A. 9

B. 4

C. 3

D. 2

12. 已知 A, B 为双曲线 E 的左, 右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{5}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的渐近线方程为_____.

14. 求曲线 $f(x) = e^x \cos x - x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程_____.

15. 已知向量 $\mathbf{a}=(2, 4, 10)$, $\mathbf{b}=(3, x, 15)$ 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $x =$ _____.

16. 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

三、解答题（写出必要的推理计算过程，17 题 10 分，其他每题 12 分，共 70 分）

17. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18, 先采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员参加比赛.

(1) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员人数;

(2) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛.

(i) 用所给编号列出所有可能的结果;

(ii) 设 A 为事件“编号为 A_5, A_6 的两名运动员至少有一人被抽到”, 求事件 A 发生的概率.

18. 已知中心在原点的椭圆 C 的左焦点 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 右顶点 $A(2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

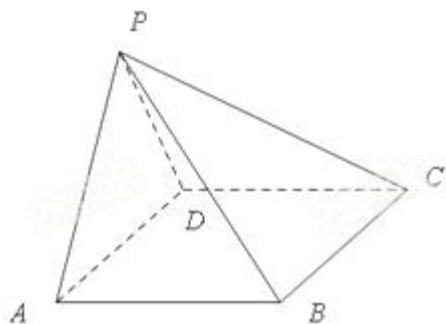
(2) 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$ 的最大值及此时 l 的直线方程.

19. 已知函数 $f(x) = e^x(ax+b) - x^2 - 4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并求 $f(x)$ 的极大值.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.



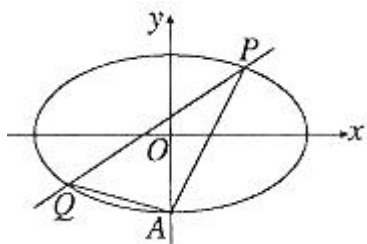
(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD = 90^\circ$, 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

21. 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 经过点 $(1, 1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P, Q (均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.



22. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;

(3) 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

数学试题答案

一、选择题（每题只有一个正确选项，每题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	B	D	C	D	A	C	C	D	C	A

二、填空题（每小.题 5 分，共 20 分）

13. $y = \pm \sqrt{2} x$

14. $y=1$

15. -39

16. 12

三、解答题（写出必要的推理或计算过程，共 70 分）

17.

【解析】

(I) 由分层抽样方法可知应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3,1,2; (II) (i) 一一列举,共 15 种; (ii) 符合条件的结果有 9 种,所以 $P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

试题解析: (I) 应从甲、乙、丙这三个协会中分别抽取的运动员人数分别为 3,1,2;

(II) (i) 从这 6 名运动员中随机抽取 2 名参加双打比赛, 所有可能的结果为 $\{A_1, A_2\}$,

$\{A_1, A_3\}$, $\{A_1, A_4\}$, $\{A_1, A_5\}$, $\{A_1, A_6\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{A_2, A_4\}$, $\{A_2, A_5\}$, $\{A_2, A_6\}$, $\{A_3, A_4\}$, $\{A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_6\}$, $\{A_4, A_5\}$, $\{A_4, A_6\}$, $\{A_5, A_6\}$, 共 15 种.

(ii) 编号为 A_5, A_6 的两名运动员至少有一人被抽到的结果为 $\{A_1, A_5\}$, $\{A_1, A_6\}$, $\{A_2, A_5\}$, $\{A_2, A_6\}$, $\{A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_6\}$, $\{A_4, A_5\}$, $\{A_4, A_6\}$, $\{A_5, A_6\}$, 共 9 种, 所以事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

18.

解: (1) 由题意可知: $c=\sqrt{3}$, $a=2$, $\therefore b^2=a^2 - c^2=1$.

$\therefore$ 焦点在 x 轴上,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 由
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases},$$

可得 $x^2 + 2bx + 2b^2 - 2 = 0$,

$\because l$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点,

$$\therefore \Delta = 4b^2 - 4(2b^2 - 2) \geq 0, \text{ 即 } b^2 \leq 2.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -2b, x_1 x_2 = 2b^2 - 2.$$

$$\therefore \text{弦长 } |AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{10-5b^2},$$

$$\therefore 0 \leq b^2 \leq 2,$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{10-5b^2} \leq \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{当 } b=0, \text{ 即 } l \text{ 的直线方程为 } y = -\frac{1}{2}x \text{ 时, 弦长 } |AB| \text{ 的最大值为 } \sqrt{10}.$$

19. 解: (1) $f'(x) = e^x(ax + a + b) - 2x - 4$.

由已知得 $f(0) = 4, f'(0) = 4$. 故 $b = 4, a + b = 8$.

从而 $a = 4, b = 4$.

(2) 由(1)知, $f(x) = 4e^x(x+1) - x^2 - 4x$,

$$f'(x) = 4e^x(x+2) - 2x - 4 = 4(x+2)\left(e^x - \frac{1}{2}\right).$$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = -\ln 2$ 或 $x = -2$.

从而当 $x \in (-\infty, -2) \cup (-\ln 2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-2, -\ln 2)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (-\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, -\ln 2)$ 上单调递减.

当 $x = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(-2) = 4(1 - e^{-2})$.

20. 解: (1) 由已知 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$, 得 $AB \perp AP, CD \perp PD$.

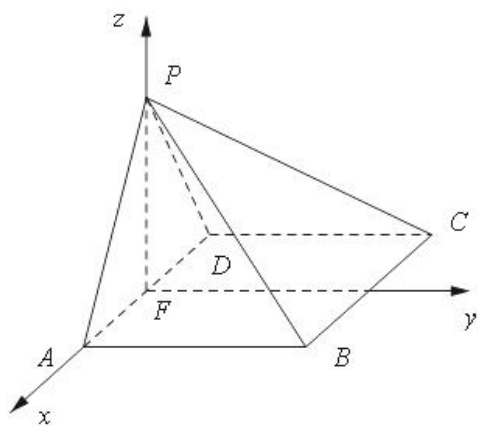
由于 $AB \parallel CD$, 故 $AB \perp PD$, 从而 $AB \perp$ 平面 PAD .

又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) 在平面 PAD 内作 $PF \perp AD$, 垂足为 F ,

由(1)可知, $AB \perp$ 平面 PAD , 故 $AB \perp PF$, 可得 $PF \perp$ 平面 $ABCD$.

以 F 为坐标原点, $\overrightarrow{FA}$ 的方向为 x 轴正方向, $|\overrightarrow{AB}|$ 为单位长, 建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$.



由(1)及已知可得 $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$, $P(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0)$, $C(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0)$.

所以 $\overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0)$, $\overrightarrow{PA} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 PCB 的法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x + y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x = 0 \end{cases},$$

可取 $\mathbf{n} = (0, -1, -\sqrt{2})$.

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 PAB 的法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

可取 $\mathbf{m} = (1, 0, 1)$.

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

试题分析：(I)由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1$, 由 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 继而得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(II) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 \neq 0$, 由题设知, 直线 PQ 的方程为 $y = k(x-1)+1 (k \neq 2)$, 代入

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \text{ 化简得 } (1+2k^2)x^2 - 4k(k-1)x + 2k(k-2) = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{4k(k-1)}{1+2k^2} \text{ ①}, x_1 x_2 = \frac{2k(k-2)}{1+2k^2} \text{ ②},$$

由已知 $\Delta > 0$, 从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和 $k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1+1}{x_1} + \frac{y_2+1}{x_2}$

$$\text{化简得 } k_{AP} + k_{AQ} = 2k + (2-k) \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2}, \text{ 把①②式代入方程得 } k_{AP} + k_{AQ} = 2.$$

试题解析：(I)由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1$, 综合 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 所以, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(II)由题设知, 直线 PQ 的方程为 $y = k(x-1)+1 (k \neq 2)$, 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 得

$$(1+2k^2)x^2 - 4k(k-1)x + 2k(k-2) = 0,$$

由已知 $\Delta > 0$, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, $x_1 x_2 \neq 0$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4k(k-1)}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2k(k-2)}{1+2k^2},$$

从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和

$$\begin{aligned} k_{AP} + k_{AQ} &= \frac{y_1+1}{x_1} + \frac{y_2+1}{x_2} = \frac{kx_1+2-k}{x_1} + \frac{kx_2+2-k}{x_2} \\ &= 2k + (2-k) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = 2k + (2-k) \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} \\ &= 2k + (2-k) \frac{4k(k-1)}{2k(k-2)} = 2k - (2k-1) = 2. \end{aligned}$$

22. 解: (1) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$, $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$, $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在点

$(0, f(0))$ 处的切线方程为 $2x - y = 0$;

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$, 即不等式 $f(x) - 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right) > 0$, 对 $\forall x \in (0, 1)$ 成立, 设

$$F(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right), \text{ 则 } F'(x) = \frac{2x^4}{1-x^2}, \text{ 当 } x \in (0, 1)$$

时, $F'(x) > 0$, 故 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数, 则 $F(x) > F(0) = 0$, 因此对 $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$

成立;

(III) 使 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 成立, $x \in (0, 1)$, 等价于 $F(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - k\left(x + \frac{x^3}{3}\right) > 0$, $x \in (0, 1)$;

$$F'(x) = \frac{2}{1-x^2} - k(1+x^2) = \frac{kx^4 + 2 - k}{1-x^2},$$

当 $k \in [0, 2]$ 时, $F'(x) \geq 0$, 函数在 $(0, 1)$ 上为增函数, $F(x) > F(0) = 0$, 符合题意;

当 $k > 2$ 时, 令 $F'(x) = 0$, $x_0^4 = \frac{k-2}{k} \in (0, 1)$,

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, 1)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$F(x) < F(0)$, 显然不成立,

综上所述可知: k 的最大值为 2.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980