西城区 2021 届高三年级二模考试

数学试卷

2021.5

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2\leqslant 9\}$，$B=\{x \mid x>-2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0,1,2,3\}$　　（B）$\{1,2,3\}$

（C）$\{-1,0,1,2,3\}$　　（D）$\{x \mid -2<x\leqslant 3\}$

（2）已知复数 $z=a\mathrm{i}+\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$，其所对应的点在第四象限，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,1)$　　（B）$(1,+\infty)$

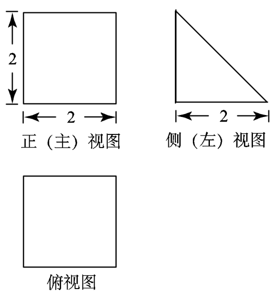
（C）$(-1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-1)$

（3）要得到函数 $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象

（A）向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　　（B）向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　　（D）向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

（4）某三棱柱的三视图如图所示，该三棱柱的体积为



（A）$\dfrac{8}{3}$　　（B）$\dfrac{4}{3}$

（C）8　　（D）4

（5）在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$A=\dfrac{\pi}{6}$，则“$B=\dfrac{\pi}{3}$”是“$b=2\sqrt{3}$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（6）若直线 $y=2x$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 无公共点，则双曲线 C 的离心率可能是

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　（B）1　　　　（C）2　　　　（D）$2\sqrt{3}$

（7）“苏州码子”发源于苏州，在明清至民国时期，作为一种民间的数字符号曾经流行一时，广泛应用于各种商业场合.110 多年前，詹天佑主持修建京张铁路，首次将“苏州码子”刻于里程碑上.“苏州码子”计数方式如下：〡（1）、〢（2）、〣（3）、〤（4）、〥（5）、〦（6）、〧（7）、〨（8）、〩（9）、〇（0）.为了防止混淆，有时要将“〡”“〢”“〣”横过来写.已知某铁路的里程碑所刻数字代表距离始发车站的里程，每隔 2 公里摆放一个里程碑，若在 A 点处里程碑上刻着“〣〤”，在 B 点处里程碑刻着“〩〢”，则从 A 点到 B 点里程碑的个数应为

（A）29　　　　（B）30　　　　（C）58　　　　（D）59

（8）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $a_1=8$，$a_4=-1$，则数列 $\{S_n\}$

（A）有最大项，有最小项　　　　（B）有最大项，无最小项

（C）无最大项，有最小项　　　　（D）无最大项，无最小项

（9）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,1)$，$B(2,1)$，$C(2,2)$，P 是圆 $M:x^2+(y-4)^2=2$ 上一点，Q 是 $\triangle ABC$ 边上一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值是

（A）$8+2\sqrt{2}$　　　　（B）12

（C）$8+4\sqrt{2}$　　　　（D）16

（10）甲乙丙三个学生同时参加了若干门学科竞赛（至少包含数学和物理），在每科竞赛中，甲乙丙三人中都有一个学生的分数为 x，另一个学生的分数为 y，第三个学生的分数为 z，其中 x，y，z 是三个互不相等的正整数. 在完成所有学科竞赛后，甲的总分为 47 分，乙的总分为 24 分，丙的总分为 16 分，且在甲乙丙这三个学生中乙的数学竞赛成绩排名第一，则

（A）甲乙丙三个学生至少参加了四门学科竞赛

（B）x，y，z 这三个数中的最大值可以取到 21

（C）在甲乙丙这三个学生中，甲学生的物理竞赛成绩可能排名第二

（D）在甲乙丙这三个学生中，丙学生的物理竞赛成绩一定排名第二

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,m)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，则 m 等于_____.

（12）在 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x})^3$ 展开式中，常数项是_____.

（13）对于抛物线 C，给出下列三个条件：

①对称轴为 y 轴；②过点 $(1,1)$；③焦点到准线的距离为 2.

写出符合其中两个条件的一个抛物线 C 的标准方程_____.

（14）共享单车已经成为方便人们出行的交通工具，某公司决定从 2020 年 1 月开始向某地投放共享单车，记第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n（单位：千辆），其中 $a_1=1$，$b_1=0.1$.从第 2 个月到 2021 年 12 月，共享单车的每月投放量比上个月增加 1 千辆，从 2022 年 1 月开始，共享单车的每月投放量比上个月减少 1 千辆；根据预测，从 2020 年 1 月开始，共享单车的每月损失量比上个月增加 100 辆．设第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月的累计投放量与累计损失量的差，则该地区第 4 个月底的共享单车的估计保有量为_____千辆；当 n 为_____时，该地区第 n 个月底的共享单车估计保有量达到最大.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|a^x-1|, & x\leqslant 1,\\ (a-2)(x-1), & x>1.\end{cases}$ 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$．给出下列四个结论：

① 若 $a\neq 2$，则函数 $f(x)$ 的零点是 0；

② 若函数 $f(x)$ 无最小值，则 a 的取值范围为 $(0,1)$；

③ 若 $a>2$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④ 若关于 x 的方程 $f(x)=a-2$ 恰有三个不相等的实数根 x_1,x_2,x_3，则 a 的取值范围为 $(2,3)$，且 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为 $(-\infty,2)$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

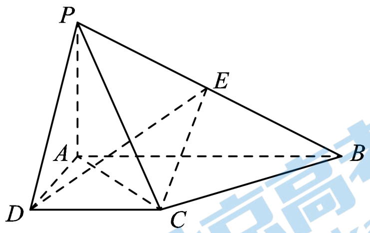
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$PA=AD=CD=2$，点 E 为 PB 的中点.

（I）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PAC；

（II）求二面角 $E-CD-A$ 的余弦值.



（17）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=4\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{3})+m\ (\omega>0)$. 在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 值的两个条件作为已知.

（I）求 $f(\dfrac{\pi}{3})$ 的值；

（II）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，求实数 a 的最大值.

条件①：$f(x)$ 最小正周期为 π；

条件②：$f(x)$ 最大值与最小值之和为 0；

条件③：$f(0)=2$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

在新冠病毒疫情防控期间，北京市中小学开展了“优化线上教育与学生线下学习相结合”的教育教学实践活动.为了解某区教师对 A,B,C,D,E 五类线上教育软件的使用情况（每位教师都使用这五类教育软件中的某一类且每位教师只选择一类教育软件），从该区教师中随机抽取了100人，统计数据如下表，其中 $a>b$， $a,b\in\mathbf{N}$.

教育软件类型	A	B	C	D	E
选用教师人数	10	15	a	30	b

假设所有教师选择使用哪类软件相互独立.

（I）若某校共有300名教师，试估计该校教师中使用教育软件 C 或 E 的人数；

（II）从该区教师中随机抽取3人，估计这3人中至少有2人使用教育软件 D 的概率；

（III）设该区有3000名教师，从中随机抽取1人，记该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_1；该区学校 M 有600名教师，其中有200人使用教育软件 C，100人使用教育软件 D，从学校 M 中随机抽取1人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率值为 P_2；从该区其他教师（除学校 M 外）中随机抽取1人，该教师使用教育软件 C 或 D 的概率估计值为 P_3.试比较 P_1， P_2 和 P_3 之间的大小.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，其长轴的两个端点分别为 $A(-3,0)$， $B(3,0)$.

（I）求椭圆 C 的标准方程；

（II）点 P 为椭圆上除 A，B 外的任意一点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 E，点 O 为坐标原点，过点 O 且与直线 BE 垂直的直线记为 l，直线 BP 交 y 轴于点 M，交直线 l 于点 N，求 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+bx+c$， $g(x)=kx^2+2$， $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 1.

（I）求 b 和 c 的值；

（II）当 $x\in[1,+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在曲线 $y=g(x)$ 的上方，求实数 k 的取值范围.

（III）设 $k=1$，证明：存在两条与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 都相切的直线.

（21）（本小题 15 分）

设 A 是正整数集的一个非空子集，如果对于任意 $x\in A$，都有 $x-1\in A$ 或 $x+1\in A$，则称 A 为自邻集. 记集合 $A_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ $(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N})$ 的所有子集中的自邻集的个数为 a_n .

（I）直接写出 A_4 的所有自邻集；

（II）若 n 为偶数且 $n\geqslant 6$，求证： A_n 的所有含 5 个元素的子集中，自邻集的个数是偶数；

（III）若 $n\geqslant 4$，求证： $a_n\leqslant 2a_{n-1}$.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　　（2）D　　（3）B　　（4）D

（5）A　　（6）C　　（7）B　　（8）A

（9）B　　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-\sqrt{3}$　　（12）-6

（13）$x^2=4y$，$x^2=-4y, x^2=y$（以上答案均可）

（14）9, 43　　（15）①④

注：第（14）题第一空 3 分,第二空 2 分.第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）取 AB 的中点 F，连接 CF，所以 $AF=CD$，

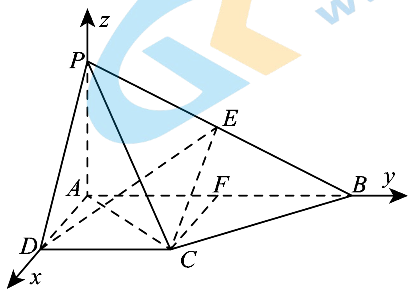
又因为 $AF\,//\,CD$，所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形.

因为 $AB\perp AD$，$AD=CD$，所以四边形 $AFCD$ 是正方形，

则 $AB\perp CF$，$CF=AD=2$，所以 $AC=BC=2\sqrt{2}$，

得到 $AC^2+BC^2=AB^2$，

所以 $BC\perp AC$.　……………1 分



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BC$，　……………2 分

因为 $PA\cap AC=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAC.　……………3 分

因为 $BC\subset$ 平面 PBC，　……………4 分

平面 $PBC\perp$ 平面 PAC.　……………5 分

（II）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，则 PA, AD, AB 两两垂直，

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.　……………6 分

则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$D(2,0,0)$，$E(0,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,0,1)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y=0,\\ -2x+z=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ z=2x,\end{cases}$ ……………8 分

令 $x=1$，则 $z=2$，

所以平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$， ……………9 分

又因为平面 ACD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ……………10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ……………12 分

由已知，二面角 $E-CD-A$ 为锐角，

所以二面角 $E-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………13 分

（17）（共 13 分）

解：（I）$f(x)=4\sin\dfrac{\omega x}{2}(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\omega x}{2})+m$ ……………2 分

$=2\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+m$

$=\sin\omega x+\sqrt{3}(1-\cos\omega x)+m$ ……………4 分

$=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x+\sqrt{3}+m$

$=2\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m$. ……………5 分

选择条件①②：

由条件①得，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. ……………6 分

由②知，$(2+\sqrt{3}+m)+(-2+\sqrt{3}+m)=0$，所以 $m=-\sqrt{3}$. ……………7 分

则 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，

所以 $f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3})=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………8 分

（II）令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$， ……………10 分

所以 $-\frac{\pi}{12}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+k\pi \ (k\in \mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi] \ (k\in \mathbf{Z})$. ……………11 分

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增，且 $0\in[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，此时 $k=0$，

所以 $a\leqslant\frac{5\pi}{12}$，故实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$. ……………13 分

选择条件①③：

由条件①得，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. ……………6 分

由③知，$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m=2$，所以 $m=2$. ……………7 分

则 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+2$.

所以 $f(\frac{\pi}{3})=2\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}+2$. ……………8 分

（II）令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in \mathbf{Z})$， ……………10 分

所以 $-\frac{\pi}{12}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+k\pi \ (k\in \mathbf{Z})$，

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi] \ (k\in \mathbf{Z})$， ……………12 分

因为函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增，且 $0\in[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，此时 $k=0$，

所以 $a\leqslant\frac{5\pi}{12}$，故实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$. ……………13 分

说明：不可以选择条件②③：

由②知，$(2+\sqrt{3}+m)+(-2+\sqrt{3}+m)=0$，所以 $m=-\sqrt{3}$；

由③知，$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+m=2$，所以 $m=2$；矛盾.

所以函数 $f(x)$ 不能同时满足条件②和③.

（18）（共 14 分）

解:（I）从表格数据可知，$10+15+a+30+b=100$，则 $a+b=45$，

所以样本中教师使用教育软件 C 或 E 的人数为 45 人， …………2 分

故估计该校教师中使用教育软件 C 或 E 的人数为 $300\times\frac{45}{100}=135$ 人. ……4 分

（II）设事件 F 为“从该区教师中随机抽取 3 人，至少有 2 人使用教育软件 D”.

由题意,样本中的100 名教师使用软件 D 的频率为 $\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$.

用频率估计概率，从该区教师中随机抽取一名教师，估计该教师使用教育软件 D 的概率为 $\frac{3}{10}$. ……………5 分

记被抽取的 3 人中使用软件 D 的人数为 X，则 $X\sim B(3,\frac{3}{10})$. ………7 分

所以 $P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{10})^2(1-\frac{3}{10})=\frac{189}{1000}$, ……………8 分

$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{10})^3(1-\frac{3}{10})^0=\frac{27}{1000}$, ……………9 分

所以 $P(F)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{216}{1000}=\frac{27}{125}$. ……………11 分

（III）$P_2<P_1<P_3$. ……………14 分

（19）（共 15 分）

解：（I）由题意，得 $a=3$. 又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $c=\sqrt{6}$. ……………3 分

又因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………5 分

（II）设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm3,\ y_0\neq0)$，则 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$. ……………6 分

所以直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$, ……………7 分

令 $x=4$，得点 E 的坐标为 $(4,\frac{7y_0}{x_0+3})$. ……………8 分

因为直线 BE 的斜率为 $\dfrac{\frac{7y_0}{x_0+3}}{4-3}=\frac{7y_0}{x_0+3}$,

所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{x_0+3}{7y_0}x$, ……………9 分

又因为直线 PB 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$. ……………10 分

联立直线 l 和直线 PB 的方程，消去 y 得 $-\frac{x_0+3}{7y_0}x=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，

所以 $\frac{7y_0^2+x_0^2-9}{7y_0(x_0-3)}x=\frac{3y_0}{x_0-3}$，　　　　……………11 分

因为 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$，所以 $x_0^2-9=-3y_0^2$，

所以 $\frac{4y_0^2}{7y_0(x_0-3)}x=\frac{3y_0}{x_0-3}$，解得点 N 的横坐标 $x_N=\frac{21}{4}$.　　　　……………13 分

所以 $\frac{S_{\triangle BMO}}{S_{\triangle NMO}}=\frac{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_B|}{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_N|}=\frac{|x_B|}{|x_N|}=\frac{3}{\frac{21}{4}}=\frac{4}{7}$.　　　　……………15 分

即 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比为 $4:7$.

（20）（共 15 分）

解：（I）$f'(x)=\frac{1}{x}+b$.　　　　……………1 分

由已知 $f'(1)=1+b=0$，$f(1)=b+c=1$，　　　　……………3 分

解得 $b=-1$，$c=2$.经检验，满足题意.　　　　……………4 分

所以 $b=-1$，$c=2$.

（II）$f(x)=\ln x-x+2$, $g(x)=kx^2+2$. $f(x)-g(x)=\ln x-x-kx^2$.

依题意 $\ln x-x-kx^2>0$ 对任意的 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立.　　　　……………5 分

所以 $k<\frac{\ln x-x}{x^2}$ 对任意的 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立.

令 $F(x)=\frac{\ln x-x}{x^2}$，$x\in[1,+\infty)$，

$$F'(x)=\frac{(\frac{1}{x}-1)x^2-2x(\ln x-x)}{x^4}=\frac{x^2-2x\ln x+x}{x^4}=\frac{x-2\ln x+1}{x^3},$$　　　　………6 分

令 $h(x)=x-2\ln x+1$，$x\geqslant 1$，

所以 $h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，令 $h'(x)=0$，所以 $x=2$.　　　　……………7 分

因为当 $x\in(1,2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

　　当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

当 $x=2$ 时，函数 $h(x)$ 的最小值为 $3-2\ln 2$，且 $3-2\ln 2>0$.　　　　………8 分

所以 $h(x)>0$，即 $F'(x)>0$. $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=-1$，

所以 $k<-1$，故实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-1)$. ……………9 分

（III）假设存在与曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都相切的直线 l，

设切点坐标分别为 $(x_1,\ln x_1-x_1+2)$，(x_2,x_2^2+2) .

因为 $f'(x_1)=\dfrac{1}{x_1}-1$，所以 l 的方程为 $y=(\dfrac{1}{x_1}-1)x+\ln x_1+1$. …………10 分

因为 $g'(x_2)=2x_2$，所以 l 的方程为 $y=2x_2x-x_2^2+2$. ……………11 分

所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}-1=2x_2\\ \ln x_1+1=-x_2^2+2\end{cases}$，消去 x_2 得 $\ln x_1+\dfrac{1}{4x_1^2}-\dfrac{1}{2x_1}-\dfrac{3}{4}=0$ ……①.

令 $t(x)=\ln x+\dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{4}$，$x>0$，

所以 $t'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^3}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{2x^2+x-1}{2x^3}=\dfrac{(x+1)(2x-1)}{2x^3}$，

所以，在区间 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上，$t'(x)<0$，$t(x)$ 是减函数；在区间 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上，$t'(x)>0$，

$t(x)$ 是增函数. ……………13 分

所以，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $t(x)$ 的最小值为 $-\dfrac{3}{4}-\ln 2<0$.

又因为 $t(\mathrm{e})=1+\dfrac{1}{4\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}-\dfrac{3}{4}>0$，

$t(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})=-2+\dfrac{\mathrm{e}^4}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{3}{4}>\dfrac{7\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{11}{4}=\dfrac{5\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{11}{4}>0$， ………14 分

所以函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，即方程①有两个不等的正实根，

由方程 $\dfrac{1}{x_1}-1=2x_2$ 可得 x_2 有两个不同的值，

所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}-1=2x_2,\\ \ln x_1+1=-x_2^2+2\end{cases}$ 有两组不同的解，直线 l 有两条， …………15 分

所以存在两条与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 都相切的直线.

（21）（共 15 分）

解：（I）A_4 的子集中的自邻集有：

$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$．……………4 分

（II）对于集合 A_n 的含有 5 个元素的自邻集 $B=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ ．

因为对于任意 $x_i\in B$，都有 $x_i-1\in B$ 或 $x_i+1\in B$，$i=1,2,3,4,5$．

所以 $x_2=x_1+1$，$x_4=x_5-1$，$x_3=x_2+1$ 或 $x_3=x_4-1$．……………6 分

对于集合 $C=\{n+1-x_5,n+1-x_4,n+1-x_3,n+1-x_2,n+1-x_1\}$，

因为 $1\leqslant x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\leqslant n$，所以 $1\leqslant n+1-x_i\leqslant n$，$i=1,2,3,4,5$．

且 $n+1-x_5<n+1-x_4<n+1-x_3<n+1-x_2<n+1-x_1$ ．

所以 $C\subseteq A_n$．……………7 分

因为 $x_1+1=x_2$，$x_5-1=x_4$，$x_3=x_2+1$ 或 $x_3=x_4-1$．

所以 $n+1-x_2=(n+1-x_1)-1$，$n+1-x_4=(n+1-x_5)+1$，

$n+1-x_3=(n+1-x_4)+1$ 或 $n+1-x_3=(n+1-x_2)-1$．

所以，对于任意 $n+1-x_i\in C$，都有

$(n+1-x_i)+1\in C$ 或 $(n+1-x_i)-1\in C$，$i=1,2,3,4,5$．

所以集合 C 也是自邻集.……………8 分

因为当 n 为偶数时，$x_3\neq n+1-x_3$，

所以 $B\neq C$．

所以，对于集合 A_n 任意一个含有 5 个元素的自邻集，在上述对应方法下会

存在一个不同的含有 5 个元素的自邻集与其对应.

所以，A_n 的含有 5 个元素的自邻集的个数为偶数.……………9 分

（III）记自邻集中最大元素为 k 的自邻集的个数为 b_k，$k=2,3,4,\cdots,n$．

当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n-1}=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$a_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$．

显然 $a_n=a_{n-1}+b_n$．……………11 分

下面证明 $b_n\leqslant a_{n-1}$．

①自邻集中含 $n-2$，$n-1$，n 这三个元素.

记去掉这个自邻集中的元素 n 后的集合为 D，因为 $n-2,n-1\in D$，所以 D

仍然是自邻集，且集合 D 中的最大元素是 $n-1$，所以含 $n-2,n-1,n$ 这三个

元素的自邻集的个数为 b_{n-1} .　　……………12 分

②自邻集中含有 $n-1$，n 这两个元素，不含 $n-2$，且不只有 $n-1$，n 两个元素.

记自邻集中除 n，$n-1$ 之外的最大元素为 m，则 $2 \leqslant m \leqslant n-3$.

每个自邻集去掉 $n-1$，n 这两个元素后，仍然为自邻集，

此时的自邻集的最大元素为 m，可将此时的自邻集分为 $n-4$ 类：

含最大数为 2 的集合个数为 b_2 .

含最大数为 3 的集合个数为 b_3 .

含最大数为 $n-3$ 的集合个数为 b_{n-3} .

则这样的集合共有 $b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}$ 个.　　……………13 分

③自邻集只含 $n-1$，n 两个元素，这样的自邻集只有 1 个.　　…………14 分

综上可得 $b_n=b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+1$

$\leqslant b_2+b_3+\cdots+b_{n-3}+b_{n-1}+b_{n-2}$

$=a_{n-1}$.

所以 $b_n \leqslant a_{n-1}$，

所以当 $n \geqslant 4$ 时，$a_n \leqslant 2a_{n-1}$.　　……………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。