2018-2019 学年度北京市大兴区高三第一次综合练习

2019.4

数学（文）

本试卷共 4 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|x\leqslant 0\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，那么 $A\cap B$ 等于

（A）$\{0,1,2\}$　　（B）$\{1,2\}$

（C）$\{-2,-1\}$　　（D）$\{-2,-1,0\}$

（2）已知 $a=3^{0.4}$，$b=\log_3\frac{1}{2}$，$c=(\frac{1}{3})^{0.2}$，则

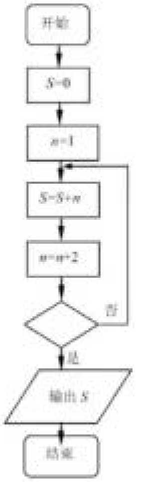
（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$

（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

（3）若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0,\\ y\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $2x-y$ 的最大值为

（A）-6　　（B）4

（C）6　　（D）8



（4）执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值为 16，则判断框内的条件为

（A）$n>6$　　（B）$n\geqslant 7$

（C）$n>8$　　（D）$n>9$

（5）已知抛物线 $C:y^2=x$，直线 $l:y=kx+1$，则“$k\neq 0$”是“直线 l 与抛物线 C 有两个不同交点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

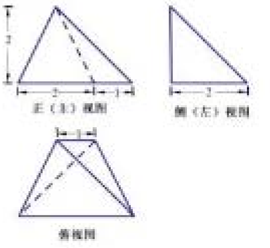
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知 $a>0$，$b>0$，若 $a+b=4$，则

（A）a^2+b^2 有最小值　　（B）$\sqrt{ab}$ 有最小值

（C）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 有最大值　　（D）$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 有最大值

（7）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长棱的棱长为



（A）$2\sqrt{2}$

（B）3

（C）$2\sqrt{3}$

（D）$\sqrt{13}$

（8）有 10 名选手参加某项诗词比赛，计分规则如下：比赛共有 6 道题，对于每一道题，10 名选手都必须作答，若恰有 n 个人答错，则答对的选手该题每人得 n 分，答错选手该题不得分．比赛结束后，关于选手得分情况有如下结论：

①若选手甲答对 6 道题，选手乙答对 5 道题，则甲比乙至少多得 1 分；

②若选手甲和选手乙都答对 5 道题，则甲和乙得分相同；

③若选手甲的总分比其他选手都高，则甲最高可得 54 分

④10 名选手的总分不超过 150 分．

其中正确结论的个数是

（A）4　　　　（B）3

（C）2　　　　（D）1

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知复数 z 满足 $z^2+1=0$，则 $|z|=$_______．

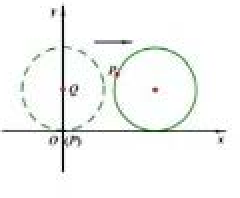
（10）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,k)$，$\boldsymbol{b}=(9,k-6)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $k=$_______．

（11）在 ΔABC 中，$a=8$，$b=5$，面积为 12，则 $\cos 2C=$_______．

（12）若直线 $2x+y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 相切，则 $a=$_______．

（13）已知点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，点 P 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支上，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围是_______．

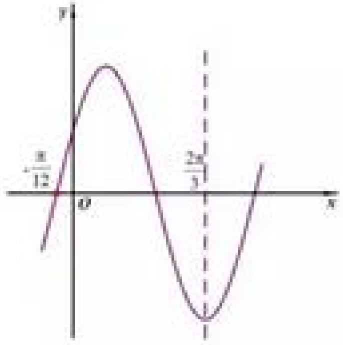
（14）如图，单位圆 Q 的圆心初始位置在点 $(0,1)$，圆上一点 P 的初始位置在原点，圆沿 x 轴正方向滚动．当点 P 第一次滚动到最高点时，点 P 的坐标为_______；当圆心 Q 位于点 $(3,1)$ 时，点 P 的坐标为_______．



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的一个零点是 $x=-\frac{\pi}{12}$，其图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称.



（Ⅰ）求 ω，φ 的值；

（Ⅱ）写出 $f(x)$ 的单调递减区间.

（16）（本小题 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$，$2b_2+b_3=0$，$a_1+a_3=2b_3$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n；

（Ⅱ）求 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+b_{2n-1}-b_{2n}$.

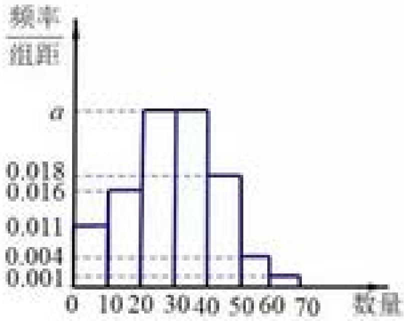
（17）（本小题 13 分）

随着智能手机的发展，各种“APP”(英文单词 Application 的缩写，一般指手机软件)应运而生. 某机构欲对 A 市居民手机内安装的 APP 的个数和用途进行调研，在使用智能手机的居民中随机抽取 100 人，获得了他们手机内安装 APP 的个数，整理得到如图所示频率分布直方图.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）从被抽取安装 APP 的个数不低于 50 的居民中，随机抽取 2 人进一步调研，求这 2 人安装 APP 的个数都低于 60 的概率；

（Ⅲ）假设同组中的数据用该组区间的右端点值代替，以本次被抽取的居民情况为参考，试估计 A 市使用智能手机的居民手机内安装 APP 的平均个数在第几组（只需写出结论）.



（18）（本小题 14 分）

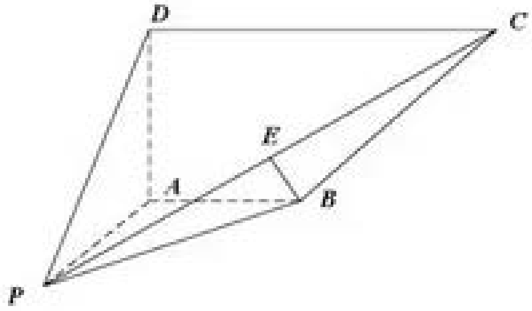
如图，四棱锥 $P-ABCD$，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp AB$，$AB\,//\,CD$，$\angle DAB=90^\circ$，

$PA=AD$，$DC=2AB$，E 为 PC 中点.

（Ⅰ）求证：$PA\perp BC$；

（Ⅱ）求证：直线 $BE\,//$ 平面 PAD；

（Ⅲ）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PDC.



（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，M 是椭圆 C 的上顶点，F_1，F_2 是椭圆 C 的焦点，ΔMF_1F_2 的周长是 6.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过动点 $P(1,t)$ 作直线交椭圆 C 于 A，B 两点，且 $|PA|=|PB|$，过 P 作直线 l，使 l 与直线 AB 垂直，证明：直线 l 恒过定点，并求此定点的坐标.

（20）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=ae^x$ 图象在 $x=0$ 处的切线与函数 $g(x)=\ln x$ 图象在 $x=1$ 处的切线互相平行.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）设直线 $x=t(t>0)$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 交于 P，Q 两点，求证：$|PQ|>2$.

2018~2019 学年度北京市大兴区高三第一次综合练习

参考答案及评分标准

数学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	C	B	A	C	B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）1　　（10）$-\dfrac{3}{4}$　　（11）$\dfrac{7}{25}$

（12）$\pm\sqrt{5}$（只写一个且正确给 3 分）　　（13）$(0,+\infty)$

（14）$(\pi,2)$；$(3-\sin3,1-\cos3)$（第一个空 3 分，第二个空 2 分）

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期，

由图可知 $\dfrac{2\pi}{3}-(-\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{3}{4}T$，解得 $T=\pi$．　……2 分

又 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$．……4 分

由 $f(\dfrac{2\pi}{3})=-2$，即 $\sin(\dfrac{4\pi}{3}+\varphi)=-1$，……5 分

$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$．……7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$．

函数 $y=\sin x$ 单调减区间是 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$.

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$ ……2 分

得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$ ……4 分

所以 $f(x)$ 的减区间是 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$． ……6 分

另解：由 $y=f(x)$ 图像可知，当 $x=\frac{2\pi}{3}-\frac{T}{2}=\frac{\pi}{6}$ 时函数取得最大值，……2 分

所以，函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的递减区间是 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$． ……4 分

函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的减区间是 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$． ……6 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

由 $2b_2+b_3=0$，得 $\frac{b_3}{b_2}=-2$，即 $q=-2$． ……2 分

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$，

所以 $b_3=4$ ……3 分

由 $a_1+a_3=2b_3$，得 $d=3$． ……4 分

所以 $a_n=3n-2$． ……5 分

所以 $S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$． ……7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $b_n=(-2)^{n-1}$． ……1 分

所以$b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots\cdots+b_{2n-1}-b_{2n}$

$=1-(-2)^1+(-2)^2-(-2)^3+(-2)^4+\cdots-(-2)^{2n-1}$ ……3 分

$=1+2+2^2+\cdots+2^{2n-1}$ ……4 分

$=\dfrac{1\cdot(1-2^{2n})}{1-2}$ ……5 分

$=2^{2n}-1$ ……6 分

（17）（共 13 分）

解（Ⅰ）由$(0.011+0.016+a+a+0.018+0.004+0.001)\times 10=1$，……2 分

得$a=0.025$． ……3 分

（Ⅱ）设事件A为“这 2 人手机内安装“APP”的数量都低于 60”． ……1 分

被抽取的智能手机内安装“APP”的数量在$[50,60)$的有$0.004\times 10\times 100=4$人，

分别记为a_1,a_2,a_3,a_4， ……2 分

被抽取的智能手机内安装“APP”的数量在$[60,70]$的有$0.001\times 10\times 100=1$人，

记为b_1， ……3 分

从被抽取的智能手机内安装“APP”的数量不低于 50 的居民中随机抽取 2 人进一步调研，共包含 10 个基本事件，

分别为a_1a_2，a_1a_3，a_1a_4，a_1b_1，a_2a_3，a_2a_4，a_2b_1，a_3a_4，a_3b_1，a_4b_1， ……5 分

事件A包含 6 个基本事件，

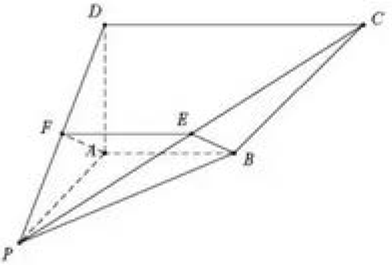
分别为 a_1a_2，a_1a_3，a_1a_4，a_2a_3，a_2a_4，a_3a_4， ……6 分

则 $P(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. ……7 分

（III）第 4 组 （或者写成 $[30,40)$）. ……3 分

（18）（共 14 分）

解（I）因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，



平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$PA\perp AB$，

$PA\subset$ 平面 PAB，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. ……2 分

又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$， ……3 分

所以 $PA\perp BC$. ……4 分

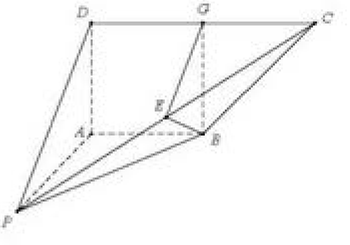
（II）取 PD 中点 F，连接 EF，AF.

在 ΔPCD 中，E，F 分别为 PC，PD 的中点，

所以 $EF\,//\,DC$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}DC$. ……1 分

又因为 $AB\,//\,DC$ 且 $AB=\dfrac{1}{2}DC$，

所以 $AB\,//\,EF$ 且 $AB=EF$. ……2 分



所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形 . ……3 分

所以 $BE\,//\,AF$. ……4 分

因为 $AF\subset$ 平面 PAD，

$BE\not\subset$ 平面 PAD，

所以 BE // 平面 PAD． ……5 分

方法二： 取 DC 中点 G，连接 BG，EG.

在 ΔPCD 中，E，G 分别为 PC，DC 的中点，

所以 EG // PD ． ……1 分

又因为 $PD\subset$ 平面 PAD，$EG\not\subset$ 平面 PAD，

所以 EG // 平面 PAD． ……2 分

因为 AB // DG 且 $AB=DG$，

所以四边形 $ABGD$ 为平行四边形.

所以 BG // AD.

又因为 $AD\subset$ 平面 PAD，$BG\not\subset$ 平面 PAD ，

所以 BG // 平面 PAD． ……3 分

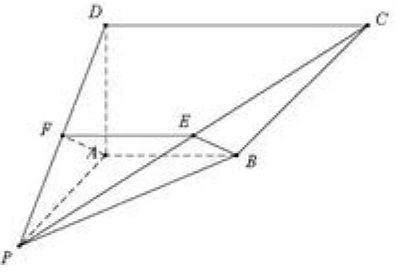
因为 EG // 平面 PAD，BG // 平面 PAD，$EG\cap BG=G$，

所以平面 BGE // 平面 PAD． ……4 分

又因为 $BE\subset$ 平面 BGE，

所以 BE // 平面 PAD． ……5 分

（III）因为 $AP=AD$，F 为 PD 的中点，



所以 $AF\perp PD$.

又因为 BE // AF，

所以 $BE\perp PD$ ． ……1 分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$DC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp DC$．　……2 分

因为 $AB // CD$，$\angle DAB = 90^\circ$，

所以 $AD \perp DC$．

因为 $DC \perp AD$，$DC \perp PA$，$AD \cap PA = A$，

所以 $DC \perp$ 平面 PAD．　……3 分

又因为 $AF \subset$ 平面 PAD，

所以 $DC \perp AF$．

又因为 $BE // AF$，

所以 $DC \perp BE$．　……4 分

因为 $BE \perp DC$，$BE \perp PD$，$DC \cap PD = D$，

所以 $BE \perp$ 平面 PDC．

又因为 $BE \subset$ 平面 PDC，

所以平面 $PBC \perp$ 平面 PDC．　……5 分

（19）（共 14 分）

解（Ⅰ）由于 M 是椭圆 C 的上顶点，由题意得 $2a+2c=6$，……2 分

又椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，　……3 分

解得 $a=2, c=1$

又 $b^2=a^2-c^2=3$，　……4 分

所以椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ．……5 分

（Ⅱ）当直线 AB 斜率存在，设 AB 的直线方程为 $y-t=k(x-1)$， ……1 分

联立 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ y-t=k(x-1)\end{cases}$，得

$(3+4k^2)x^2+8k(t-k)x+4(t-k)^2-12=0$， ……2 分

由题意，$\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8k(t-k)}{3+4k^2}$． ……3 分

因为 $|PA|=|PB|$，所以 P 是 AB 的中点．

即 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，得 $-\frac{8k(t-k)}{3+4k^2}=2$， ……4 分

$4kt+3=0$ ……① ……5 分

又 $l\perp AB$，且 $k\neq0$，l 的斜率为 $-\frac{1}{k}$， ……6 分

直线 l 的方程为 $y-t=-\frac{1}{k}(x-1)$ ……②

把①代入②可得：$y=-\frac{1}{k}(x-\frac{1}{4})$ ……7 分

所以直线 l 恒过定点 $(\frac{1}{4},0)$． ……8 分

当直线 AB 斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=1$，

此时直线 l 为 x 轴，也过 $(\frac{1}{4},0)$． ……9 分

综上所述直线 l 恒过点 $(\frac{1}{4},0)$．

（20）（共 13 分）

解（Ⅰ）由 $f(x)=ae^x$，得 $f'(x)=ae^x$，所以 $f'(0)=a$ ……1 分

由 $g(x)=\ln x$，得 $g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $g'(1)=1$ ……2 分

由已知 $f'(0)=g'(1)$，得 $a=1$，……3 分

经检验，$a=1$ 符合题意．……4 分

（Ⅱ）由题意 $|PQ|=|e^t-\ln t|, t>0$

设 $h(x)=e^x-\ln x$，$x>0$，……1 分

则 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，……2 分

设 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，……3 分

又 $\varphi(1)=e-1>0$，$\varphi(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，……4 分

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一零点，

设零点为 x_0，则 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，且 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$．……5 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$．

所以，函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，……6 分

$h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}-\ln x_0$，

由 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，得 $\ln x_0=-x_0$

所以 $h(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0\geqslant 2$，由于 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，$h(x_0)>2$． ……8 分

从而 $h(x)>2$，即 $e^x-\ln x>2$，

也就是 $e^t-\ln t>2$，$|e^t-\ln t|>2$，

即 $|PQ|>2$，命题得证． ……9 分