2023 北京工大附中高一（下）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．复数 $z=1-2i$ 的虚部为（　　）

A．1　　B．i　　C．-2　　D．$-2i$

2．1，2，3，4，5，5 这组数据的第 50 百分位数是（　　）

A．3　　B．3.5　　C．4　　D．5

3．在△ABC 中，已知 $BC=6$，$AC=4$，$\sin A=\frac{3}{4}$，则角 $B=$（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

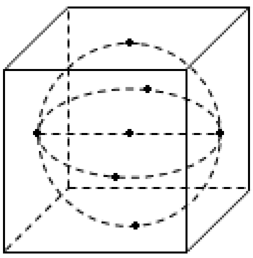
4．某班分成了 A、B、C、D 四个学习小组学习二十大报告，现从中随机抽取两个小组在班会课上进行学习成果展示，则 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的概率为（　　）

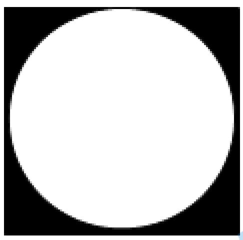
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

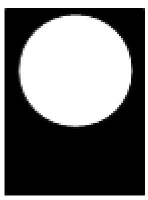
5．已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-1,k)$，若存在实数 λ，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则 k 和 λ 的值分别为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$，-2　　B．$\frac{1}{2}$，-2　　C．$-\frac{1}{2}$，，2　　D．$\frac{1}{2}$，2

6．如图所示，该几何体是从一个水平放置的正方体中挖去一个内切球（正方体各个面均与球面有且只有一个公共点）以后得到的，现用一竖直的平面去截这个几何体，则截面图形不可能是（　　）



A．　　B．

C．　　D．

7．已知直线 a，b 与平面 α，β，γ，能使 α∥β 成立的条件是（　　）

A．$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$　　　　B．$a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$

C．$\alpha/\!/\gamma$，$\beta/\!/\gamma$　　　　D．$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$

8．已知直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)=\sin(2x+\phi)$（$|\phi|<\frac{\pi}{2}$）的图象的一条对称轴，为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可把函数 $y=\sin2x$ 的图象（　　）

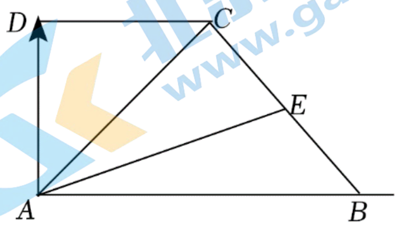
A．向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B．向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C．向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

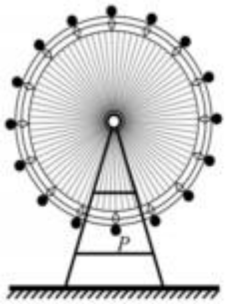
D．向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

9．如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2$，若 E 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$（　　）



A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．2　　　　D．4

10．如图，摩天轮的半径为40米．摩天轮的中心 O 点距离地面的高度为45米，摩天轮匀速逆时针旋转．每30分钟转一圈．若摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处．下面有关结论正确的是（　　）



A．经过10分钟，点 P 距离地面的高度为45米

B．第25分钟和第70分钟点 P 距离地面的高度相同

C．从第10分钟至第20分钟，点 P 距离地面的高度一直在上升

D．摩天轮旋转一周，点 P 距离地面的高度不低于65米的时间为10分钟

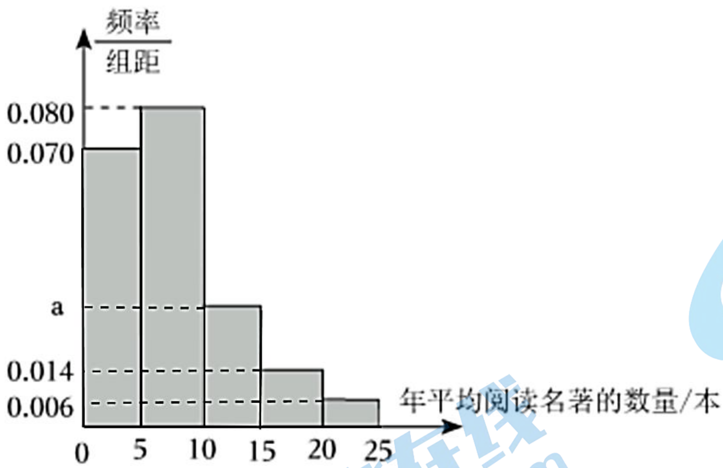
二、填空题共6小题，每小题5分，共30分．

11．（5分）若一个球的体积和表面积的数值相等，则该球的半径为______．

12．（5分）已知△ABC 的三条边长分别为5，7，8，则此三角形的最大角与最小角之和为______________．

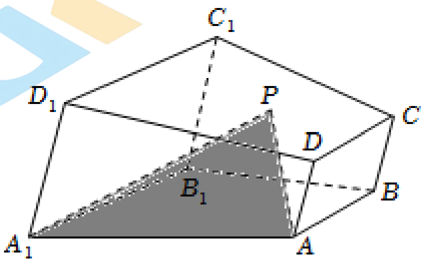
13．（5分）某学校为了调查高一年级600名学生年平均阅读名著的情况，通过抽样，获得了100名学生年平均阅读名著的数量（单位：本），将数据按照[0，5)，[5，10)，[10，15)，[15，20)，[20，25]分成5

组，制成了如图所示的频率分布直方图，则图中 a 的值为 ________；估计高一年级年平均阅读名著的数量不少于 10 本的人数为 _______．

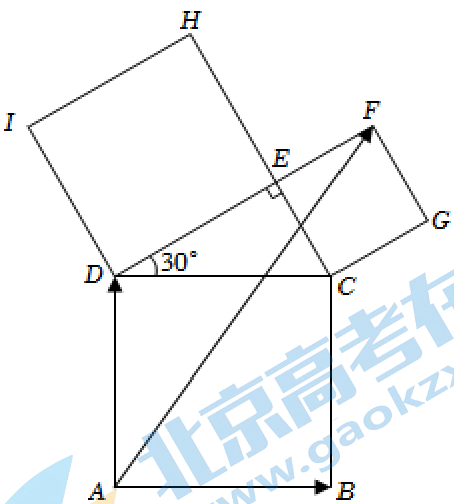


14．（5 分）木工小张在处理如图所示的一块四棱台形状的木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 时，为了经过木料表面 CDD_1C_1 内一点 P 和棱 AA_1 将木料平整锯开，需要在木料表面 CDD_1C_1 过点 P 画直线 l，则 l 满足 _______．（选出你认为正确的全部结论）

①$l\,//\,AA_1$；②$l\,//\,BB_1$；③l 与直线 AA_1 相交；④l 与直线 BB_1 相交．



15．（5 分）根据毕达哥拉斯定理，以直角三角形的三条边为边长作正方形，从斜边上作出的正方形的面积正好等于在两直角边作出的正方形面积之和．现在对直角三角形 CDE 按上述操作作图后，得如下图所示的图形若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x-y=$____________．



16．（5 分）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 O 为底面 $ABCD$ 的中心，点 P 在侧面 BB_1C_1C 的边界及其内部运动，且 $D_1O\perp OP$．给出下列结论：

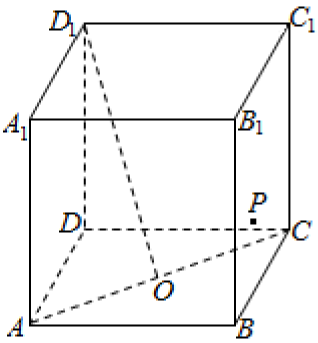
①$AC\perp D_1O$；

②三棱锥 $P-AA_1D$ 的体积为定值；

③点 P 在线段 CE 上（E 为 BB_1 的中点）；

④△D_1C_1P 面积的最大值为 2．

其中所有正确结论的序号是 ________．



三、解答题共 5 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.（13 分）在△ABC 中，$\sqrt{2}bc=b^2+c^2-a^2$.

（1）求 A；

（2）若 $a=2\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$，求 b.

18.（14 分）高考英语考试分为两部分，一部分为听说考试，满分 50 分，一部分为英语笔试，满分 100 分．英语听说考试共进行两次，若两次都参加，则取两次考试的最高成绩作为听说考试的最终得分，如果第一次考试取得满分，就不再参加第二次考试．为备考英语听说考试，李明每周都进行英语听说模拟考试训练，如表是他在第一次听说考试前的 20 次英语听说模拟考试成绩．

假设：①模拟考试和高考难度相当；②高考的两次听说考试难度相当；③若李明在第一次考试未取得满分后能持续保持听说训练，到第二次考试时，听说考试取得满分的概率可以达到$\frac{1}{2}$.

46	50	47	48	49	50	50	47	48	47
48	49	50	49	50	50	48	50	49	50

（Ⅰ）设事件 A 为"李明第一次英语听说考试取得满分"，用频率估计事件 A 的概率；

（Ⅱ）基于题干中假设，估计李明英语高考听说成绩为满分的概率的最大值．

19.（13 分）某同学用"五点法"画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$	
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	2	0		0

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$____________（直接写出结果即可）；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）求函数 $f(x)$ 在区间$[-\frac{\pi}{2}, 0]$上的最小值．

20．（15 分）如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AB\perp AD$，$AB=2CD=2$，并将直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 边旋转至 $ABEF$．

（Ⅰ）求证：直线 $AB\perp$平面 ADF；

（Ⅱ）求证：直线 $CE /\!/$平面 ADF；

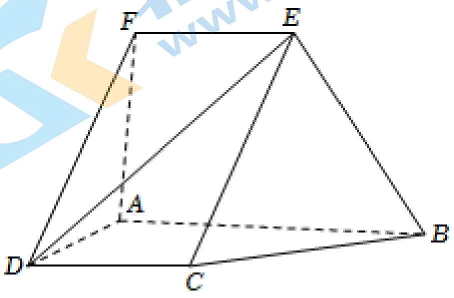
（Ⅲ）当平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$ 时，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使平面 ADE 与平面 BCE 垂直．并证明你的结论．

条件①：$AE=\sqrt{3}$；

条件②：$AD=1$；

条件③：$BE\perp DE$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅲ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．



21．（15 分）在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，对任意两个向量$\vec{m}=(x_1, y_1)$，$\vec{n}=(x_2, y_2)$，作：$\overrightarrow{OM}=\vec{m}$，$\overrightarrow{ON}=\vec{n}$．当$\vec{m}$，$\vec{n}$不共线时，记以 OM，ON 为邻边的平行四边形的面积为 $S(\vec{m}, \vec{n})=|x_1y_2-x_2y_1|$；当$\vec{m}$，$\vec{n}$共线时，规定 $S(\vec{m}, \vec{n})=0$．

（Ⅰ）分别根据下列已知条件求 $S(\vec{m}, \vec{n})$：

①$\vec{m}=(2, 1)$，$\vec{n}=(-1, 2)$；②$\vec{m}=(1, 2)$，$\vec{n}=(2, 4)$；

（Ⅱ）若向量$\vec{p}=\lambda\vec{m}+\mu\vec{n}$（$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，$\lambda^2+\mu^2\neq 0$），

求证：$S(\vec{p}, \vec{m})+S(\vec{p}, \vec{n})=(|\lambda|+|\mu|)S(\vec{m}, \vec{n})$；

（Ⅲ）若 A，B，C 是以 O 为圆心的单位圆上不同的点，记$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$．

（ⅰ）当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，求 $S(\vec{c}, \vec{a})+S(\vec{c}, \vec{b})$ 的最大值；

（ⅱ）写出 $S(\vec{a}, \vec{b})+S(\vec{b}, \vec{c})+S(\vec{c}, \vec{a})$ 的最大值．（只需写出结果）

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【分析】根据已知条件，结合虚部的定义，即可求解.

【解答】解：$z=1-2i$ 的虚部为 -2.

故选：C.

2.【分析】利用百分位数的定义计算即可.

【解答】解：1，2，3，4，5，5 这组数据共计 6 个，所以 $6\times50\%=3$，

故第 50 百分位数是$\frac{3+4}{2}=3.5$，

故选：B.

3.【分析】利用正弦定理，求出 $\sin B$，然后结合大边对大角确定 B 的值.

【解答】解：由已知得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

即$\frac{6}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{1}{2}$，又因为 $AC<BC$，

故 $B=\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

4.【分析】利用列举法结合古典概型概率公式即得.

【解答】解：从 A、B、C、D 四个学习小组中随机抽取两个小组有 AB，AC，AD，BC，BD，CD 共 6 种结果，

其中 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的结果有 AC，AD，BC，BD 共 4 种结果，

所以 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

5.【分析】根据$\vec{a}=\lambda\vec{b}$进行向量坐标的数乘运算可得出（2，1）＝（$-\lambda$，$k\lambda$），然后即可求出 k 和 λ 的值.

【解答】解：$\because\vec{a}=\lambda\vec{b}$，

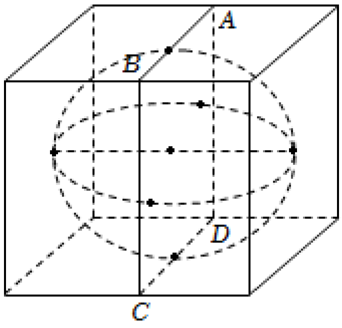
$\therefore$（2，1）＝（$-\lambda$，$k\lambda$），

$\therefore\begin{cases}-\lambda=2\\k\lambda=1\end{cases}$，解得 $\lambda=-2$，$k=-\frac{1}{2}$.

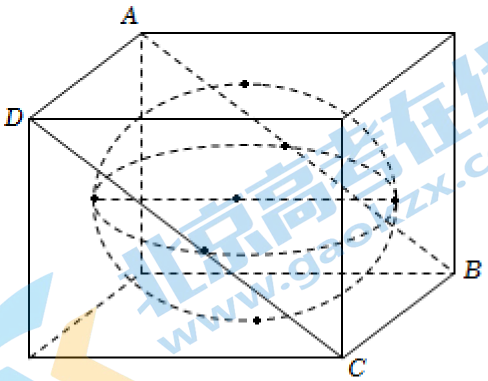
故选：A.

6.【分析】利用正方体内切球的性质，及球的截面圆即可求解.

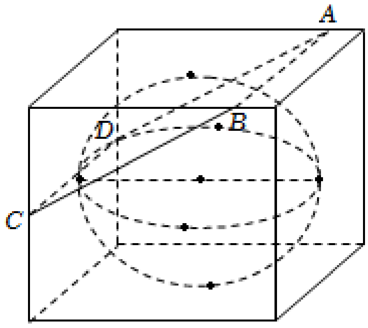
【解答】解：对于 A，用竖直的平面截正方体，该平面过球心，且过正方体四个面的中心，即可得到截面图形 A，如图：



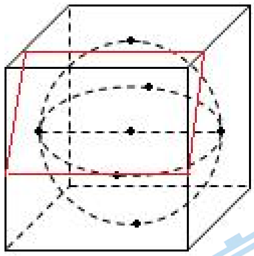
对于 B，用竖直的平面截正方体，该平面为正方体的对角面过球心，及正方体两个侧面的对角线的中心，即可得到截面图形 B；



对于 D，用竖直的平面截正方体，该平面过正方体一个侧面的中心，如图，切点在截面 $ABCD$ 的边 CD 的中点处，且 CD 为长方形 $ABCD$ 中较短的线段，即可得到 D.



对于 C，用竖直的平面截正方体，该平面过正方体一个侧面的中心，如图，得到的图形圆应位于中间，而 C 选项图中的圆整体偏上，故 C 错误.



故选：C.

7.【分析】由垂直于同一平面的两平面的位置关系判定 A；由平行于同一直线的两平面的位置关系判定 B；由平面与平面平行的性质及判定判断 C；由平面与平面平行的判定定理判断 D.

【解答】解：若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，可得 $\alpha /\!/ \beta$ 或 α 与 β 相交，故 A 错误；

若 $a /\!/ \alpha$，$a /\!/ \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$ 或 α 与 β 相交，故 B 错误；

若 α∥γ，β∥γ，由平面与平面平行的性质及判定，可得 α∥β，故 C 正确；

若 a⊂α，b⊂α，a∥β，b∥β，且 a 与 b 相交，则 α∥β，若 a 与 b 不相交，则不一定有 α∥β，故 D 错误.

故选：C.

8.【分析】由三角函数图象的性质可得：$y=f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，

由三角函数图象的平移可得：为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得解.

【解答】解：令 $2x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

由 $x=\frac{\pi}{6}$是此方程的一个解，则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

即 $y=f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，

所以为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可把函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，

故选：C.

9.【分析】由 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$，然后结合$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}^2$求解即可.

【解答】解：在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$AD=2$，

由 E 为 BC 的中点，

则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2=2$，

故选：C.

10.【分析】由题意可得 P 点距离地面的函数 $f(x)$ 的解析式，分别求出 A，B，C，D 中的数值，并判断它们的真假.

【解答】解：由摩天轮的半径为 40 米．摩天轮的中心 O 点距离地面的高度为 45 米，可得摩天轮的最低处离地面 5 米，

因为每 30 分钟转一圈，可得最小正周期 $T=30$，可得$\frac{2\pi}{\omega}=30$，所以 $\omega=\frac{\pi}{15}$，

设 P 点距离地面的高度为：函数 $f(x)=45-40\cos\frac{\pi}{15}x$，

A 中，10 分钟时，$f(10)=45-40\cos\frac{2\pi}{3}=45+40\times\frac{1}{2}=65$，所以 A 不正确；

B 中，因为 $f(25)=45-40\cos\frac{5}{3}\pi=45-40\times\frac{1}{2}=25$，$f(70)=f(10)=65$，显然不相等，所以 B 不正确；

C 中，半个周期为 15，所以从第 10 分钟至第 20 分钟，P 点的高度先增后减，所以 C 不正确；

D 中，令 $f(x)=45-40\cos\frac{\pi}{15}x\geqslant 65$，可得 $\cos\frac{\pi}{15}x\leqslant -\frac{1}{2}$，所以旋转一周时，可得 $\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{15}x\leqslant\frac{4}{3}\pi$，

即 $10\leqslant x\leqslant 20$，故时间长度为 10 分钟，所以 D 正确．

故选：D．

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11．【分析】设出球的半径，求出球的体积和表面积，利用相等关系求出球的半径即可．

【解答】解：设球的半径为 r，则球的体积为：$\frac{4\pi}{3}r^3$，球的表面积为：$4\pi r^2$，

因为球的体积与其表面积的数值相等，所以 $\frac{4\pi r^3}{3}=4\pi r^2$，

解得 $r=3$，

故答案为：3．

12．【分析】先利用余弦定理求出 B，然后结合内角和定理求解．

【解答】解：由题意设 $a=5$，$b=7$，$c=8$，

易知，中间角为 B，

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{25+64-49}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$，$B\in(0,\pi)$，

$B=\frac{\pi}{3}$，故 $A+C=\frac{2\pi}{3}$．

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$．

13．【分析】利用频率分布直方图的面积和为 1 求 a，再利用样本估计总体即可．

【解答】解：由题意得，

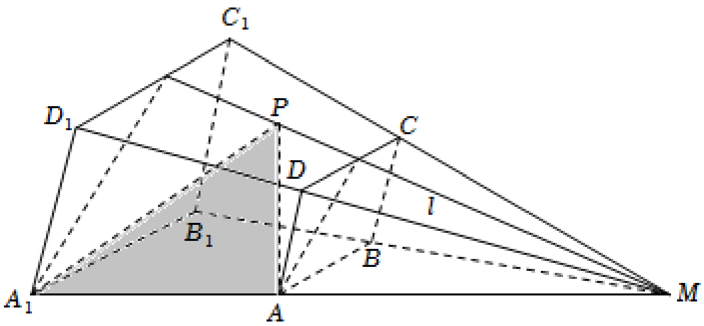
$a=\frac{1}{5}-0.006-0.014-0.080-0.070=0.030$，

估计高一年级年平均阅读名著的数量不少于 10 本的人数为 $600\times(0.014+0.006+0.030)\times5=150$ 人；

故答案为：0.030，150．

14．【分析】延长 A_1A，B_1B 交于点 M，则 C_1C，D_1D 的延长线也过点 M，则直线 PM 即为所求作的直线 l，由此可得出结论．

【解答】解：延长 A_1A，B_1B 交于点 M，则 C_1C，D_1D 的延长线也过点 M，如下图所示：



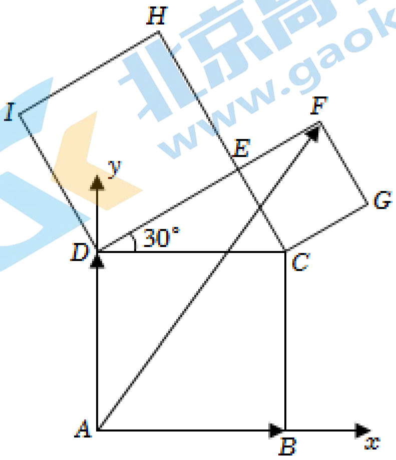
因为 $M\in A_1A$，则 $M\in$平面 PA_1A，则直线 PM 即为所求作的直线 l.

所以，直线 l 与直线 A_1A、直线 B_1B 都相交.

故答案为：③④.

15.【分析】建立平面直角坐标系，标出各个点的坐标，利用平面向量的坐标运算即可得解.

【解答】解：如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为 x，y 轴建立平面直角坐标系，



设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则正方形 $DEHI$ 的边长为 $\sqrt{3}a$，正方形 $EFGC$ 边长为 a 可知 $A(0,\ 0)$，$B(2a,\ 0)$，$D(0,\ 2a)$，$DF=(\sqrt{3}+1)a$，

则 $x_F=(\sqrt{3}+1)a\cdot\cos30°$，$y_F=(\sqrt{3}+1)a\cdot\sin30°+2a$，即 $F(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{5+\sqrt{3}}{2}a)$，

又 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，$\therefore(\frac{3+\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{5+\sqrt{3}}{2}a)=x(2a,\ 0)+y(0,\ 2a)=(2ax,\ 2ay)$，

即 $\begin{cases}2ax=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a\\2ay=\frac{5+\sqrt{3}}{2}a\end{cases}$，即 $2ax-2ay=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a-\frac{5+\sqrt{3}}{2}a$，

化简得 $x-y=-\frac{1}{2}$，

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

16.【分析】根据立体几何中线线，线面，面面的位置关系，结合正方体的特征，逐个分析，即可得出答案.

【解答】解：对于①：由正方体的特征可得 $AC\perp DD_1$，$AC\perp BD$，

又 $DD_1\cap BD=D$，

所以 $AC\perp$平面 D_1DBB_1，

又因为 $D_1O\subset$平面 D_1DBB_1，

所以 $AC\perp D_1O$，故①正确；

对于②：三棱锥 $P-AA_1D$ 的体积为$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AA_1D}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AA_1\times AD\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，故②正确；

对于③：当 P 位于 C 点是，$D_1O\perp OC$，

当 P 位于 BB_1 的中点 E 时，由已知得，

$DD_1=2$，$DO=BO=\sqrt{2}$，

$BE=B_1E=1$，$B_1D_1=2\sqrt{2}$，

所以 $OD_1=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，

$OE=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，$D_1E=\sqrt{8+1}=3$，

所以 $OD_1^2+OE^2=D_1E^2$，

得 $OD_1\perp OE$，

又 $OE\cap OC=O$，

所以 $D_1O\perp$平面 OEC，得到 P 的轨迹在线段 EC 上，故③正确；

对于④：由 $C_1E=CP_1=\sqrt{5}$，$CC_1=2<\sqrt{5}$，

所以点 P 到棱 C_1D_1 的最大值为$\sqrt{5}$，

所以$\triangle D_1C_1P$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$，故④错误．

故答案为：①②③．

三、解答题共 5 小题，共 70 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.【分析】（1）由题意及余弦定理可得 A 角的余弦值，再由 A 角的范围，可得 A 角的大小；

（2）由（1）及正弦定理可得 b 边的大小．

【解答】解：（1）因为$\sqrt{2}bc=b^2+c^2-a^2$，

由余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

可得$\sqrt{2}bc=2bc\cos A$，

可得$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\frac{\pi}{4}$；

（2）由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，而 $a=2\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$A=\frac{\pi}{4}$，

所以$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

解得：$b=2\sqrt{3}$.

18.【分析】（Ⅰ）根据古典概型公式计算，即可求解；

（Ⅱ）计算出李明第二次英语听说考试取得满分的概率，然后根据题意，由独立事件的乘法公式计算李明英语高考听说成绩为满分的概率的最大值.

【解答】解：（Ⅰ）依题意，李明在20次英语听说模拟考试中有8次取得满分，

取得满分的频率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，所以用频率估计事件A的概率为$P(A)=\frac{2}{5}$；

（Ⅱ）设事件B为“李明第二次英语听说考试取得满分”，事件C为“李明高考英语听说考试取得满分”，

依题意，$P(B)=\frac{1}{2}$，所以$P(C)\leqslant P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A})P(B)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$，

那么他英语高考听说考试最终成绩为满分的概率的最大值可以达到$\frac{7}{10}$.

19.【分析】（Ⅰ）结合最大值、特殊点间的横向距离以及最高点求坐标求φ的值；

（Ⅱ）结合$y=\sin x$的单调性构造出关于x的不等式求解；

（Ⅲ）结合$y=\sin x$的性质，利用换元思想求解.

【解答】解：（Ⅰ）$A=2$，$T=2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

所以$2\times\frac{\pi}{6}+\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，结合$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$得$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；

（Ⅱ）由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

故$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

（Ⅲ）由$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，得$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，

故当$x=-\frac{\pi}{3}$时，$f(x)_{min}=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$.

20.【分析】（Ⅰ）依题意可得$AB\perp AF$，且$AB\perp AD$，由此证明直线$AB\perp$平面ADF；

（Ⅱ）推导出$DC\parallel EF$且$DC=EF$，从而得到$CE\parallel DF$，由此证明直线$CE\parallel$平面ADF；

（Ⅲ）根据面面垂直的性质得到$AD\perp$平面$ABEF$，从而得到$AD\perp BE$，再根据所选条件一一证明即可.

【解答】解：（Ⅰ）证明：在直角梯形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，

将直角梯形$ABCD$绕AB边旋转到$ABEF$，则$AB\perp AF$，

又$AD\cap AF=A$，AD，$AF\subset$平面ADF，

∴直线$AB\perp$平面ADF；

（Ⅱ）证明：依题意得$DC\parallel EF$，且$DC=EF$，

∴四边形$DCEF$为平行四边形，

$CE\parallel DF$，$DF\subset$平面 ADF，$CE\not\subset$平面 ADF，

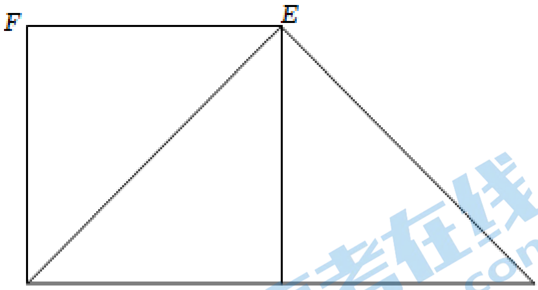
∴直线 $CE\parallel$平面 ADF；

（Ⅲ）证明：∵平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$，$AB\perp AD$，

平面 $ABCD\cap$平面 $ABEF=AB$，$AD\subset$平面 $ABCD$，

∴$AD\perp$平面 $ABEF$，$BE\subset$平面 $ABEF$，∴$AD\perp BE$，

过点 E 作 $EM\perp AB$，交 AB 于点 M，



若选条件①：$AE=\sqrt{3}$，$EF=1$，∴$AF=\sqrt{AE^2-EF^2}=\sqrt{2}$，

∴$BE=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，

此时 $\cos\angle AEB=\frac{AE^2+BE^2-AB^2}{2AE\cdot BE}=2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{1}{3}$，

∴$60^\circ<\angle AEB\angle 90^\circ$，

如图，过点 E 作 $EH\perp AE$，交 AB 的延长线于点 H，

∵$AD\perp$平面 $ABEF$，$EH\subset$平面 $ABEF$，∴$AD\perp EH$，

∵$AD\cap AE=A$，AD，$AE\subset$平面 ADE，∴$EH\perp$平面 ADE，

∵$EH\subset$平面 HCE，

∴平面 $HCE\perp$平面 ADE，平面 BCE 与平面 ADE 不垂直，

若选条件②：$AD=1$，则 $AF=1$，

∴$AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

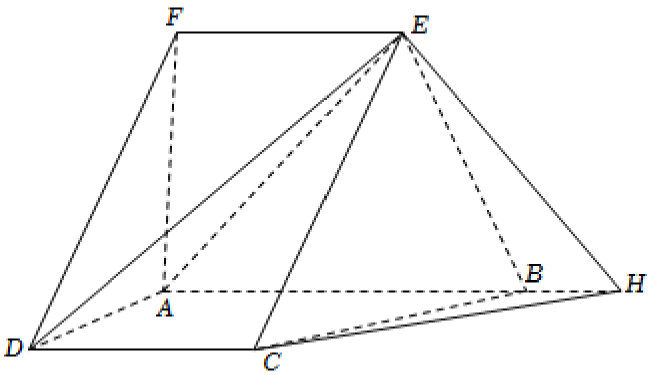
∴$AE^2+BE^2=AB^2$，∴$AE\perp EB$，

∵$AD\cap AE=A$，AD，$AE\subset$平面 ADE，∴$EB\perp$平面 ADE，

∵$EB\subset$平面 BCE，∴平面 $BCE\perp$平面 ADE；

若选条件③：$BE\perp DE$，又 $AD\perp BE$，$AD\cap DE=D$，

AD、$AE\subset$平面 ADE，∴$EB\perp$平面 ADE，



∵$EB\subset$平面 BCE，

∴平面 $BCE\perp$平面 ADE.

21.【分析】(1) 由 $S(\vec{m},\ \vec{n})=|x_1y_2-x_2y_1|$求解；

(2) 由 $S(\vec{m},\ \vec{n})=|x_1y_2-x_2y_1|$证明；

(3) (*i*) 设 $\langle\vec{c},\ \vec{a}\rangle=\alpha$，由 $S(\vec{c},\ \vec{a})+S(\vec{c},\ \vec{b})=\sin\alpha+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$求解；

$\langle\vec{c},\ \vec{a}\rangle=\alpha$ $\langle\vec{c},\ \vec{b}\rangle=\beta$，$\langle\vec{b},\ \vec{a}\rangle=\gamma$ $S(\vec{a},\ \vec{b})+S(\vec{b},\ \vec{c})+S(\vec{c},\ \vec{a})=\sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha$求解.

【解答】(1) 解：因为$\vec{m}=(2,\ 1)$，$\vec{n}=(-1,\ 2)$，

且 $S(\vec{m},\ \vec{n})=|x_1y_2-x_2y_1|$，

所以 $S(\vec{m},\ \vec{n})=|2\times2-1\times(-1)|=5$；

又$\vec{m}=(1,\ 2)$，$\vec{n}=(2,\ 4)$，

是 $S(\vec{m},\ \vec{n})=|1\times4-2\times2|=0$；

(2) 因为向量$\vec{m}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{n}=(x_2,\ y_2)$，

且向量$\vec{p}=\lambda\vec{m}+\mu\vec{n}(\lambda,\ \mu\in R,\ \lambda^2+\mu^2\neq0)$，

则$\vec{p}=(\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2)$，

所以 $S(\vec{p},\ \vec{m})=|(\lambda x_1+\mu x_2)y_1-(\lambda y_1+\mu y_2)x_1|=|\mu||x_1y_2-x_2y_1|$，

同理 $S(\vec{p},\ \vec{n})=|\lambda||x_1y_2-x_2y_1|$.

所以 $S(\vec{p},\ \vec{m})+S(\vec{p},\ \vec{n})=(|\lambda|+|\mu|)S(\vec{m},\ \vec{n})$；

(3) (*i*) 设 $\langle\vec{c},\ \vec{a}\rangle=\alpha$，因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以 $\langle\vec{c},\ \vec{b}\rangle=\frac{3\pi}{2}-\alpha$，

所以 $S(\vec{c},\ \vec{a})+S(\vec{c},\ \vec{b})=\sin\alpha+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$，

$=\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$.

当 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，

$S(\vec{c},\vec{a})+S(\vec{c},\vec{b})$取得最大值$\sqrt{2}$；

（*ii*） $S(\vec{a},\vec{b})+S(\vec{b},\vec{c})+S(\vec{c},\vec{a})$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.