

人大附中 2019-2010 学年度高三 10 月质量检测题

数学



北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)

一、 选择题

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+2}{x} \leq 0 \right\}$, 则集合 $C_U A =$ 【 】

A. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$ B. $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x > 0\}$ C. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x \geq 0\}$ D. $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0\}$

2. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 【 】

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 下列函数中是奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是 【 】

A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = 2^x$ C. $y = x + \frac{1}{x}$ D. $y = x - \frac{1}{x}$

4. 为了得到函数 $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只要把 $y = \cos\frac{1}{2}x$ 的图象上所有的点 【 】

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

5. “ $\lg x > \lg y$ ” 是 “ $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ ” 的 【 】

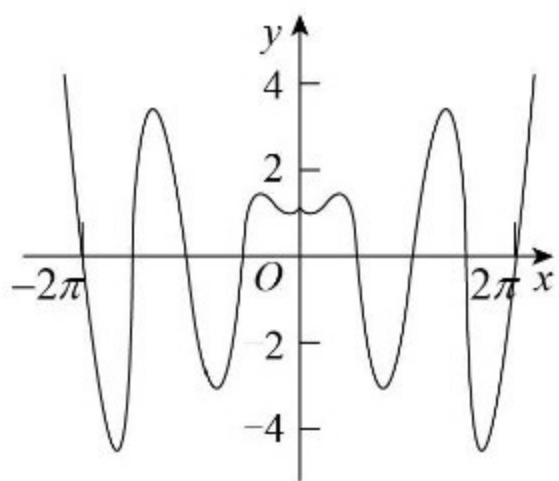
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 如果实数集 \mathbf{R} 的子集 X 满足: 任意开区间 (a, b) (其中 $a < b$) 中都含有 X 中的元素, 则称 X 在 \mathbf{R} 中稠密,

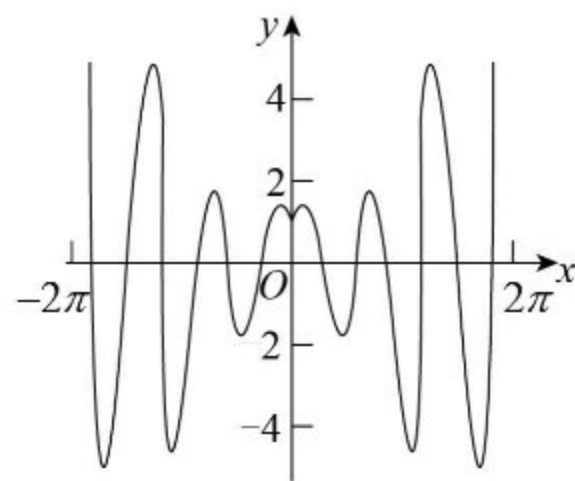
若 “ \mathbf{R} 的子集 X 在 \mathbf{R} 中不稠密”, 则 【 】

A. 任意开区间都不含有 X 中的点 B. 存在开区间不含有 X 中的点
C. 任意开区间都含有 X 的补集中的点 D. 存在开区间含有 X 的补集中的点

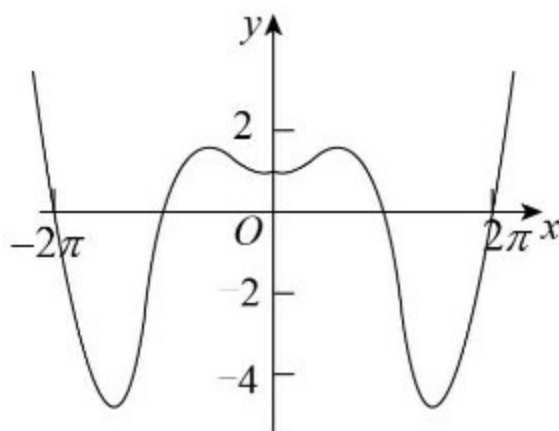
7. 函数 $f(x) = x \sin 2x + \cos x$ 的大致图象有可能是



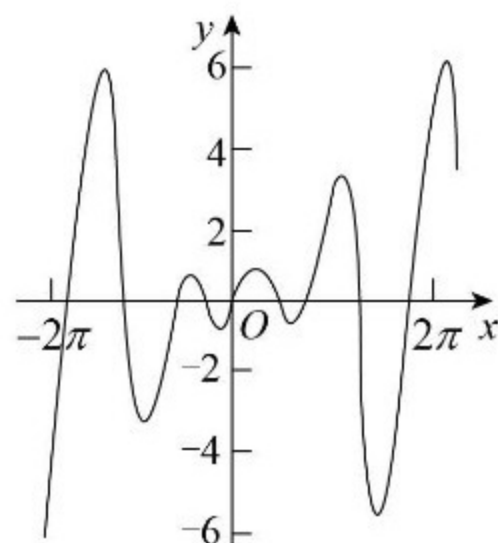
A.



B.



C.



D.

8. 已知 $f(x) = |\log_2 x|$, 关于 x 的方程 $f(x) = m (m > 0)$ 的根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 关于 x 的方程 $f(x) = \frac{4}{m+1}$,

$\left(m \neq \frac{4}{m+1}\right)$ 的根为 $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$. 当 m 变化时, (晓观数学) $\left| \frac{x_3 - x_4}{x_1 - x_2} \right|$ 的最小值为

【 】

A. $16\sqrt{2}$

B. 8

C. $8\sqrt{2}$

D. 16

二、 填空题

9. 已知向量 $a = (2, 3)$, $b = (t, 2)$, 若 a 与 b 共线, 则实数 $t =$ _____.

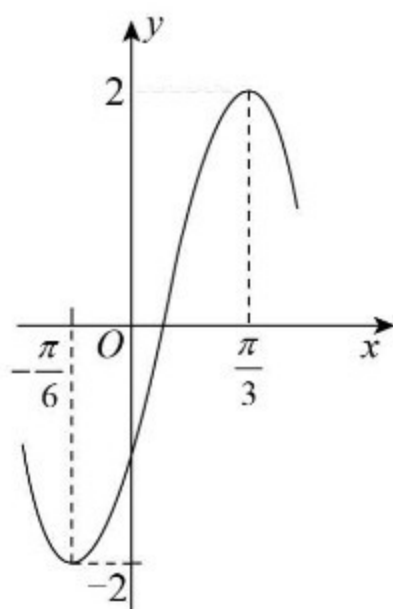
10. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln x}$ 的定义域为 _____.



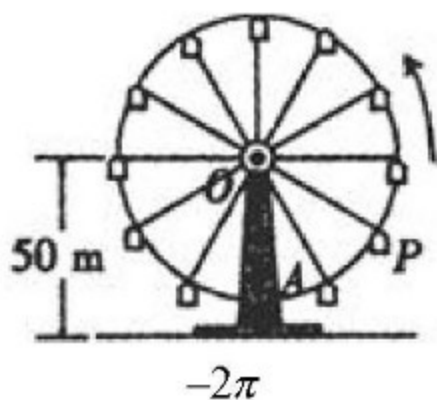


北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)

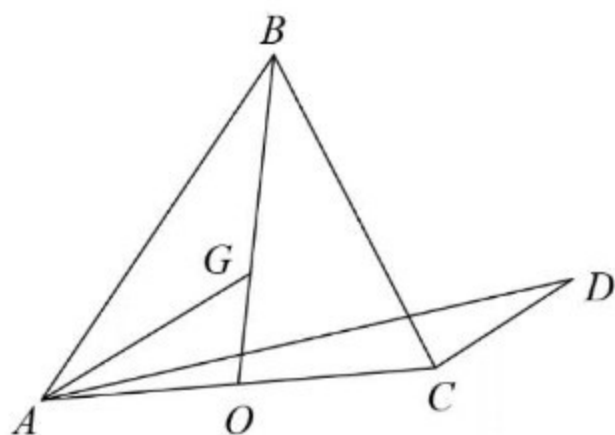
11. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(x) =$ _____.



12. 如图, 某游乐园内摩天轮的中心 O 点距离地面的高度为 50m , 摩天轮做匀速运动, 摩天轮上一点 P 自最低点 A 点起经过 $t \text{ min}$ 后, 点 P 的高度 $h = 40 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right) + 50$ (单位: m), 那么在摩天轮转动一圈的过程中, 点 P 的高度在距地面 70m 以上的...



13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BO 为边 AC 上的中线, $\overline{BG} = 2\overline{GO}$, 设 $\overline{CD} \parallel \overline{AG}$, 若 $\overline{AD} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \lambda\overline{AC}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 则 λ 的值为_____.



14. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T , 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+T) = Tf(x)$ 成立.

(1) 给出下列两个函数:

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = a^x$ ($0 < a < 1$), 其中属于集合 M 的函数是_____.

(2) 若函数 $f(x) = \sin kx \in M$, (晓观数学) 则实数 k 的取值集合为_____.

三、

解答题

15. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + a (x \in \mathbb{R})$ 的最大值为 5.

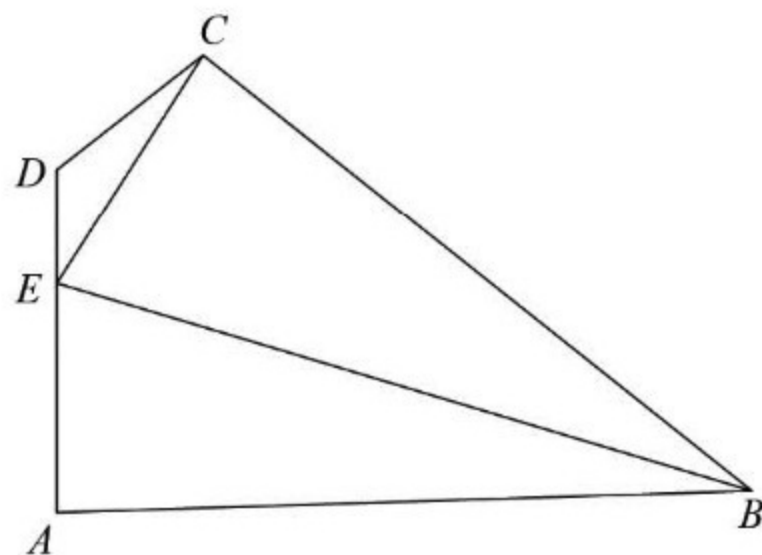
(1) 求 a 的值和 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $DA \perp AB$, $DE = 1$, $EC = \sqrt{7}$, $EA = 2$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, $\angle BEC = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\sin \angle CED$ 的值;

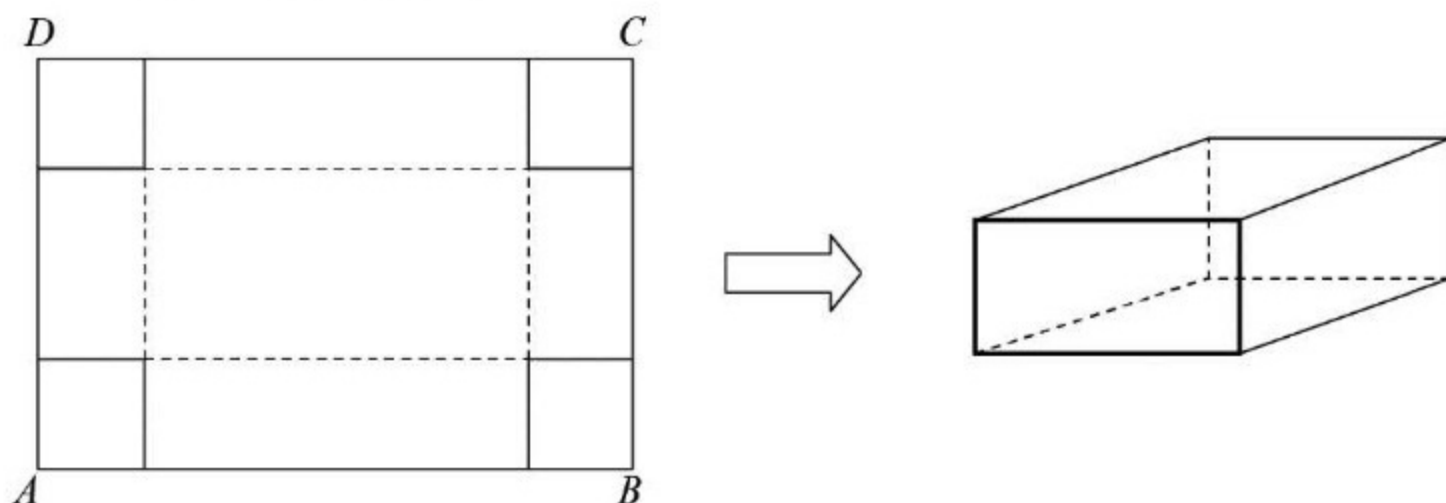
(2) 求 BE 的长.



17. 在一张足够大的纸板上截取一个面积为 3600 平方厘米的矩形纸板 $ABCD$, 然后在矩形纸板的四个角上切去边长相等的小正方形, 再把它的边沿虚线折起, 做成一个无盖的长方体纸盒 (如图), 设小正方形边长为 x 厘米, 矩形纸板的两边 AB 、 BC 的长分别为 a 厘米和 b 厘米, 其中 $a \geq b$.

(1) 当 $a = 90$ 时, 求纸盒侧面积的最大值;

(2) 试确定 a, b, x 的值, 使得纸盒的体积最大, 并求出最大值.



北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)



18. 已知函数 $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - a^2x - 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线 l 与直线 $2x - y + 1 = 0$ 平行, 求 l 的方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围.

19. 设函数 $f(x) = x \cdot \ln x + ax (a \in \mathbb{R})$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上的最小值;

(2) 若 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x$, (晓观数学) 求证: $a \geq 0$ 是函数 $y = g(x)$ 在 $x \in (1, 2)$ 时单调递增的充分不必要条件.

20. 如图, 设 A 是由 $n \times n (n \geq 2)$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 表示位于第 i 行第 j 列的实数, 且 $a_{ij} \in \{1, -1\}$.

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

定义 $p_{st} = a_{s1}a_{t1} + a_{s2}a_{t2} + \dots + a_{sn}a_{tn} (s, t = 1, 2, \dots, n)$ 为第 s 行与第 t 行的积, 若对于任意 $s, t (s \neq t)$, 都有 $p_{st} = 0$,

则称数表 A 为完美数表.

(1) 当 $n = 2$ 时, 试写出一个符合条件的完美数表;

(2) 证明: 不存在 10 行 10 列的完美数表;

(3) 设 A 为 n 行 n 列的完美数表, 且对于任意的 $i = 1, 2, \dots, l$ 和 $j = 1, 2, \dots, k$, 都有 $a_{ij} = 1$, 证明: $ki \leq n$.