

# 2022 北京丰台高一（上）期中

## 数 学（B 卷）

### 第I卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{-1, 2, 5\}$                       B.  $\{2, 4, 5\}$                       C.  $\{2\}$                               D.  $\{-1, 2, 4, 5\}$

2. 已知命题  $p: \forall x > 0, x^2 \geq 0$ , 则  $\neg p$  ( )

- A.  $\exists x_0 > 0, x_0^2 < 0$                       B.  $\forall x > 0, x^2 < 0$   
C.  $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 < 0$                       D.  $\forall x \leq 0, x^2 < 0$

3. 下列各式正确的是 ( )

- A.  $8^{\frac{2}{3}} = 2$                               B.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -\frac{1}{8}$   
C.  $\sqrt{(\pi-4)^2} = \pi-4$                       D.  $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{27}{8}$

4. 已知  $a > b$ , 在下列不等式中一定成立的是 ( )

- A.  $a^2 > b^2$                               B.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$                               C.  $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$                               D.  $|a| > |b|$

5. 函数  $y = x^2 - 2x - 1, x \in [-1, 2]$  的值域是 ( )

- A.  $[-2, 2]$                               B.  $[-1, 2]$                               C.  $[-2, 1]$                               D.  $[-1, 1]$

6. 下列函数在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 并且图象关于原点对称的是 ( )

- A.  $y = x^{\frac{1}{2}}$                               B.  $y = x^2$                               C.  $y = x^3$                               D.  $y = x^{-1}$

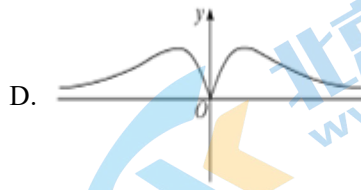
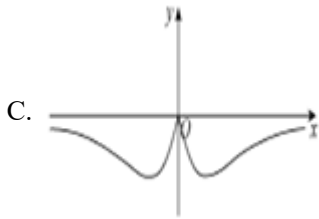
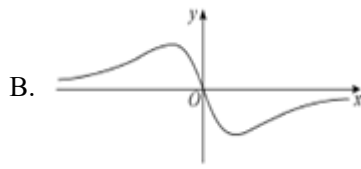
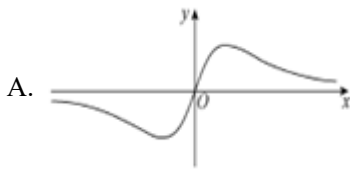
7. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则 “ $x < 1$ ” 是 “ $\frac{1}{x} > 1$ ” ( )

- A. 充分不必要条件                              B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                      D. 既不充分也不必要条件

8. 已知幂函数  $f(x)$  的图像经过点  $(4, 2)$ , 则  $f(2) =$  ( )

- A. 4    B. 1    C.  $\sqrt{2}$     D.  $2\sqrt{2}$

9. 函数  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$  的图像大致为 ( )



10. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，在区间  $(-\infty, 0]$  上单调递增，且  $f(2) = 0$ ，则满足

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2x} > 0$$

的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$       D.  $(-2, 2)$

第II卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

12. 已知  $x > 0$ , 则当  $x =$ \_\_\_\_\_时,  $x + \frac{1}{x}$  取得最小值, 且最小值为\_\_\_\_\_.

13. 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - 2ax + 4 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 2]$ , 则能够说明“若  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值为  $f(2)$ , 则  $f(x)$  是增函数”为假命题的一个函数是\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 关于函数  $f(x)$  有以下四个结论:

①  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ;

②  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 4]$ ;

③ 若  $f(x) = 2$ , 则  $x$  的值是  $-\sqrt{2}$ ;

④  $f(x) < 1$  的解集为  $(-1, 1)$ .

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 已知集合  $A = \{x | -3 \leq x < 6\}$ ,  $B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 8\}$ , 求:

(1)  $A \cap B$ ;

- (2)  $A \cup B$ ;  
 (3)  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$ .

17. 已知集合  $A = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x | -3 < x - 2 < 3\}$ ,  $C = \{x | a < x < 2 - a\}$ .

- (1) 求  $A \cap B$ ;  
 (2) 已知 \_\_\_\_\_, 求实数  $a$  的取值范围;

从下面给出的三个条件中任选一个, 补充在上面问题中, 并进行解答.

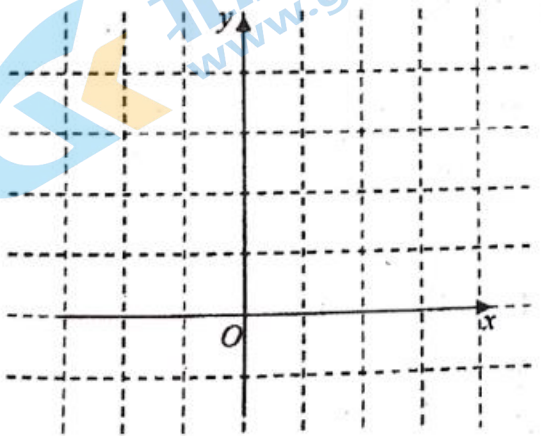
条件①:  $C \subseteq B$ ;

条件②:  $B \cap C = \emptyset$ ;

条件③:  $p: x \in B$ ,  $q: x \in C$ , 且  $p$  是  $q$  的必要而不充分条件.

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

18. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ .



- (1) 在直角坐标系  $xOy$  中, 画出函数  $f(x)$  的图象, 并写出函数的单调增区间;  
 (2) 若  $f(a) = 2$ , 求实数  $a$  的值;  
 (3) 若直线  $y = k$  与函数  $f(x)$  的图象没有公共点, 直接写出  $k$  的范围.

19. 已知函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

- (1) 判断  $f(x)$  奇偶性;  
 (2) 证明:  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增;  
 (3) 求函数  $f(x)$  在区间  $[-3, -1]$  上的最小值.

20. 已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数. 对任意  $a, b \in \mathbf{R}$ , 总有  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ , 且  $f(-1) = 1$ .

- (1) 求  $f(0)$ ,  $f(2)$ ;  
 (2) 证明:  $f(x)$  是奇函数;

(3) 若实数  $t$  满足:  $f(t-1)+f(t)<0$ , 求  $t$  取值范围.

21. 某企业生产一种电子设备, 通过市场分析, 每台设备的成本与产量满足一定的关系式. 设年产量为  $x$

( $0 < x \leq 200$ ,  $x \in \mathbf{N}$ ) (单位: 台), 若年产量不超过 70 台, 则每台设备的成本为  $y_1 = \frac{1}{2}x + 40$  (单位:

万元); 若年产量超过 70 台不超过 200 台, 则每台设备的成本为  $y_2 = 101 + \frac{6400}{x^2} - \frac{2080}{x}$  (单位: 万元),

每台设备售价为 100 万元, 假设该企业生产的电子设备能全部售完.

(1) 写出年利润  $y$  (万元) 关于年产量  $x$  (台) 的关系式;

(2) 当年产量为多少台时, 年利润最大, 最大值为多少万元?



## 参考答案

### 一、选择题

#### 1. 【答案】B

【解析】【分析】根据集合的定义，求得集合A，再根据集合的并运算求解即可.

【详解】因为  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid (x+1)(x-2) = 0\} = \{2\}$ ，又  $B = \{2, 4, 5\}$ ，

故  $A \cup B = \{2, 4, 5\}$

故选：B.

#### 2. 【答案】A

【解析】【分析】全称与特称命题的否定分两步，第一步：改写符号（ $\forall$ 与 $\exists$ 互改）；第二步：否定后半部分，据此回答即可.

【详解】第一步：改写符号，由  $\forall x > 0$  改成  $\exists x_0 > 0$ ；

第二步：对  $x^2 \geq 0$  进行否定得  $x_0^2 < 0$ ；

所以  $\neg p$  为：  $\exists x_0 > 0, x_0^2 < 0$ .

故选：A.

#### 3. 【答案】D

【解析】【分析】根据指数幂的性质计算可得.

【详解】解：对于A：  $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$ ，故A错误；

对于B：  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ ，故B错误；

对于C：  $\sqrt{(\pi-4)^2} = |\pi-4| = 4-\pi$ ，故C错误；

对于D：  $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ ，故D正确；

故选：D

#### 4. 【答案】C

【解析】【分析】利用特殊值判断A、B、D，利用不等式的性质判断C；

【详解】解：对于A：当  $a=0, b=-1$  时满足  $a > b$ ，但是  $a^2 < b^2$ ，故A错误；

对于B：当  $a=1, b=-1$  时满足  $a > b$ ，但是  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故B错误；

对于C：因为  $c^2 + 1 \geq 1$ ，所以  $\frac{1}{c^2 + 1} > 0$ ，因为  $a > b$ ，所以  $\frac{a}{c^2 + 1} > \frac{b}{c^2 + 1}$ ，故C正确；

对于D：当  $a=1, b=-1$  时满足  $a > b$ ，但是  $|a| = |b|$ ，故D错误；

故选：C

5. 【答案】A

【解析】【分析】首先求出函数的对称轴及开口方向，即可求出函数的最小值与最大值，即可求出函数的值域；

【详解】解：因为  $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$  对称轴为  $x=1$ ，开口向上，因为  $x \in [-1, 2]$ ，所以当  $x=1$  时，函数取值最小值  $y_{\min} = -2$ ，当  $x=-1$  时函数取得最大值，即  $y_{\max} = 2$ ，所以  $y \in [-2, 2]$ ，即函数的值域为  $[-2, 2]$ ；

故选：A

6. 【答案】D

【解析】【分析】利用排除法,结合幂函数的性质进行判断即可.

【详解】 $\because y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ , 且  $x \in (-\infty, 0)$ , 排除 A.

$\because$  函数在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 排除 C.

$\because$  函数的图象关于原点对称, 排除 B.

故选:D.

7. 【答案】B

【解析】【分析】根据充分必要条件的定义判断.

【详解】 $x = -1 < 1$ ，但  $\frac{1}{x} = -1 < 1$ ，不充分，

$\frac{1}{x} > 1$  时  $0 < x < 1$ ，必要性满足，故是必要不充分条件.

故选：B.

8. 【答案】C

【解析】【分析】根据幂函数的定义和幂函数过的一点可求出具体表达式，再求  $f(2)$  即可.

【详解】 $f(x)$  是幂函数，依题意可设  $f(x) = x^\alpha$ ，又  $f(4) = 2$ ，即  $4^\alpha = 2 = 2^{2^\alpha}$ ，解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ ，故

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，故  $f(2) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ .

故选：C

9. 【答案】A

【解析】【分析】判断函数的奇偶性和对称性，当  $x > 0$  时， $f(x) > 0$ ，利用排除法进行判断即可.

【详解】解：  $f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x)$ ，即  $f(x)$  是奇函数，图象关于原点对称，排除 C，D，

当  $x > 0$  时， $f(x) > 0$ ，排除 B，

故选：A.

10. 【答案】C

【解析】【分析】根据偶函数的性质得到  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 即可得到  $f(x)$  的取值情况, 再由偶函数的性质得到不等式为  $\frac{f(x)}{x} > 0$ , 分两种情况讨论, 分别计算可得.

【详解】解: 因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 在区间  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 且  $f(-x) = f(x)$ , 又  $f(2) = 0$ , 所以  $f(-2) = f(2) = 0$ , 所以当  $-2 < x < 2$  时  $f(x) > 0$ , 当  $x < -2$  或  $x > 2$  时  $f(x) < 0$ ,

则  $\frac{f(x) + f(-x)}{2x} > 0$ , 即  $\frac{2f(x)}{2x} > 0$ , 即  $\frac{f(x)}{x} > 0$ ,

所以  $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ ,

解得  $0 < x < 2$  或  $x < -2$ , 综上可得  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ .

故选: C

## 二、填空题

11. 【答案】 $(-3, +\infty)$

【解析】【分析】根据分母不为零及偶次方根的被开方数非负得到不等式, 解得即可.

【详解】解: 因为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ , 所以  $x+3 > 0$ , 解得  $x > -3$ ,

所以函数的定义域为  $(-3, +\infty)$ ;

故答案为:  $(-3, +\infty)$

12. 【答案】 ①. 1 ②. 2

【解析】【分析】利用基本不等式计算可得.

【详解】解: 因为  $x > 0$ , 所以  $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ , 当且仅当  $x = \frac{1}{x}$ , 即  $x = 1$  时取等号,

即当  $x = 1$  时  $x + \frac{1}{x}$  取得最小值, 且最小值为 2;

故答案为: 1; 2

13. 【答案】 $(-2, 2)$

【解析】【分析】依题意可得  $\Delta < 0$ , 即可求出参数的取值范围.

【详解】解: 因为关于  $x$  的不等式  $x^2 - 2ax + 4 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ ,

所以  $\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 4 < 0$ , 解得  $-2 < a < 2$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $(-2, 2)$ .

故答案为:  $(-2, 2)$

14. 【答案】  $f(x) = (x-1)^2$  (答案不唯一)

【解析】【分析】 本题属于开放性问题, 只需找到符合题意的一个函数解析式即可.

【详解】 解: 对于函数  $f(x) = (x-1)^2$ ,  $x \in [0, 2]$ ,

函数在  $[0, 1)$  上单调递减, 在  $[1, 2]$  上单调递增, 且  $f(0) = f(2) = 1$ ,

所以  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上 最大值为  $f(2) = 1$ , 但是函数在  $[0, 2]$  上不具有单调性,

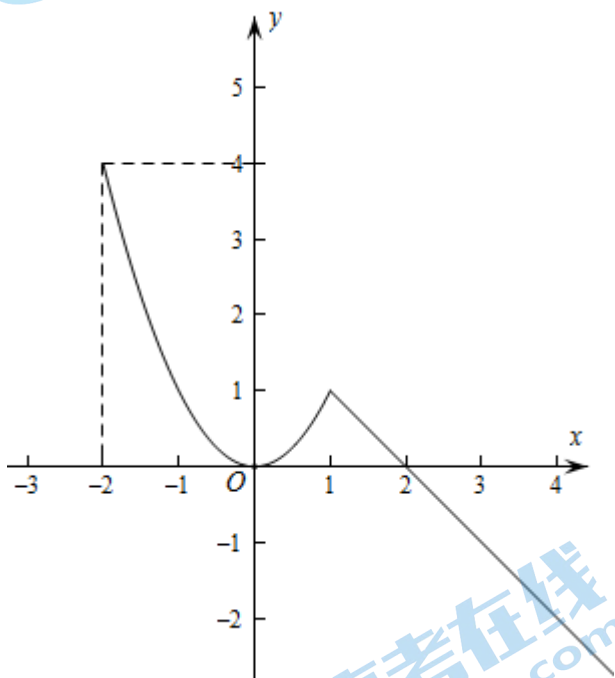
故命题“若  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值为  $f(2)$ , 则  $f(x)$  是增函数”为假命题.

故答案为:  $f(x) = (x-1)^2$  (答案不唯一)

15. 【答案】 ②③

【解析】【分析】 根据函数解析式画出函数图象, 即可判断①②, 再结合函数解析式分类讨论分别计算③④;

【详解】 解: 因为  $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 1 \\ -x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ , 函数图象如下所示:



显然函数的定义域为  $[-2, +\infty)$ , 故①错误;

又  $f(-2) = (-2)^2 = 4$ , 所以函数的值域为  $(-\infty, 4]$ , 故②正确;

当  $-2 \leq x < 1$  时  $x^2 = 2$ , 解得  $x = -\sqrt{2}$  或  $x = \sqrt{2}$  (舍去),

当  $x \geq 1$  时  $-x+2 = 2$ , 解得  $x = 0$  (舍去),



即若  $f(x)=2$ ，则  $x=-\sqrt{2}$ ，故③正确；

当  $-2 \leq x < 1$  时  $x^2 < 1$ ，解得  $-1 < x < 1$ ，

当  $x \geq 1$  时  $-x+2 < 1$ ，解得  $x > 1$ ，

综上  $f(x) < 1$  解集为  $(-1,1) \cup (1,+\infty)$ ，故④错误；

故答案为：②③

### 三、解答题

16. 【答案】(1)  $\{x|-3 \leq x < 1\}$

(2)  $\{x|x < 6 \text{ 或 } x > 8\}$

(3)  $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 8\}$

【解析】【分析】利用集合的交并补运算及数轴法运算即可.

【小问1详解】

因为  $A = \{x|-3 \leq x < 6\}$ ， $B = \{x|x < 1 \text{ 或 } x > 8\}$ ，

所以  $A \cap B = \{x|-3 \leq x < 1\}$ .

【小问2详解】

因为  $A = \{x|-3 \leq x < 6\}$ ， $B = \{x|x < 1 \text{ 或 } x > 8\}$ ，

所以  $A \cup B = \{x|x < 6 \text{ 或 } x > 8\}$ .

【小问3详解】

因为  $A = \{x|-3 \leq x < 6\}$ ， $B = \{x|x < 1 \text{ 或 } x > 8\}$ ，

所以  $(\complement_{\mathbb{R}} A) = \{x|x < -3 \text{ 或 } x \geq 6\}$ ，

故  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x|x < -3 \text{ 或 } x > 8\}$ .

17. 【答案】(1)  $A \cap B = \{x|-1 < x < 1\}$

(2) 答案见解析

【解析】【分析】(1) 首先解一元二次不等式与一元一次不等式组求出集合  $A$ 、 $B$ ，再根据交集的定义计算可得；

(2) 若选择①，分  $C \neq \emptyset$  和  $C = \emptyset$  两种情况讨论，分别得到不等式(组)，解得即可.

若选择②，分  $C \neq \emptyset$  和  $C = \emptyset$  两种情况讨论，分别得到不等式(组)，解得即可.

若选择③，则  $C \subseteq B$ ，分  $C \neq \emptyset$  和  $C = \emptyset$  两种情况讨论，分别得到不等式(组)，解得即可.

【小问1详解】

解：由  $x^2 + 2x - 3 < 0$ ，即  $(x+3)(x-1) < 0$ ，解得  $-3 < x < 1$ ，

由  $-3 < x - 2 < 3$ , 解得  $-1 < x < 5$ ,

所以  $A = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\} = \{x | -3 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | -3 < x - 2 < 3\} = \{x | -1 < x < 5\}$ ,

所以  $A \cap B = \{x | -1 < x < 1\}$ .

【小问 2 详解】

解: 选择条件①  $C \subseteq B$ , 当  $C \neq \emptyset$  时, 由  $\begin{cases} a \geq -1 \\ 2-a \leq 5 \\ 2-a > a \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq a < 1$ ;

当  $C = \emptyset$  时, 由  $2-a \leq a$ , 解得  $a \geq 1$ ;

综上所述:  $a \geq -1$ .

选择条件②  $B \cap C = \emptyset$ , 当  $C \neq \emptyset$  时, 由  $\begin{cases} 2-a > a \\ 2-a \leq -1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} 2-a > a \\ a \geq 5 \end{cases}$ , 解得  $a \in \emptyset$ ;

当  $C = \emptyset$  时, 由  $2-a \leq a$ , 解得  $a \geq 1$ ;

综上所述:  $a \geq 1$ .

选择条件③  $p: x \in B$ ,  $q: x \in C$ , 若  $p$  是  $q$  的必要不充分条件, 所以  $C \subsetneq B$ ,

当  $C \neq \emptyset$  时, 由  $\begin{cases} a \geq -1 \\ 2-a \leq 5 \text{ (等号不同时取得)} \\ 2-a > a \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq a < 1$ .

当  $C = \emptyset$  时,  $2-a \leq a$ , 所以  $a \geq 1$ ,

综上所述:  $a \geq -1$ .

18. 【答案】(1) 画图见解析,  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(2)  $a = -1$  或  $3$

(3)  $k < -\frac{1}{4}$

【解析】【分析】(1) 根据函数解析式画出函数图形, 结合函数图象得到函数的单调递增区间;

(2) 根据分段函数解析式分类讨论, 分别计算可得;

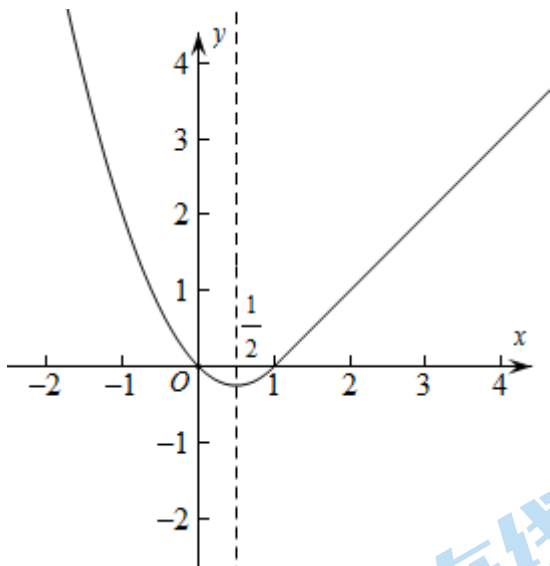
(3) 结合函数图象得到函数的值域, 即可求出参数  $k$  的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 因为  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ ,

当  $x \leq 1$  时  $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ , 对称轴为  $x = \frac{1}{2}$ , 开口向上,

所以  $f(x)$  的图象如下:



由图可知函数的单调递增区间为  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ;

【小问 2 详解】

解：因为  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ ,

当  $a \leq 1$  时,  $a^2 - a = 2$ , 解得  $a = -1$  或  $a = 2$  (舍去), 所以  $a = -1$ ,

当  $a > 1$  时,  $a - 1 = 2$ , 解得  $a = 3$ ,

综上所述:  $a = -1$  或  $3$ .

【小问 3 详解】

解：由函数图象可知,  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ , 即  $f(x) \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ ,

又直线  $y = k$  与函数  $f(x)$  的图象没有公共点, 所以  $k < -\frac{1}{4}$ .

19. 【答案】(1) 奇函数 (2) 证明见解析

(3)  $-\frac{8}{3}$

【解析】【分析】(1) 首先求出函数的定义域, 再根据奇函数的定义判断即可;

(2) 利用定义按照设元、作差、变形、判断符号、下结论的步骤完成即可;

(3) 根据函数的奇偶性与单调性, 得到函数在  $[-3, -1]$  上单调递增, 从而求出函数的最小值.

【小问 1 详解】

解：函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ ,

且  $f(-x) = -x - \frac{1}{-x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$ ,

所以  $f(x)$  是奇函数.

【小问 2 详解】

证明: 设  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ ,

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right),$$

因为  $x_1 < x_2$ , 所以  $x_1 - x_2 < 0$ , 因为  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 所以  $1 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0$ ,

所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

【小问 3 详解】

解: 因为  $f(x)$  是奇函数且在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)$  在  $[-3, -1]$  上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(-3) = -\frac{8}{3}.$$

20. 【答案】(1)  $f(0) = 0, f(2) = -2$

(2) 证明见解析 (3)  $t > \frac{1}{2}$

【解析】【分析】(1) 令  $a = b = 0$  求出  $f(0)$ , 再令  $a = 1, b = -1$  求出  $f(1)$ , 最后令  $a = b = 1$ , 求出  $f(2)$ ;

(2) 根据奇函数的定义令  $a = x, b = -x$  计算可得;

(3) 依题意可得  $f(t-1+t) < f(0)$ , 根据单调性将函数不等式转化为自变量的不等式, 解得即可.

【小问 1 详解】

解: 因为对任意  $a, b \in \mathbf{R}$ , 总有  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ,

令  $a = b = 0$ , 所以  $f(0) = f(0) + f(0)$ , 所以  $f(0) = 0$ ,

令  $a = 1, b = -1$ , 所以  $f(0) = f(1) + f(-1)$ , 又  $f(-1) = 1$ ,

所以  $f(1) = -1$ ,

令  $a = b = 1$ , 则  $f(2) = f(1) + f(1) = -2$ ;

【小问 2 详解】

证明:  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $-x \in \mathbf{R}$ .

令  $a = x, b = -x$ , 所以  $f(0) = f(x) + f(-x)$ .

所以  $f(-x) = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  是奇函数.

【小问 3 详解】

解：因为  $f(t-1)+f(t)<0$ ，所以  $f(t-1+t)<f(0)$ 。

所以  $2t-1>0$ ，所以  $t>\frac{1}{2}$ 。

21. 【答案】(1)  $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 60x, 0 < x \leq 70, x \in \mathbf{N} \\ 2080 - \left(x + \frac{6400}{x}\right), 70 < x \leq 200, x \in \mathbf{N} \end{cases}$

(2) 当年产量 80 台时，年利润最大，最大值为 1920 万元

【解析】【分析】(1) 分  $0 < x \leq 70, x \in \mathbf{N}$  和  $70 < x \leq 200, x \in \mathbf{N}$  两种情况分别求出函数解析式；

(2) 根据二次函数与基本不等式求出各段函数的最大值，再比较即可得解。

【小问 1 详解】

解：当  $0 < x \leq 70, x \in \mathbf{N}$  时， $y = 100x - \left(\frac{1}{2}x + 40\right)x = -\frac{1}{2}x^2 + 60x$ ，

当  $70 < x \leq 200, x \in \mathbf{N}$  时， $y = 100x - \left(101 + \frac{6400}{x^2} - \frac{2080}{x}\right)x = 2080 - \left(x + \frac{6400}{x}\right)$ ，

所以  $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 60x, 0 < x \leq 70, x \in \mathbf{N} \\ 2080 - \left(x + \frac{6400}{x}\right), 70 < x \leq 200, x \in \mathbf{N} \end{cases}$

【小问 2 详解】

解：当  $0 < x \leq 70, x \in \mathbf{N}$  时， $y = -\frac{1}{2}x^2 + 60x = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 1800$ ，

所以当  $x = 60$  时， $y$  取得最大值，最大值为 1800。

当  $70 < x \leq 200, x \in \mathbf{N}$  时， $y = 2080 - \left(x + \frac{6400}{x}\right) \leq 2080 - 2\sqrt{x \cdot \frac{6400}{x}} = 1920$ ，

当且仅当  $x = \frac{6400}{x}$ ，即  $x = 80$  时， $y$  取得最大值 1920，

因为  $1920 > 1800$ ，所以当年产量 80 台时，年利润最大，最大值为 1920 万元

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯