

# 2019 北京西城外国语高三（上）期中

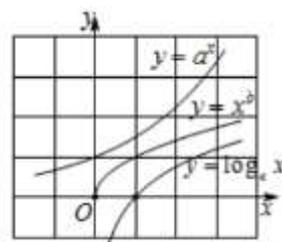
## 数 学

本试卷共 4 页，分第 I 卷和第 II 卷，其中第 I 卷 40 分，第 II 卷 110 分，全卷共 150 分，考试时长 120 分钟，考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

### 第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x|x > 2\}$ ,  $B = \{x|(x-1)(x-3) < 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $\{x|x > 1\}$       B.  $\{x|2 < x < 1\}$       C.  $\{x|1 < x < 3\}$       D.  $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < 1\}$
2. 设向量  $a=(2, 1)$ ,  $b(0, -2)$ , 则  $a+2b$  的模长为 ( )  
A.  $(2, -3)$       B.  $(3, -2)$       C.  $\sqrt{13}$       D.  $\sqrt{5}$
3. 下列函数中，在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是 ( )  
A.  $y=-x+1$       B.  $y = |x - 1|$       C.  $y=\sin x$       D.  $y = x^{\frac{1}{2}}$
4. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_n = 3^{n+1}$ , 则  $a_3 + a_4 =$  ( )  
A. 81      B. 243      C. 324      D. 216
5. 将函数  $y=\sin x$  的图象作如下哪种变换，可以得到函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象 ( )  
A. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，再将横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变  
B. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度，再将横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变  
C. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度，再将横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变  
D. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度，再将横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变
6. 设  $a, b$  是两个实数，则 “ $a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}$ ” 是 “ $a > b$ ” 的 ( )  
A. 充分不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件
7. 函数  $f(x) = \log_3 x + x - 3$  的零点个数是 ( )  
A. 0      B. 1      C. 2      D. 3
8. 定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减且  $f(\frac{1}{2}) = 0$ , 则满足  $f(x) < 0$  的  $x$  集合为 ( )  
A.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$       B.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$   
C.  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$       D.  $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
9. 已知函数  $y = a^x, y = x^b, y = \log_c x$  的图象如图所示，则 ( )  
A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$



C.  $c > a > b$

D.  $c > b > a$

10. 设  $x \in \mathbb{R}$  记不超过  $x$  的最大整数为  $[x]$ , 令  $\{x\} = x - [x]$ , 则  $\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}, \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right], \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  ( $\quad$ )

A. 是等差数列但不是等比数列

B. 是等比数列但不是等差数列

C. 既是等差数列又是等比数列

D. 既不是等差数列也不是等比数列

第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 计算  $(\lg 2 + \lg 5) \times 8^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 若角  $\theta$  的终边过点  $P(3, -4)$ , 则  $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = n - 1$ , 则  $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知正方形  $ABCD$  边长为 1,  $E$  是线段  $CD$  的中点, 则  $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = \frac{\pi}{3}, c = 5, a = 7$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ , 若此函数同时满足:

① 当  $a+b=0$  时, 有  $f(a) + f(b) = 0$ ;

② 当  $a+b>0$  时, 有  $f(a)+f(b)>0$ , 则称函数  $f(x)$  为  $\Omega$  函数

在下列函数中:

①  $y = x + \sin x$ ; ②  $y = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ; ③  $y = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$  是  $\Omega$  函数的为  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (填处所有符合要求的函数序号)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本题 13 分) 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 且  $b_2 = 3, b_3 = 9, a_1 = b_1, a_{14} = b_4$

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

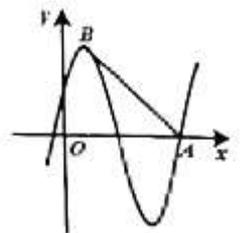
(II) 设  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本题 14 分) 已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos 2x, (x \in \mathbb{R})$  的部分图象如图所示.

(I) 求  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ;

(II) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和单调递增区间;

(III) 设点  $B$  是图象上的最高点, 点  $A$  是图象与  $x$  轴的交点, 求  $\tan \angle BAO$  的值.

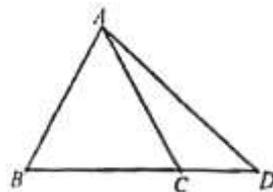


19. (本题 14 分) 已知函数  $f(x) = x \ln x - ax, a \in R$ .

- (I) 当  $a=1$  时, 求函数  $f(x)$  在点  $(e, f(e))$  处的切线方程;
- (II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[1, e]$  上的最小值;
- (III) 若对所有  $x \geq 1$  都有  $f(x) \geq -e$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. (本题 13 分) 如图,  $\triangle ABC$  是边长为  $2x$  等边三角形, 点  $D$  在边  $BC$  的延长线上, 且  $BC=2CD, AD=\sqrt{7}$ .

- (I) 求  $x$  的值;
- (II) 求  $\sin \angle BAD$  的值.



21. (本题 13 分) 某商场销售某种商品, 经验表明, 该商品每日的销售量  $y$  (单位: 千克) 与销售价格  $x$  (单位: 元/千克) 满足关系式  $y = \frac{a}{x-3} + 10(x-6)^2$ , 其中  $3 < x < 6, a$  为常数, 已知销售价格为 5 元/千克时, 每日可售出该商品 11 千克.

- (I) 求  $a$  的值;
- (II) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格  $x$  的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

22. (本题 13 分) 已知函数  $f(x) = e^x - ax$

- (I) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (II) 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  存在极值, 求实数  $a$  的取值范围;
- (III) 若  $a \geq -1$ , 当  $xf(x) \geq x^3 - \frac{5a+3}{2}x^2 + 3ax - 1 + m$  对于任意  $x \in [0, +\infty)$  恒成立时,  $m$  的最大值为 1, 求实数  $a$  的取值范围.



长按识别关注