北京市西城区 2019 — 2020 学年度第一学期期末试卷

高三数学

2020.1

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $A=\{x\,|\,x<a\}$，$B=\{-3,0,1,5\}$，若集合 $A\cap B$ 有且仅有 2 个元素，则实数 a 的取值范围为

(A) $(-3,+\infty)$　　(B) $(0,1]$　　(C) $[1,+\infty)$　　(D) $[1,5)$

2. 若复数 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则在复平面内 z 对应的点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 在△ABC 中，若 $a=6$，$A=60°$，$B=75°$，则 $c=$

(A) 4　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) $2\sqrt{3}$　　(D) $2\sqrt{6}$

4. 设 $x>y$，且 $xy\neq0$，则下列不等式中一定成立的是

(A) $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$　　(B) $\ln|x|>\ln|y|$

(C) $2^{-x}<2^{-y}$　　(D) $x^2>y^2$

5. 已知直线 $x+y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 有公共点，则实数 a 的取值范围为

(A) $(-\infty,0]$　　(B) $[0,+\infty)$　　(C) $[0,2)$　　(D) $(-\infty,2)$

6. 设三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 互不共线，则“$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$”是“以 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|$ 为边长的三角形存在”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

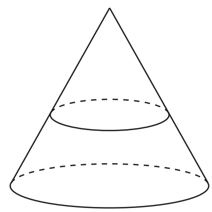
7. 紫砂壶是中国特有的手工制造陶土工艺品，其制作始于明朝正德年间. 紫砂壶的壶型众多，经典的有西施壶、掇球壶、石瓢壶、潘壶等. 其中，石瓢壶的壶体可以近似看成一个圆台（即圆锥用平行于底面的平面截去一个锥体得到的）. 下图给出了一个石瓢壶的相关数据（单位：cm），那么该壶的容量约为

(A) 100 cm^3

(B) 200 cm^3

(C) 300 cm^3

(D) 400 cm^3



8. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+k$，若存在区间 $[a,b]$，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[a+1,b+1]$，则实数 k 的取值范围为

(A) $(-1,+\infty)$　　(B) $(-1,0]$　　(C) $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　(D) $\left(-\frac{1}{4},0\right]$

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

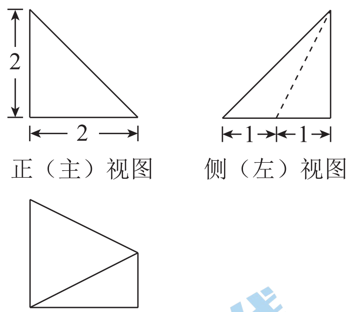
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 在 $(1-x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为____.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,6)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$ 满足 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，其中 $x\in\mathbf{R}$，那么 $|\boldsymbol{b}|=$____.

11. 在公差为 d（$d\neq0$）的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，且 a_2，a_4，a_{12} 成等比数列，则 $d=$____.

12. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的四个侧面中，直角三角形有____个.



正（主）视图　　侧（左）视图

俯视图

13. 对于双曲线，给出下列三个条件：

① 离心率为 2；

② 一条渐近线的倾斜角为 30°；

③ 实轴长为 8，且焦点在 x 轴上.

写出符合其中两个条件的一个双曲线的标准方程____.

14. 某商贸公司售卖某种水果. 经市场调研可知：在未来 20 天内，这种水果每箱的销售利润 r（单位:元）与时间 t（$1\leqslant t\leqslant20$，$t\in\mathbf{N}$，单位：天）之间的函数关系式为 $r=\frac{1}{4}t+10$，且日销售量 y（单位：箱）与时间 t 之间的函数关系式为 $y=120-2t$.

① 第 4 天的销售利润为____元；

② 在未来的这 20 天中，公司决定每销售 1 箱该水果就捐赠 m（$m\in\mathbf{N}^*$）元给“精准扶贫”对象. 为保证销售积极性，要求捐赠之后每天的利润随时间 t 的增大而增大，则 m 的最小值是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos x\cdot\sin(x-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的最小值和最大值.

16.（本小题满分 13 分）

高铁和航空的飞速发展不仅方便了人们的出行，更带动了我国经济的巨大发展. 据统计，在 2018 年这一年内从 A 市到 B 市乘坐高铁或飞机出行的成年人约为 50 万人次. 为了解乘客出行的满意度，现从中随机抽取 100 人次作为样本，得到下表(单位：人次)：

满意度	老年人		中年人		青年人	
	乘坐高铁	乘坐飞机	乘坐高铁	乘坐飞机	乘坐高铁	乘坐飞机
10 分(满意)	12	1	20	2	20	1
5 分(一般)	2	3	6	2	4	9
0 分(不满意)	1	0	6	3	4	4

（Ⅰ）在样本中任取 1 个，求这个出行人恰好不是青年人的概率；

（Ⅱ）在 2018 年从 A 市到 B 市乘坐高铁的所有成年人中，随机选取 2 人次，记其中老年人出行的人次为 X. 以频率作为概率，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）如果甲将要从 A 市出发到 B 市，那么根据表格中的数据，你建议甲是乘坐高铁还是飞机？并说明理由.

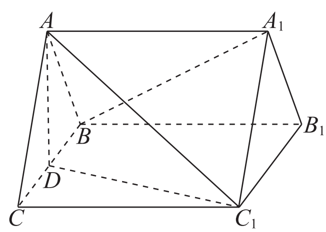
17.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 为正三角形，侧面 ABB_1A_1 是边长为 2 的正方形，D 为 BC 的中点.

（Ⅰ）求证：A_1B // 平面 AC_1D；

（Ⅱ）求二面角 $C-AC_1-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）试判断直线 A_1B_1 与平面 AC_1D 的位置关系，并加以证明.



18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆 W：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过点 F 且斜率为 k（$k\neq0$）的直线 l 与椭圆 W 交于A，B 两点，线段 AB 的中点为 M. O 为坐标原点.

（Ⅰ）证明：点 M 在 y 轴的右侧；

（Ⅱ）设线段 AB 的垂直平分线与 x 轴、y 轴分别相交于点 C，D. 若$\triangle ODC$ 与$\triangle CMF$ 的面积相等，求直线 l 的斜率 k.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+\frac{1}{2}x^2$，其中 $a>-1$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+b$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 $b-a$ 的最大值.

20.（本小题满分 13 分）

设整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$，其中 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{100}\leqslant205$，且对于任意 i，j（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant100$），若 $i+j\in A$，则 $a_i+a_j\in A$.

（Ⅰ）请写出一个满足条件的集合 A；

（Ⅱ）证明：任意 $x\in\{101,102,\cdots,200\}$，$x\notin A$；

（Ⅲ）若 $a_{100}=205$，求满足条件的集合 A 的个数.

北京市西城区 2019—2020 学年度第一学期期末试卷

高三数学参考答案

2020.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．B	2．D	3．D	4．C
5．A	6．A	7．B	8．D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．10	10．$\sqrt{13}$	11．3
12．3	13．答案不唯一，如 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$	14．1232；5

注：第 14 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\cos x\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$ ……………… 2 分

$=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$ ……………… 5 分

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$， ……………… 7 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． ……………… 8 分

（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$，所以 $-\frac{7\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant -\frac{\pi}{6}$． ……………… 9 分

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$． ……………… 11 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 0． ……………… 13 分

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设事件：“在样本中任取 1 个，这个出行人恰好不是青年人”为 M，

……………… 1 分

由表可得：样本中出行的老年人、中年人、青年人人次分别为19，39，42，

……………… 2 分

所以在样本中任取 1 个，这个出行人恰好不是青年人的概率 $P(M)=\dfrac{19+39}{100}=\dfrac{29}{50}$.

……………… 3 分

（Ⅱ）由题意，X 的所有可能取值为：0，1，2. ……………… 4 分

因为在 2018 年从 A 市到 B 市乘坐高铁的所有成年人中，随机选取 1 人次，此人为老年人概率是 $\dfrac{15}{75}=\dfrac{1}{5}$， ……………… 5 分

所以 $P(X=0)=\mathrm{C}_2^0\times(1-\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{16}{25}$， ……………… 6 分

$P(X=1)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{5}\times(1-\dfrac{1}{5})=\dfrac{8}{25}$， ……………… 7 分

$P(X=2)=\mathrm{C}_2^2\times(\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{1}{25}$. ……………… 8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{16}{25}$	$\dfrac{8}{25}$	$\dfrac{1}{25}$

……………… 9 分

故 $E(X)=0\times\dfrac{16}{25}+1\times\dfrac{8}{25}+2\times\dfrac{1}{25}=\dfrac{2}{5}$. ……………… 10 分

（Ⅲ）答案不唯一，言之有理即可.

如可以从满意度的均值来分析问题，参考答案如下：

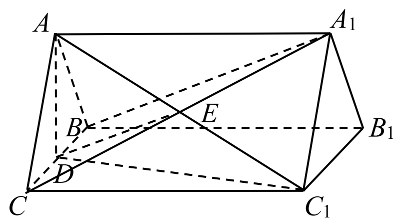
由表可知，乘坐高铁的人满意度均值为：$\dfrac{52\times10+12\times5+11\times0}{52+12+11}=\dfrac{116}{15}$，

乘坐飞机的人满意度均值为：$\dfrac{4\times10+14\times5+7\times0}{4+14+7}=\dfrac{22}{5}$， ……………… 12 分

因为 $\dfrac{116}{15}>\dfrac{22}{5}$，

所以建议甲乘坐高铁从 A 市到 B 市. ……………… 13 分

17.（本小题满分 14 分）



解：（Ⅰ）由题意，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱.

连接 A_1C. 设 $A_1C\cap AC_1=E$，则 E 是 A_1C 的中点.

连接 DE．由 D， E 分别为 BC 和 A_1C 的中点，

得 $DE \,//\, A_1B$． ………………… 2 分

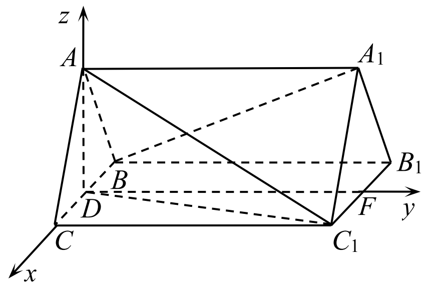
又因为 $DE \subset$ 平面 AC_1D， $A_1B \not\subset$ 平面 AC_1D，

所以 $A_1B \,//$ 平面 AC_1D． ………………… 4 分

（Ⅱ）取 B_1C_1 的中点 F，连接 DF．

因为△ ABC 为正三角形，且 D 为 BC 中点，

所以 $AD \perp BC$．



由 D， F 分别为 BC 和 B_1C_1 的中点，得 $DF \,//\, B$

又因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC，

所以 $DF \perp$ 平面 ABC，

所以 $DF \perp AD$， $DF \perp BC$．

分别以 DC， DF， DA 为 x 轴， y 轴， z 轴，如图建立空间直角坐标系，… 5 分

则 $A(0,0,\sqrt{3})$， $C_1(1,2,0)$， $C(1,0,0)$， $D(0,0,0)$， $B(-1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{DC_1}=(1,2,0)$， $\overrightarrow{DA}=(0,0,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{CA}=(-1,0,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{CC_1}=(0,2,0)$，…… 6 分

设平面 AC_1D 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$， $\overrightarrow{DC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，得 $\begin{cases}\sqrt{3}z_1=0,\\ x_1+2y_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(-2,1,0)$． ………………… 8 分

设平面 AC_1C 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}_2=0$， $\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，得 $\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2y_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},0,1)$． ………………… 9 分

设二面角 $C-AC_1-D$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta|=|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

由图可得二面角 $C-AC_1-D$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-AC_1-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………… 10 分

（III）结论：直线 A_1B_1 与平面 AC_1D 相交. ………………… 11 分

证明：因为 $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-\sqrt{3})$， $A_1B_1//AB$，且 $A_1B_1=AB$，

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=(-1,0,-\sqrt{3})$. ………………… 12 分

又因为平面 AC_1D 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(-2,1,0)$，且 $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=2\neq 0$，

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 不垂直，

所以 $A_1B_1\not\subset$ 平面 AC_1D，且 A_1B_1 与平面 AC_1D 不平行，

故直线 A_1B_1 与平面 AC_1D 相交. ………………… 14 分

18．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $F(\sqrt{3},0)$，直线 l：$y=k(x-\sqrt{3})$（$k\neq 0$）， ………………… 2 分

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x-\sqrt{3}), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，得 $(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2x+(12k^2-4)=0$， ………… 3 分

显然 $\Delta>0$， $x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$， ………………… 4 分

则点 M 的横坐标 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$， ………………… 5 分

因为 $x_M=\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}>0$，

所以点 M 在 y 轴的右侧. ………………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得点 M 的纵坐标 $y_M=k(x_M-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}k}{4k^2+1}$. ………………… 7 分

即 $M(\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1},-\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1})$.

所以线段 AB 的垂直平分线方程为：$y+\frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1})$． ……… 8 分

令 $x=0$，得 $D(0,\frac{3\sqrt{3}k}{4k^2+1})$；令 $y=0$，得 $C(\frac{3\sqrt{3}k^2}{4k^2+1},0)$． ……………… 9 分

所以△ ODC 的面积 $S_{\Delta ODC}=\frac{1}{2}\cdot|\frac{3\sqrt{3}k}{4k^2+1}|\cdot|\frac{3\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}|=\frac{27k^2\cdot|k|}{2(4k^2+1)^2}$． ……… 10 分

△ CMF 的面积 $S_{\Delta CMF}=\frac{1}{2}\cdot|\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}|\cdot|-\frac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}|=\frac{3(k^2+1)\cdot|k|}{2(4k^2+1)^2}$． …… 11 分

因为△ ODC 与△ CMF 的面积相等，

所以 $\frac{27k^2\cdot|k|}{2(4k^2+1)^2}=\frac{3(k^2+1)\cdot|k|}{2(4k^2+1)^2}$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$．

所以当△ ODC 与△ CMF 的面积相等时，直线 l 的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$． ……… 13 分

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2$，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x+x$， ……………… 2 分

所以 $f(0)=1$，$f'(0)=1$．

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$． …………… 4 分

（Ⅱ）由 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+\frac{1}{2}x^2$，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1+x$，

则 $f'(0)=0$． … …………… 5 分

当 $x>0$ 时，由 $\mathrm{e}^x-1>0, x>0$，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1+x>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………… 7 分

当 $x<0$ 时，由 $\mathrm{e}^x-1<0, x<0$，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1+x<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

综上，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$． … 8 分

（Ⅲ）由 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+b$，得 $\mathrm{e}^x-(a+1)x-b\geqslant 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立.

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b$， ……………… 9 分

则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)$.

由 $g'(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)=0$，得 $x=\ln(a+1)$，（$a>-1$）. ……………… 10 分

随着 x 变化，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,\ln(a+1))$	$\ln(a+1)$	$(\ln(a+1),+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln(a+1))=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b$.

由题意，得 $g(\ln(a+1))\geqslant 0$，即 $b-a\leqslant 1-(a+1)\ln(a+1)$. …………… 12 分

设 $h(x)=1-x\ln x\ (x>0)$，则 $h'(x)=-\ln x-1$.

因为当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$-\ln x-1>0$；当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$-\ln x-1<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h(x)_{\max}=h(\frac{1}{\mathrm{e}})=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以当 $a+1=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$b=a+1-(a+1)\ln(a+1)$，即 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}-1$，$b=\frac{2}{\mathrm{e}}$ 时，$b-a$ 有最大值为 $1+\frac{1}{\mathrm{e}}$. …………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）答案不唯一. 如 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$； ……………… 3 分

（Ⅱ）假设存在一个 $x_0\in\{101,102,\cdots,200\}$ 使得 $x_0\in A$， ……………… 4 分

令 $x_0=100+s$，其中 $s\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant s\leqslant 100$，

由题意，得 $a_{100}+a_s\in A$， ……………… 6 分

由 a_s 为正整数，得 $a_{100}+a_s>a_{100}$，这与 a_{100} 为集合 A 中的最大元素矛盾，

所以任意 $x\in\{101,102,\cdots,200\}$，$x\notin A$. ……………… 8 分

（Ⅲ）设集合 $A\cap\{201,202,\cdots,205\}$ 中有 $m\ (1\leqslant m\leqslant 5)$ 个元素，$a_{100-m}=b$，

由题意，得 $a_1<a_2<\cdots<a_{100-m}\leqslant 200$， $200<a_{100-m+1}<a_{100-m+2}<\cdots<a_{100}$，

由（Ⅱ），得 $a_{100-m}=b\leqslant 100$.

假设 $b>100-m$，则 $b-100+m>0$.

因为 $b-100+m\leqslant 100-100+5=5<100-m$，

由题设条件，得 $a_{100-m}+a_{b-100+m}\in A$，

因为 $a_{100-m}+a_{b-100+m}\leqslant 100+100=200$，

所以由（Ⅱ）可得 $a_{100-m}+a_{b-100+m}\leqslant 100$，

这与 a_{100-m} 为 A 中不超过100的最大元素矛盾，

所以 $a_{100-m}\leqslant 100-m$，

又因为 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{100-m}$， $a_i\in\mathbf{N}$，

所以 $a_i=i\,(1\leqslant i\leqslant 100-m)$. ………………… 10 分

任给集合 $\{201,202,203,204\}$ 的 $m-1$ 元子集 B，令 $A_0=\{1,2,\cdots,100-m\}\cup B\cup\{205\}$，

以下证明集合 A_0 符合题意：

对于任意 $i,j\ (1\leqslant i\leqslant j\leqslant 100)$，则 $i+j\leqslant 200$.

若 $i+j\in A_0$，则有 $i+j\leqslant 100-m$，

所以 $a_i=i$， $a_j=j$，从而 $a_i+a_j=i+j\in A_0$.

故集合 A_0 符合题意， ………………… 12 分

所以满足条件的集合 A 的个数与集合 $\{201,202,203,204\}$ 的子集个数相同，

故满足条件的集合 A 有 $2^4=16$ 个. ………………… 13 分