2022 北京五十七中高三 12 月月考

数　　学

一、选择题（共 10 题）

1. 设集合 $A=\left\{x\in\mathrm{R}|\ f\left(x\right)=\sqrt{9-x^{2}}\right\},B=\left\{x\middle|\frac{1}{x}>\frac{1}{4}\right\}$，则集合 $A\cup B=$（　　）

A. $(-\infty,4)$　　B. $[-3,4)$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,3]$

2. 设 i 是虚数单位，复数 $z=\frac{2\mathrm{i}^{3}}{1-\mathrm{i}}$，则复数 z 的共轭复数为

A. $-1+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5}$ 的展开式中常数项为（　　）

A. 80　　B. -80　　C. -40　　D. 40

4. 若 $b<a<0$，则下列不等式：①$|a|>|b|$；②$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$；③$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$；④$\frac{a^{2}}{b}<2a-b$ 中，正确的不等式有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$C=60°,a+2b=8,\sin A=6\sin B$，则 $c=$（　　）

A $\sqrt{35}$　　B. $\sqrt{31}$　　C. 6　　D. 5

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .已知 $a_1=-5$，$a_3=-1$.记 $b_n=\frac{S_n}{a_n}(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\{b_n\}$ 的（　　）

A. 最小项为 b_3　　B. 最大项为 b_3　　C. 最小项为 b_4　　D. 最大项为 b_4

7. 抛物线 $W:y^{2}=8x$ 的焦点为 F .对于 W 上一点 P，若 W 的准线上只存在一个点 Q，使得 $\triangle FPQ$ 为等腰三角形，则点 P 的横坐标为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. 记函数 $f(x)$，$g(x)$ 定义域的交集为 I，若存在 $x_0\in I$，使得对任意 $x\in I$，不等式 $\left[f(x)-g(x)\right]\cdot(x-x_0)\geq 0$ 恒成立，则称 $\left(f(x),g(x)\right)$ 构成"单交函数对".下列所给的两个函数构成"单交函数对"的有（　　）

A. $f(x)=e^{x},g(x)=x+1$　　B. $f(x)=\ln x,g(x)=\sin x$

C. $f(x)=x^{2},g(x)=2^{x}$　　D. $f(x)=x^{3},g(x)=\frac{1}{x}$

9. 大气压强 $p=\dfrac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$，它的单位是“帕斯卡”（$Pa$，$1Pa$=1N/m^2），大气压强 p（Pa）随海拔高度 h（m）的变化规律是 $p=p_0e^{-kh}$（$k=0.000126\,\mathrm{m}^{-1}$），$p_0$ 是海平面大气压强.已知在某高山 A_1,A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1,p_2，$\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{1}{2}$，那么 A_1,A_2 两处的海拔高度的差约为（ ）

（参考数据：$\ln 2\approx 0.693$）

A. 550m　　B. 1818m　　C. 5500m　　D. 8732m

10. 十七世纪法国数学家费马在《平面与立体轨迹引论》中证明，方程 $a^2-x^2=ky^2(k>0,k\neq 1,a\neq 0)$ 表示椭圆，费马所依据的是椭圆的重要性质.若从椭圆上任意一点 P（异于 A,B 两点）向长轴 AB 引垂线，垂足为 Q，记 $M=\dfrac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|BQ|}$，则（ ）

A. 方程 $a^2-x^2=ky^2(k>0,k\neq 1,a\neq 0)$ 表示的椭圆的焦点落在 x 轴上

B. $e=\sqrt{M-1}$

C. M 的值与 P 点在椭圆上的位置有关

D. M 越来越小，椭圆越来越扁

二、填空题（共 5 题）

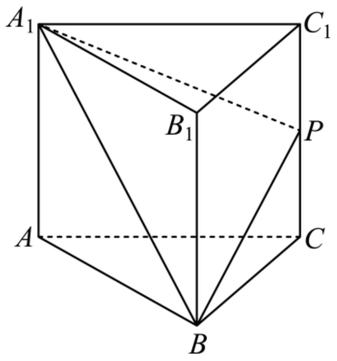
11. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，$\vec{a}=(2,0)$，$|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$__________；

12. 若双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则双曲线的离心率为__________.

13. 若点 P 在半径为 1，且圆心为坐标原点　圆上，过点 P 作圆 $C:(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 的切线，切点为 Q，则 $|PQ|$ 的最小值为__________.

14. 若分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+1,x<0\\2^x-3,x\geq 0\end{cases}$，将函数 $y=|f(x)-f(a)|,x\in[m,n]$ 的最大值记作 $Z_a[m,n]$，那么当 $-2\leq m\leq 2$ 时，$Z_2[m,m+2]$ 的取值范围是__________.

15. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，给出下列结论：



①当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 周长为定值；

②当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值；

③当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$；

④若 $AP\le 1$，则点 P 的轨迹所围成的面积为 $\dfrac{\pi}{8}$.

其中正确的结论是________.

三、解答题（共 6 题）

16. 已知函数 $f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x(a>0,\omega>0)$．从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定．

（1）求 $f(x)$ 解析式；

（2）设 $g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1$，求函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间．

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$；

条件②：$f(x)$ 为偶函数；

条件③：$f(x)$ 的最大值为 1；

条件④：$f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$．

17. 小明同学两次测试成绩(满分 100 分)如下表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物
第一次	87	92	91	92	85	93
第二次	82	94	95	88	94	87

（1）从小明同学第一次测试的科目中随机抽取 1 科，求该科成绩大于 90 分的概率；

（2）从小明同学第一次测试和第二次测试的科目中各随机抽取 1 科，记 X 为抽取的 2 科中成绩大于 90 分

的科目数量，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

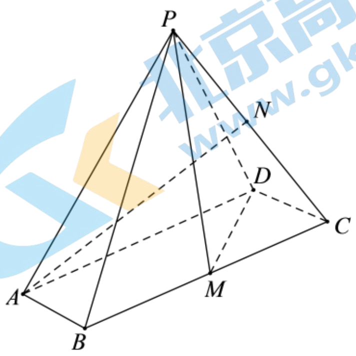
（3）现有另一名同学两次测试成绩(满分 100 分)及相关统计信息如下表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物	6 科成绩均值	6 科成绩方差
第一次	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	x_1	D_1
第二次	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	x_2	D_2

将每科两次测试成绩的均值作为该科的总评成绩，这 6 科总评成绩的方差为 D_3.有一种观点认为：若 $x_1=x_2, D_1<D_2$，则 $D_1 \leqslant D_3 \leqslant D_2$.你认为这种观点是否正确？(只写“正确”或“不正确”)

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，

$\angle ABC=120°, AB=1, BC=4, PA=\sqrt{15}$，$M$，$N$ 分别为 BC, PC 的中点，$PD \perp DC, PM \perp MD$.



（1）证明：$AB \perp PM$；

（2）求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.

19. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $D(-2,0)$，且焦距为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $A(-4,0)$ 的直线 l(不与 x 轴重合)与椭圆 C 交于 P，Q 两点，点 T 与点 Q 关于 x 轴对称，直线 TP 与 x 轴交于点 H，是否存在常数 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$ 成立，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，求证：$(a-1)x_0>a$

21. 已知各项均为整数的数列 $A_N: a_1, a_2, \cdots, a_N$ $N \geq 3, N \in \mathbf{N}^*$.满足 $a_1 a_N<0$，且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，都有 $|a_i-a_{i-1}| \leqslant 1$.记 $S(A_N)=a_1+a_2+\cdots+a_N$.

（1）若 $a_1=3$，写出一个符合要求的 A_6；

（2）证明：数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$；

（3）若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍，证明：数列 A_N 中存在 a_r 使得 $S(A_N)=N\cdot a_r$.

参考答案

一、选择题（共 10 题）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】解不等式得到 $A=[-3,3]$， $B=(0,4)$，从而得到并集.

【详解】由 $9-x^2\geq 0$，解得：$-3\leqslant x\leqslant 3$，故 $A=[-3,3]$，

由 $\frac{1}{x}>\frac{1}{4}$ 得：$0<x<4$，故 $B=(0,4)$，

故 $A\cup B=[-3,4)$.

故选：B

2. 【答案】D

【解析】

【详解】$z=\frac{2i^3}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-2i}{2}=1-i$，则 z 的共轭复数为 1+i,故选 D.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】求出展开式的通项，再令 x 的指数等于 0，即可得出答案.

【详解】解：二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\left(\sqrt{x}\right)^{5-k}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-2)^kC_5^kx^{\frac{15-5k}{6}}$，

令 $\frac{15-5k}{6}=0$，则 $k=3$，

所以常数项为 $(-2)^3C_5^3=-80$.

故选：B.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】利用不等式的性质以及作差法判断大小，逐项进行分析即可.

【详解】①因为 $b<a<0$，所以 $|b|>|a|$，故错误；

②因为 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$，$a-b>0,ab>0$，所以 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0$，所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，故正确；

③因为 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}$，$(a-b)^2>0,ab>0$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2>0$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$，故正确；

④因为$\frac{a^2}{b}-(2a-b)=\frac{(a-b)^2}{b}$，$(a-b)^2>0,b<0$，所以$\frac{a^2}{b}-(2a-b)<0$，所以$\frac{a^2}{b}<2a-b$，故正确；

故选：C.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】由正弦定理可得$a=6b$，即可求出a,b，再由余弦定理计算可得；

【详解】解：因为$\sin A=6\sin B$，由正弦定理可得$a=6b$，又$a+2b=8$，所以$a=6$，$b=1$，

因为$C=60°$

所以$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即$c^2=6^2+1^2-2\times1\times6\times\frac{1}{2}$，解得$c=\sqrt{31}$，

故选：B

6. 【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求得等差数列的通项公式$a_n=2n-7$和前n项和$S_n=n^2-6n$，得到$b_n=\frac{n^2-6n}{2n-7}$，结合$b_3>b_4$，可排除A、D，再求得数列的单调性，得到B不正确，C正确.

【详解】由题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_1=-5$，$a_3=-1$，可得$d=\frac{a_3-a_1}{3-1}=\frac{-1-(-5)}{2}=2$，

所以$a_n=-5+(n-1)\times2=2n-7$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(-5_1+2n-7)}{2}=n^2-6n$，

则$b_n=\frac{S_n}{a_n}=\frac{n^2-6n}{2n-7}$，可得$b_3=\frac{3^2-6\times3}{2\times3-7}=9,b_4=\frac{4^2-6\times4}{2\times4-7}=-8$，

所以$b_3>b_4$，可排除A、D；

设$f(x)=\frac{x^2-6x}{2x-7},x\in[1,+\frac{7}{2})\cup(\frac{7}{2},+\infty)$，

则$f'(x)=\frac{(2x-6)(2x-7)-(x^2-6x)\times2}{(2x-7)^2}=\frac{2(x^2-7x+21)}{(2x-7)^2}$，

因为$\Delta=(-7)^2-4\times1\times21<0$，所以$f'\ \ x\ \ >0$，

所以$f(x)$在区间$\left[1,\frac{7}{2}\right)$和$(\frac{7}{2},+\infty)$上都是单调递增函数，

即当$n=1,2,3$时，数列$\{b_n\}$为递增数列，

当$n\geq4,n\in N^+$时，数列$\{b_n\}$也为递增数列，

其中$b_1=1,b_2=\dfrac{8}{3},b_3=9,b_4=-8,b_5=-\dfrac{5}{3},\cdots$，

例如当$n=25$时，可得$b_{25}=\dfrac{475}{43}>b_3$，所以 B 不正确，C 正确.

故选：C.

【点睛】数列与函数、不等式综合问题的求解策略：

1、已知数列的条件，解决函数问题，解决此类问题一把要利用数列的通项公式，前n项和公式，求和方法等对于式子化简变形，注意数列与函数的不同，数列只能看作是自变量为正整数的一类函数，在解决问题时要注意这一特殊性；

2、解决数列与不等式的综合问题时，若是证明题中，则要灵活选择不等式的证明方法，如比较法、综合法、分析法、放缩法等，若是含参数的不等式恒成立问题，则可分离参数，转化为研究最值问题来解决.

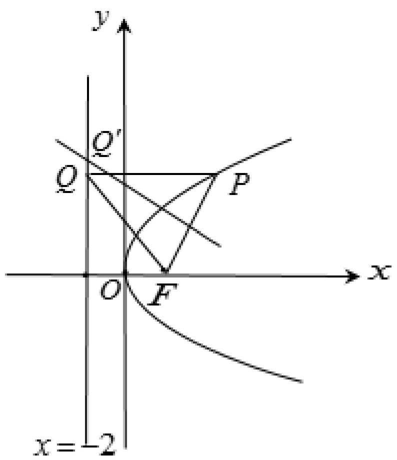
7. 【答案】D

【解析】

【分析】

由抛物线的定义可得PQ准线垂直时，$\triangle FPQ$为等腰三角形，线段PF的垂直平分线交准线于点Q'此时$\triangle FPQ$为等腰三角形，所以点Q'与Q重合，即可得$\triangle FPQ$为等边三角形，利用$|QF|=|QP|$即可求解.

【详解】



所以PQ准线垂直时，由抛物线的定义可得$|PF|=|PQ|$，此时$\triangle FPQ$为等腰三角形，

作线段PF的垂直平分线交准线$x=-2$于点Q'，则$|Q'F|=|Q'P|$，

此时$\triangle FPQ$　等腰三角形，

因为若W的准线上只存在一个点Q，使得$\triangle FPQ$为等腰三角形，

所以Q'与Q重合，所以$|Q'F|=|QF|$，所以$|QF|=|QP|$，

所以$\triangle FPQ$为等边三角形，

$|PQ|=x_0+2$，$|QF|=\sqrt{(-2-2)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{{y_0}^2+16}=\sqrt{16+8x_0}$，

所以$x_0+2=\sqrt{16+8x_0}$，整理可得：${x_0}^2-4x_0-12=0$，

解得：$x_0=6$ 或 $x_0=-2$（舍）

所以则点 P 的横坐标为 6，

故选：D

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键点是紧扣准线上只存在一个点 Q，使得 $\triangle FPQ$ 为等腰三角形，可得 PQ 准线垂直时的点 Q 应该是线段 PF 的垂直平分线与准线的交点，可得 $\triangle FPQ$ 为等边三角形.

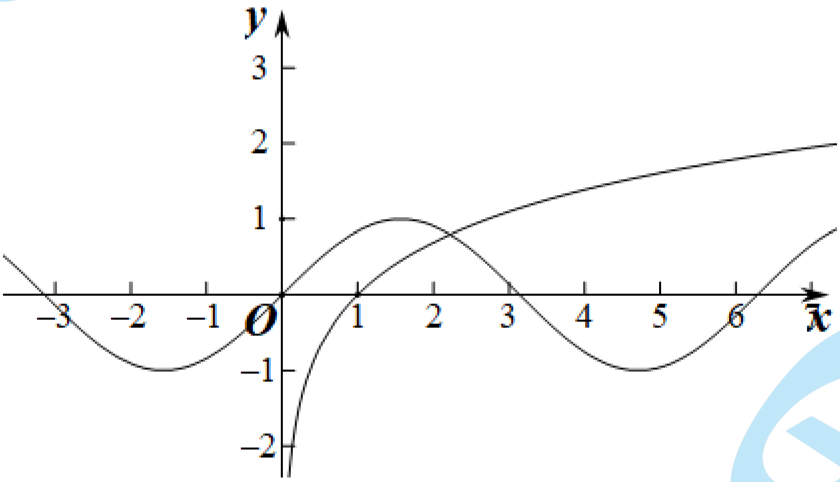
8. 【答案】B

【解析】

【分析】由“相关函数对”的定义，可得两个函数的图象有一个交点，交点两侧图象一侧满足 $f(x)>g(x)$，另一侧满足 $f(x)<g(x)$，对选项一一判断，可得结论.

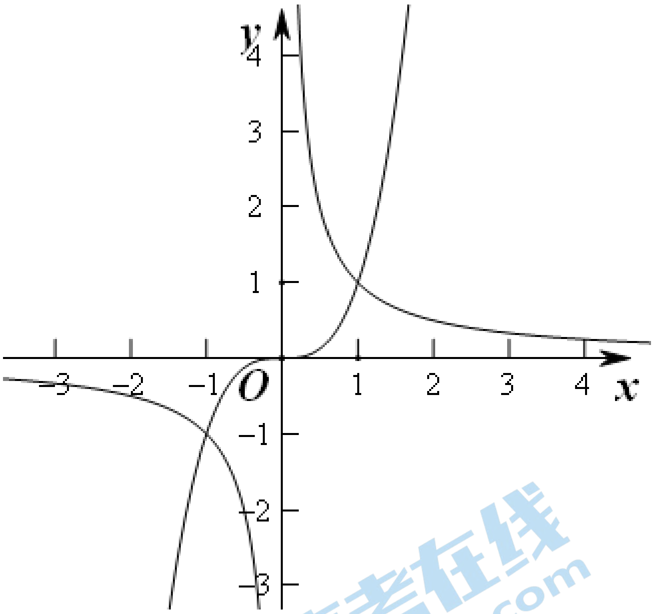
【详解】解：选项 A，$y=f(x)-g(x)=e^x-x-1$，$y'=e^x-1$，可得 $x>0$ 时，函数 y 递增；$x<0$ 时，函数 y 递减，可得 $x=0$ 处函数 y 取得最小值 0，即 $f(x)\geqslant g(x)$，故不满足“相关函数对”的定义，故 A 错误；

选项 B，$f\left(x\right)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$g\left(x\right)=\sin x$ 与 $f\left(x\right)=\ln x$ 的图象有一个交点，画出两个函数的图象，符合“单交函数对”的概念，所以 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 构成“相关函数对”，故 B 正确；



选项 C，令 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$，则在 $\left(-1,0\right)$ 上有一个解，和 $x=2$，4，有 3 个解，不符合“单交函数对”的定义，故 C 错误；

选项 D，画出函数 $f\left(x\right)=x^3, g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ 的图象如下：两个函数有两个交点，不符合“单交函数对”的定义，故 D 错误.



故选：B.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】根据 $p=p_0e^{-kh}$ 以及指数的运算即可求解.

【详解】在某高山 A_1,A_2 两处海拔高度为 h_1,h_2，

所以 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{-k(h_1-h_2)}=\frac{1}{2}$，

所以 $-k(h_1-h_2)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$，

所以 $h_1-h_2\approx\frac{0.693}{0.000126}=5500$（m）.

故选：C

10. 【答案】D

【解析】

【分析】分 $0<k<1$ 和 $k>1$ 两种情况，即可判断 A；设 $P(x,y)$，不妨设椭圆的长轴在 x 轴上，分别求出 $|PQ|^2,|AQ|\cdot|BQ|$，即可判断 C；根据 M 表示得意义结合离心率公式即可判断 B；根据离心率与椭圆扁平程度得关系即可判断 D.

【详解】解：对于 A，由题得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{k}}=1$，

当 $0<k<1$ 时，$a^2<\frac{a^2}{k}$，所以椭圆的焦点在 y 轴上；

当 $k>1$ 时，$a^2>\frac{a^2}{k}$，所以椭圆的焦点在 x 轴上，故 A 错误；

对于 C，设 $P(x,y)$，不妨设椭圆的长轴在 x 轴上，则 $|PQ|^2=y^2$，

$|AQ|\cdot|BQ|=(x+a)(a-x)=a^2-x^2$，

所以 $M=\dfrac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|BQ|}=\dfrac{y^2}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{k}$（常数），

所以 M 的值与 P 点在椭圆上的位置无关，故 C 错误；

对于 B，由方程 $a^2-x^2=ky^2$ 方得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\frac{a^2}{k}}=1$，

所以 M 是椭圆的短轴长与长轴长的比值的平方，即 $M=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$，

所以离心率 $e=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-M}$，

同理可得椭圆的长轴在 y 轴上时结论一致，

所以 $e=\sqrt{1-M}$，故 B 错误；

对于 D，M 越来越小，椭圆的离心率越大，椭圆越来越扁，故 D 正确.

故选：D.

二、填空题（共 5 题）

11. 【答案】2

【解析】

【分析】先求出 $|\vec{a}|$ 和 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，进一步利用公式即可求出 $|\vec{a}+2\vec{b}|$.

【详解】易知 $|\vec{a}|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=-1$，

$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{8-4}=2$

故答案为：2.

12. 【答案】$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ## $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】求出圆心和半径，即双曲线的渐近线，利用圆心到渐近线距离等于半径，列出方程，求出 $a^2=3$，进而求出 $c^2=3+1=4$ 和离心率.

【详解】$x^2+y^2-4y+3=0$ 变形为 $x^2+(y-2)^2=1$，故圆心为 $(0,2)$，半径为 1，

双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$ 的渐近线为 $y=\pm ax$，不妨取 $y=ax$

故 $\frac{|2|}{\sqrt{1+a^2}}=1$，解得：$a^2=3$，故 $c^2=3+1=4$，

故离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

13. 【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据给定条件，利用切线的性质结合勾股定理表示出 $|PQ|$，再利用圆外的点与圆上的点间距离最小值计算作答.

【详解】原点 $O(0,0)$，而点 $C(4,3)$，有 $|OC|=5$，圆 O 与圆 C 半径分别 1，2，显然圆 O 与圆 C 外离，

因 PQ 切圆 C 于点 Q，有 $\angle CQP=90^\circ$，因此 $|PQ|=\sqrt{|PC|^2-|CQ|^2}=\sqrt{|PC|^2-4}$，

当且仅当 $|PC|$ 最小时，$|PQ|$ 取得最小值，而点 P 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，于是得 $|PC|_{\min}=|OC|-1=4$，

所以 $|PQ|_{\min}=\sqrt{(|PC|_{\min})^2-4}=\sqrt{4^2-4}=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$

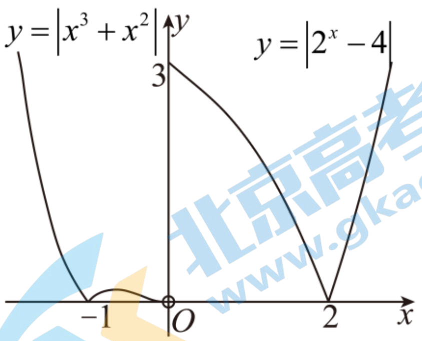
14. 【答案】$[3,12]$

【解析】

【分析】求出 $f(2)$，作出函数 $y=|f(x)-1|$ 的图象，然后对 m 分类，求 $Z_2[m,m+2]$ 的最大值即可.

【详解】由题知，$f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+1, x<0\\ 2^x-3, x\geq 0\end{cases}$，得 $f(2)=1$，

对于最大值 Z_2 型，对应函数 $y=|f(x)-f(a)|=|f(x)-1|=\begin{cases}|x^3+x^2|, x<0\\ |2^x-4|, x\geq 0\end{cases}$，图象草图如下：



当 $-2\le m<-1$，$0\le m+2<1$时，$y=\begin{cases}-(x^3+x^2),m\le x<-1\\ x^3+x^2,-1\le x<0\\ 4-2^x,0\le x\le m+2\end{cases}$，

由图象知，$\exists x_0\in(-\infty,-1)$使 $y=x_0^2(1-x_0)=3$，则 $m\in[-2,x_0)$ 时函数最大值为 $y=m^2(1-m)\in(3,12]$，

而 $m\in(x_0,-1)$ 时函数最大值为 $y=3$，

所以，上述情况最大值范围为$[3,12]$；

当 $-1\le m\le 0$，$1\le m+2\le 2$ 时，$y=\begin{cases}x^3+x^2,m\le x<0\\ 4-2^x,0\le x\le m+2\end{cases}$，

由图象知，函数最大值恒为 3；

当 $0<m\le 2$，$2<m+2\le 4$ 时，$y=\begin{cases}4-2^x,m\le x\le 2\\ 2^x-4,2<x\le m+2\end{cases}$，

由图象知，存在 $x=\log_2 7$ 时 $y=3$，则 $m\in(0,\log_2 7-2)$ 时函数最大值为 $y=3$，而 $m\in(\log_2 7-2,2]$ 时函数最大值为 $y=2^{m+2}-4\in[3,12]$，

所以，上述情况最大值范围为$[3,12]$；

综上，$Z_2\left[m,m+2\right]$的取值范围是$\left[3,12\right]$，

故答案为：$\left[3,12\right]$

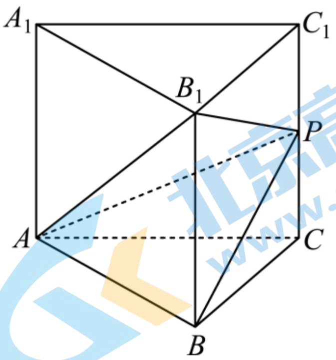
15. 【答案】②④

【解析】

【分析】根据给定条件，对①，点 P 在 CC_1 上，再举例判断；对②，点 P 在 B_1C_1 上，证明 $B_1C_1//$ 平面 A_1BC 判断；对③，取 BC，B_1C_1 中点 M,M_1，点 P 在 MM_1 上，再举例判断；对④，确定点 P 所在区域，计算面积作答.

【详解】在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\lambda\in\left[0,1\right],\mu\in\left[0,1\right]$，

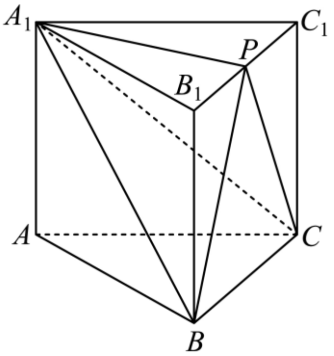
对于①，当 $\lambda=1$时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$，点 P 在 CC_1 上，$\triangle AB_1P$ 周长为 AB_1+B_1P+AP，如图，



当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，点 P 为棱 CC_1 中点，$AB_1+B_1P+AP=\sqrt{2}+\sqrt{5}$，当 $\mu=0$ 时，点 P 与点 C 重合，

$AB_1+B_1P+AP=2\sqrt{2}+1$，①不正确；

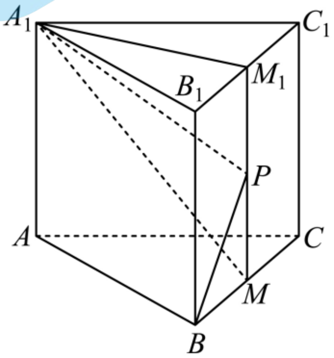
对于②，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1P}$，点 P 在棱 B_1C_1 上，如图，



因 $B_1C_1//BC, BC\subset$ 平面 A_1BC，$B_1C_1\not\subset$ 平面 A_1BC，则 $B_1C_1//$ 平面 A_1BC，因此点 P 到平面 A_1BC 距离为定值，

而 $\triangle A_1BC$ 面积是定值，即有三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值，②正确；

对于③，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，取 BC，B_1C_1 中点 M, M_1，连接 MM_1，有 $MM_1//BB_1$，$MM_1=BB_1$，如图，



$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}$，点 P 在线段 MM_1 上，$BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1M_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

有 $BB_1\perp A_1M_1$，而 $B_1C_1\perp A_1M_1$，$BB_1\cap B_1C_1=B_1, BB_1, B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，则 $A_1M_1\perp$ 平面

BCC_1B_1，

$BM_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，有 $A_1M_1\perp BM_1$，当点 P 与 M_1 重合时，即有 $A_1P\perp BP$，

$BC//B_1C_1$，则 $BC\perp A_1M_1$，而 $BC\perp MM_1$，$A_1M_1\cap MM_1=M_1$，则 $BC\perp$ 平面 A_1MM_1，$A_1M\subset$ 平面

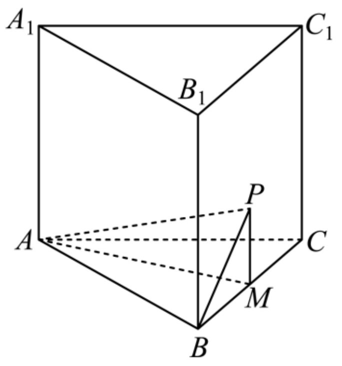
A_1MM_1，

因此 $A_1M\perp BC$，当点 P 与 M 重合时，即有 $A_1P\perp BP$，③不正确；

对于④，$|AP|\le 1$，取 BC 中点 M，连接 AM，同③ $A_1M_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，可得 $AM\perp$ 平面 BCC_1B_1，

$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当 $AP=1$ 时，连 PM，如图，则有 $PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\frac{1}{2}$，点 P 在以 M 为圆心 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆在正方形 BCC_1B_1 内的半圆上，



因此当 $AP\le 1$ 时，$PM\le\frac{1}{2}$，点 P 的轨迹是上述半圆弧与直径 BC 所围成的半圆面，其面积为 $\frac{1}{2}\pi\cdot(\frac{1}{2}BC)^2=\frac{\pi}{8}$，④正确，

所以正确的结论序号是②④.

故答案为：②④

【点睛】思路点睛：涉及立体图形中的轨迹问题，若动点在某个平面内，利用给定条件，借助线面、面面平行、垂直等性质，确定动点与所在平面内的定点或定直线关系，结合有关平面轨迹定义判断求解.

三、解答题（共 6 题）

16. 【答案】（1） $f(x)=\sin 2x$；

（2） $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right],\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right)$

【解析】

【分析】（1）先由降幂公式得 $f(x)=\frac{a}{2}\sin 2\omega x(a>0,\omega>0)$，故 $f(x)$ 为奇函数，排除条件②，若选①③，$f\left(x\right)$ 不唯一，不合题意；若选①④由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 及周期解出 $f\left(x\right)$ 即可；若选③④由最大值及周期解出 $f\left(x\right)$ 即可；

（2）先由倍角公式及辅助角公式求出 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，再令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 解出单调区间，最后写出在 $\left(0,\pi\right)$ 上的单调递增区间即可.

小问 1 详解】

$f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x=\frac{a}{2}\sin 2\omega x(a>0,\omega>0)$，易知 $f(x)$ 为奇函数，故条件②不成立，舍去.

若选①③，则 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}=1$ 且 $\frac{a}{2}=1$，故 $a=2$，$\frac{\pi\omega}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=1+4k,k\in\mathbf{Z}$，

故 $f(x)$ 不唯一，不合题意；

若选①④，$f(\frac{\pi}{4})=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi\omega}{2}=1$ 且 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，解得 $\omega=1$，$a=2$，存在且唯一，故 $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$；

若选③④，则 $\frac{a}{2}=1$ 且 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，解得 $a=2$，$\omega=1$，故 $f(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$，存在且唯一，故 $f(x)=\sin 2x$；

【小问 2 详解】

$g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1=\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，令

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$-\frac{\pi}{8}\le x\le\frac{3\pi}{8}$，当 $k=1$ 时，$\frac{7\pi}{8}\le x\le\frac{11\pi}{8}$，

故函数 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递增区间为 $\left(0,\frac{3\pi}{8}\right],\left[\frac{7\pi}{8},\pi\right)$.

17. 【答案】(1) $\frac{2}{3}$ (2) 分布列见解析，$E(X)=\frac{7}{6}$ (3) 不正确

【解析】

【分析】(1) 根据古典概型的概率公式计算可得结果；

(2) 计算出 X 的各个取值的概率可得分布列，根据期望公式计算可得数学期望；

(3) 根据方差公式计算，结合 $D_1<D_2$ 比较可得答案.

【详解】(1) 共有 6 科成绩，其中成绩大于 90 分的有数学、英语、物理和生物共 4 科，

所以从小明同学第一次测试的科目中随机抽取 1 科，该科成绩大于 90 分的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

(2) X 的所有可能取值为：0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1+C_4^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{3}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$.

（3）设 $x_1=x_2=x$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_6=b_1+b_2+\cdots+b_6=6x$，

则 $6D_1=(a_1-x)^2+(a_2-x)^2+\cdots+(a_6-x)^2$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_6)x+6x^2$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-12x^2+6x^2$

$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-6x^2$，

同理可得 $6D_2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_6^2-6x^2$，

$$6D_3=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_6+b_6}{2}\right)^2-6x^2,$$

因为 $D_1<D_2$，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2<b_1^2+b_2^2+\cdots+b_6^2$，

所以 $6D_3-6D_1=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_6+b_6}{2}\right)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2)$

$=\frac{(b_1-a_1)(b_1+3a_1)}{4}+\frac{(b_2-a_2)(b_2+a_2)}{4}+\cdots+\frac{(b_6-a_6)(b_6+a_6)}{4}$ 的符号不确定，

所以 D_3 与 D_1 无法比较大小，

$$6D_3-6D_2=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_6+b_6}{2}\right)^2-(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_6^2)$$

$$<\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+\cdots+\frac{a_6^2+b_6^2}{2}-(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_6^2)$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2-(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_6^2)}{2}<0,$$

所以 $D_3<D_2$，

故这种观点不正确.

【点睛】关键点点睛：掌握求离散型随机变量的分布列的步骤和数学期望公式是解题关键.

18. 【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{15}}{6}$.

【解析】

【分析】（1）要证 $AB\perp PM$，可证 $DC\perp PM$，由题意可得，$PD\perp DC$，易证 $DM\perp DC$，从而 $DC\perp$ 平面 PDM，即有 $DC\perp PM$，从而得证；

（2）取 AD 中点 E，根据题意可知，ME,DM,PM 两两垂直，所以以点 M 为坐标原点，建立空间直角坐标系，再分别求出向量 $\overrightarrow{AN}$ 和平面 PDM 的一个法向量，即可根据线面角的向量公式求出.

【详解】（1）在 $\triangle DCM$ 中，$DC=1$，$CM=2$，$\angle DCM=60^\circ$，由余弦定理可得 $DM=\sqrt{3}$，

所以 $DM^2+DC^2=CM^2$，$\therefore DM\perp DC$．由题意 $DC\perp PD$ 且 $PD\cap DM=D$，$\therefore DC\perp$ 平面 PDM，而 $PM\subset$ 平面 PDM，所以 $DC\perp PM$，又 $AB//DC$，所以 $AB\perp PM$．

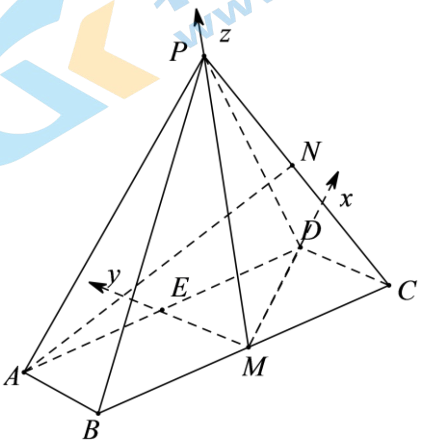
（2）由 $PM\perp MD$，$AB\perp PM$，而 AB 与 DM 相交，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $AM=\sqrt{7}$，所以 $PM=2\sqrt{2}$，取 AD 中点 E，连接 ME，则 ME,DM,PM 两两垂直，以点 M 为坐标原点，如图所示，建立空间直角坐标系，

则 $A(-\sqrt{3},2,0),P(0,0,2\sqrt{2}),D(\sqrt{3},0,0),M(0,0,0),C(\sqrt{3},-1,0)$

又 N 为 PC 中点，所以 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},\sqrt{2}\right)$.

由（1）得 $CD\perp$ 平面 PDM，所以平面 PDM 的一个法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$

从而直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.



【点睛】本题第一问主要考查线面垂直的相互转化，要证明 $AB\perp PM$，可以考虑 $DC\perp PM$，题中与 DC 有垂直关系的直线较多，易证 $DC\perp$ 平面 PDM，从而使问题得以解决；第二问思路直接，由第一问的垂直关系可以建立空间直角坐标系，根据线面角的向量公式即可计算得出.

19. 【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$（2）存在，$\lambda=2$

【解析】

【分析】（1）根据椭圆 几何性质求出 a,b 可得结果；

（2）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $T(x_2,-y_2)$，设直线 $l:y=k(x+4)$，代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得到 x_1+x_2 和 x_1x_2，利用直线 PT 的方程求出 H 的坐标，求出 $|AD|$、$|DH|$，则可得 λ 的值.

【详解】（1）因为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $D(-2,0)$，所以 $a=2$，

又 $2c=2\sqrt{3}$，即 $c=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）显然直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 $l:y=k(x+4)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x+4) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y 并整理得 $(1+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-4=0$，

$\Delta=(32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)>0$，得 $0<k^2<\dfrac{1}{12}$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $T(x_2,-y_2)$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{32k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$，

直线 PT：$y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，令 $y=0$，得 $x=x_1-\dfrac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2}$，

所以 $H(x_1-\dfrac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2},0)$，

又 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{|AD|-|DH|}{|AD|\cdot|DH|}=\dfrac{1}{|DH|}-\dfrac{1}{|AD|}$，

又因为 $D(-2,0),A(-4,0)$，$H(x_1-\dfrac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2},0)$，

所以 $|AD|=2$，

$$|DH|=x_1-\frac{y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2}+2=x_1-\frac{k(x_1+4)(x_1-x_2)}{k(x_1+4)+k(x_2+4)}+2$$

$$=x_1-\frac{k(x_1+4)(x_1-x_2)}{k(x_1+x_2)+8k}+2$$

$$=\frac{kx_1(x_1+x_2)+8kx_1-k(x_1+4)(x_1-x_2)}{k(x_1+x_2)+8k}+2$$

$$=\frac{kx_1^2+kx_1x_2+8k_1x_1-kx_1^2+kx_1x_2-4kx_1+4kx_2}{k(x_1+x_2)+8k}+2$$

$$=\frac{4k(x_1+x_2)+2kx_1x_2}{k(x_1+x_2)+8k}+2$$

$$=\frac{4k\cdot\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}+2k\cdot\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}}{k\cdot\dfrac{-32k^2}{1+4k^2}+8k}+2$$

$=-1+2=1$，

所以$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$，解得$\lambda=2$.

所以存在常数$\lambda=2$，使得$|AD|\cdot|DH|=2(|AD|-|DH|)$成立.

【点睛】关键点点睛：用P,Q的坐标表示H的坐标，再根据韦达定理算$|DH|$的值是解题关键.

20.【答案】(1) $y=(1-a)x+a$；(2) 当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a>0$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增；(3) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 求函数导数得切线斜率，再由点斜式可得解；

(2) 由$f'(x)=\frac{x-a}{x}$，分$a\leq 0$和$a>0$两种情况讨论导函数的正负，可得函数的单调区间；

(3) 分析可得要证$(a-1)x_0>a$，$x_0-lnx_0-1>0$，令$g(x_0)=x_0-lnx_0-1$，利用导数证得$g(x_0)>0$，即可得证.

【详解】(1) $f(x)=x-a\ln x$，$f(1)=1$，

$f'(x)=1-\frac{a}{x}$，$f'(1)=1-a$，

所以在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=(1-a)(x-1)$，

整理得：$y=(1-a)x+a$，

(2) 函数$f(x)=x-a\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，$f^{'}(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

当$a\leq 0$时，$f'(x)\geq 0$，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=a$，

此时在$(0,a)$上$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

在$(a,+\infty)$上$f'\ \ x\ \ >0$，$f(x)$单调递增，

综上：$a\leq 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

$a>0$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增；

(3) 证明：由 (2) 可知，当$a>0$时，$f(x)=x-alnx=0$才有两个不相等的实根，且$x_0>0$，

则要证$(a-1)x_0>a$，即证$\frac{a-1}{a}>\frac{1}{x_0}$，即证$1-\frac{1}{a}>\frac{1}{x_0}$，

而$x_0-alnx_0=0$，则$a=\frac{x_0}{lnx_0}(x_0\neq 1$，否则方程不成立)，

所以即证$1-\frac{lnx_0}{x_0}>\frac{1}{x_0}$，化简得$x_0-lnx_0-1>0$，

令 $g(x_0)=x_0-lnx_0-1$，则 $g'(x_0)=1-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{x_0-1}{x_0}$，

当 $0<x_0<1$ 时，$g'(x_0)<0$，$g(x_0)$ 单调递减，

当 $x_0>1$ 时，$g'(x_0)>0$，$g(x_0)$ 单调递增，

所以 $g(x_0)\geqslant g$（1）$=0$，而 $x_0\neq 1$，

所以 $g(x_0)>0$，

所以 $(a-1)x_0>a$，得证.

【点睛】关键点点睛：本题的解题关键是通过证明 $1-\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{x_0}$ 即可得解，分析函数在极小值左侧的单调性，关键再由证明 $1-\dfrac{lnx_0}{x_0}>\dfrac{1}{x_0}$，利用构造函数的方法即可.

21. 【答案】（1）$3,2,1,1,0,-1$（答案不唯一）；（2）证明见解析（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据条件写出 A_6，满足相邻项相差为 0 或 1，$a_6<0$ 即可；

（2）假设 $a_1<0,a_N>0$，把 A_N 中的所有负数组成集合 T，取 T 中最大值为 a_m，可证明 $a_{m+1}=0$，若 $a_1>0,a_N<0$，考虑数列 $B_N:-a_1,-a_2,\cdots,-a_N$，同上处理得 $-a_{m+1}=0$，即 $a_{m+1}=0$；

（3）设 $t=\dfrac{S(A_n)}{N}$，则 $t\in Z$. A_n 中最大值为 $M>0$，最小值为 $m<0$，可得 $m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$，设在数列 A_N 中，$a_i=m$，$a_j=M$，$j-i\geq 2$，构造数列 B：$a_i-t,a_{i+1}-t,\cdots,a_j-t$，则数列 B 至少有 3 项，利用（2）存在 r，$a_r-t=0$，$a_r=t$，若 $i>j$，构造数列 B：$t-a_i,t-a_{i+1},\cdots,t-a_j$，同理得证.

【详解】解：（1）$3,2,1,1,0,-1$.答案不唯一.

（2）因为 $a_1a_N<0$，所以 a_1,a_N 异号.

假设 $a_1<0,a_N>0$.

设 $T=\{i\,|\,a_i<0,i\in\{1,2,3,\cdots,N\}\}$.因为 $a_1<0$，所以 $T\neq\varnothing$.

又因为 T 是有限自然数集，所以可设 T 中的最大数为 m，$1\leq m\leq N-1$..

令 $k=m+1$，则 $a_k\geq 0$.

因为 $|a_k-a_{k-1}|=a_k-a_{k-1}\leq 1$，所以 $a_k\leq 1+a_{k-1}=1+a_m<1$.

因为 $0\leq a_k<1$，且 a_k 为整数，所以 $a_k=0$.

因此若数列 $A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N(N\geq 3)$ 满足 $a_1<0,a_N>0$，且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，

都有 $|a_i-a_{i-1}|\leqslant 1$，

则存在 a_k 使得 $a_k=0$.

若 $a_1>0,a_N<0$，则数列 $-a_1,-a_2,\cdots,-a_N$ 满足 $-a_1<0,-a_N>0$，

且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，都有 $|(-a_i)-(-a_{i-1})|=|a_i-a_{i-1}|\leq 1$，

故存在$-a_k$使得$-a_k=0$，即存在a_k使得$a_k=0$.

综上，数列A_N中存在a_k使得$a_k=0$.

（3）设$t=\dfrac{S(A_n)}{N}$，则$t\in Z$.

设数列$A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N$中的最大值为$M>0$，最小值为$m<0$.

因为$Nm<S(A_N)<NM$，所以$m<t=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{N}<M$.

设在数列A_N中，$a_i=m$，$a_j=M$.

若$i<j$，因为$|a_i-a_j|=M-m\geq 1-(-1)=2$，所以$j\geq i+2$.

设数列$B:a_i-t,a_{i+1}-t,\cdots,a_j-t$，则数列$B$至少有3项.

因为$(a_i-t)(a_j-t)=(m-t)(M-t)<0$，且对任意$k=1,2,\cdots,j-i$，

都有$|(a_{i+k}-t)-(a_{i+k-1}-t)|=|a_{i+k}-a_{i+k-1}|\leq 1$，

所以由（2）可知存在a_r-t使得$a_r-t=0$，$r\in\{i+1,i+2,\cdots,j-1\}$.，即$t=\dfrac{S(A_n)}{N}=a_r$.

若$i>j$，设数列$C:t-a_j,t-a_{j+1},\cdots,t-a_i$.

同理，存在$t-a_r$使得$t-a_r=0$ $r\in\{j+1,j+2,\cdots,i-1\}$.，即$t=\dfrac{S(A_n)}{N}=a_r$.

综上，若$S(A_N)$是N的整数倍，则数列A_N中存在a_r使得$S(A_N)=Na_r$.

【点睛】关键点点睛：本题考查数列新定义，解题关键是问题的转化，第（2）小题在负数向正数转化时中间一定会出现0，这里出现一个技巧，在正数向负数转化时（当然也会出现0），取相反数构成新数列，问题变为刚解决的问题，负数向正数转化．第（3）小题利用极端思想，取数列中的最大值M和最小值m，由最小值到最大值间的数列（原数列的一部分），构造数列$\{a_k-t\}$（或$\{t-a_k\}$）利用（2）的结论得证.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。