高三备考监测第二次联合考试
数学参考答案

1. A 【解析】本题考查平面向量的运算,考查运算求解能力.

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}^2=-2$.

2. D 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{2\}$,所以$U=\{1,2,3,4,5\}$,则$A=\{3,4,5\}$.

3. A 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.

由$y=2\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,可得$\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$,所以$\omega=\pm2$,所以"$\omega=2$"是"$y=2\tan(\omega x+\frac{\pi}{3})$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$"的充分不必要条件.

4. B 【解析】本题考查等差数列的性质,考查运算求解能力.

因为$a_1=3$,$3a_2$是a_3和a_4的等差中项,所以$18q=3q^2+3q^3$,解得$q=2$或$q=-3$(舍去),故$a_2=6$.

5. A 【解析】本题考查全称量词,考查逻辑推理的核心素养.

依题意知命题"$\exists x\in(0,\pi)$,$\sin 2x-k\sin x<0$"为假命题,则"$\forall x\in(0,\pi)$,$\sin 2x-k\sin x\geqslant0$"为真命题,所以$2\sin x\cos x\geqslant k\sin x$,则$k\leqslant2\cos x$,解得$k\leqslant-2$,所以$k$的取值范围为$(-\infty,-2]$.

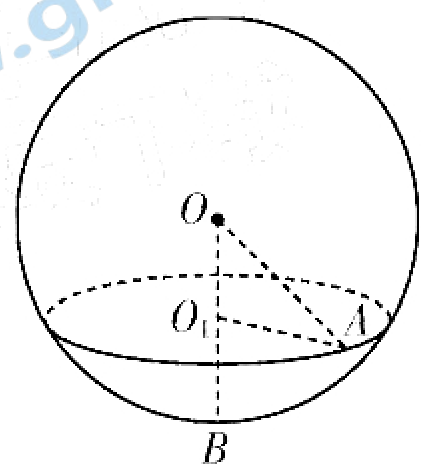
6. D 【解析】本题考查奇函数的性质,考查运算求解能力.

由$f(x)=x^3+x-1$,可得$f(-x)+f(x)=-2$,又$f(\lg m)=\frac{1}{2}$,所以$f(\lg\frac{1}{m})=-\frac{5}{2}$.

7. B 【解析】本题考查函数模型,考查数学建模的核心素养.

假设至少需要经过的时间为x(单位:年),由题意得$(\frac{4}{5})^x<\frac{1}{3}$,解得$x>\log_{\frac{4}{5}}\frac{1}{3}$.因为$\log_{\frac{4}{5}}\frac{1}{3}=\frac{-\lg 3}{\lg 4-\lg 5}=\frac{-\lg 3}{2\lg 2-(1-\lg 2)}=-\frac{\lg 3}{3\lg 2-1}\approx4.8$,所以$x>4.8$,$x=5$.

8. B 【解析】本题考查球的应用,考查空间想象能力.



如图,点O是球冠所在球的球心,点O_1是球冠底面圆的圆心,点A是球冠底面圆周上一点,线段O_1B是球冠的高.

依题意,OB垂直于球冠底面,显然$O_1B=h$,$OO_1=R-h$,$O_1A=r$.

在$Rt\triangle OO_1A$中,$OA^2=OO_1^2+O_1A^2$,即$R^2=(R-h)^2+r^2$,整理化简得$R=\frac{h^2+r^2}{2h}$,

所以球冠所在球的半径$R=\frac{h^2+r^2}{2h}$.因为球冠底面圆的周长$C=500\pi$,所以$r=\frac{C}{2\pi}=250$,

又球冠的表面积公式为$S=2\pi Rh$,且$S=65000\pi$,则$h=\frac{S}{2\pi R}=\frac{32500}{R}$,

因为$R=\frac{h^2+r^2}{2h}$,所以$65000=\frac{32500^2}{R^2}+250^2$,解得$R=650$,

故球O的表面积为$4\pi R^2=4\pi\times650^2=1690000\pi$.故选B.

9. ABD 【解析】本题考查空间向量的基本定理,考查运算求解能力.

选项A,因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$共面;

选项B,因为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$共面;

选项 D，因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},6\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$ 共线，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},6\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a},-\boldsymbol{c}$ 共面.

10. ACD 【解析】本题考查三角函数图象的平移，考查数形结合的数学思想.

对于选项 A，把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度，所得曲线对应的函数解析式为 $y=\cos(x-\frac{5\pi}{6})=\cos(x+\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{2})=-\sin(x+\frac{2\pi}{3})$，故 A 正确；

对于选项 B，把曲线 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得曲线对应的函数解析式为 $y=\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(x+\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})\neq-\sin(x+\frac{2\pi}{3})$，故 B 错误；

对于选项 C，把曲线 C_1 向左平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位长度，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，所得曲线对应的函数解析式为 $y=\cos(x+\frac{7\pi}{6})=\cos(x+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=-\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，故 C 正确；

对于选项 D，把曲线 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，最后把得到的曲线向右平移 π 个单位长度，所得曲线对应的函数解析式为 $y=\cos(x-\frac{5\pi}{6})=\cos(x+\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{2})=-\sin(x+\frac{2\pi}{3})$，故 D 正确.

11. AB 【解析】本题考查数列的递推关系，考查逻辑推理的核心素养.

设良马第 n 天行走的路程里数为 a_n，驽马第 n 天行走的路程里数为 b_n，则 $a_n=193+13(n-1)$，$b_n=97-\frac{1}{2}(n-1)(n\in\mathbf{N}^*,1\leqslant n\leqslant 9)$. 良马这 9 天共行走了 $9\times193+\frac{9\times8\times13}{2}=2205$ 里路程，驽马这 9 天共行走了 $9\times97+\frac{9\times8\times(-\frac{1}{2})}{2}=855$ 里路程，故长安与齐国两地相距 $\frac{2205+855}{2}=1530$ 里，A 正确. 3 天后，良马共行走了 $3\times(193+13)=618$ 里路程，驽马共行走了 $3\times(97-\frac{1}{2})=289.5$ 里路程，故它们之间的距离为 328.5 里，B 正确. 良马前 6 天共行走了 $6\times193+\frac{6\times5\times13}{2}=1353$ 里 <1530 里，故良马行走 6 天还未到达齐国，C 不正确. 良马前 7 天共行走了 $7\times193+\frac{7\times6\times13}{2}=1624$ 里 >1530 里，则良马从第 7 天开始返回迎接驽马，故 8 天后，两马之间的距离即两马第 9 天行走的距离之和，由 $a_9+b_9=193+13\times8+97+(-\frac{1}{2})\times8=390$，知 8 天后，两马之间的距离为 390 里.

12. BCD 【解析】本题考查导数的应用，考查数形结合，函数与方程的数学思想.

$f'(x)=\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$. 对于 B，设 $h(x)=xe^x+1$，则 $h'(x)=(x+1)e^x$，当 $x>-1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(-1)=-\frac{1}{e}+1>0$，则 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，$h(x)>h(-1)=-\frac{1}{e}+1>0$，则 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增. 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$. 对于 C，可将问题转化为方程 $\frac{e^x\cdot x+1}{(x+1)^2}=k$ 有两个不同的解的问题，即 $e^x\cdot x+1=k(x+1)^2$，根据数形结合，可知切点在第一象限，设切

点为(x_0,y_0),解方程组$\begin{cases} e^{x_0}\cdot x_0+1=k(x_0+1)^2, \\ 2(x_0+1)\cdot k=(x_0+1)\cdot e^{x_0}, \end{cases}$消去$k$,可得$e^{x_0}(x_0^2+1)=2$,可知$k=\frac{e}{2}$不是方程的解. 对于D,当$-1<x<0$,且$a=0$时,$f(x)=\frac{e^x-1}{x+1}\geq a\ln(x+1)$不成立.

13. 3 【解析】本题考查基本不等式,考查运算求解能力.

由题可得$a(b+1)=4$,则$a+b=\frac{4}{b+1}+b=b+1+\frac{4}{b+1}-1\geq 2\sqrt{4}-1=3$,当且仅当$a=2,b=1$时,等号成立.

14. $-\frac{7}{17}$ 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

设直角三角形较短的直角边为x,则较长的直角边为$x+7$.

所以$x^2+(x+7)^2=169$,即$x^2+7x-60=0$,解得$x=5$或$x=-12$(舍去).

直角三角形较小的锐角为α,可得$\tan\alpha=\frac{x}{x+7}=\frac{5}{12}$.

所以$\tan(\alpha+\frac{3\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{3\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{3\pi}{4}}=\frac{\frac{5}{12}-1}{1+\frac{5}{12}\times1}=-\frac{7}{17}$.

15. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$(或$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,写对其中一个就得5分) 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$. 由$|z|=|z+1|$,可得$x^2+y^2=(x+1)^2+y^2$,解得$x=-\frac{1}{2}$. 又$\frac{z-1}{z+1}$是纯虚数,设$\frac{z-1}{z+1}=ti(t\in\mathbf{R}$且$t\neq0)$,则$-\frac{3}{2}+yi=-ty+\frac{1}{2}ti$,则$\begin{cases} -\frac{3}{2}=-ty, \\ y=\frac{1}{2}t, \end{cases}$解得$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$或$z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

16. $9\sqrt{2}$ 【解析】本题考查空间几何体的体积,考查空间想象能力.

设$A_1O_1=b$,由题意,$b^2+b^2-2b^2\cos\frac{2\pi}{n}=6^2+6^2-2\times6^2\cos\alpha$,$b^2(1-\cos\frac{2\pi}{n})=6^2\times(1-\cos\alpha)$,得$b\sin\frac{\pi}{n}=6\sin\frac{\alpha}{2}$(※),$\frac{V}{n}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times b^2\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\sqrt{6^2-b^2}$(#).

将(※)代入(#),可得$\frac{V}{n}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times b^2\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\sqrt{6^2-b^2}=72\times\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\times\cos\frac{\pi}{n}\times\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{n}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

因为$\cos\angle A_1O_1A_2=2\cos\alpha-1$,所以$\cos\frac{2\pi}{n}=2\cos\alpha-1$,则$\cos^2\frac{\pi}{n}=\cos\alpha$,$\frac{V}{n}=36\times\sqrt{\cos\alpha}\times\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

$\frac{V}{n}=36\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2}}$,当$\cos\alpha=-\frac{1}{-1\times2}=\frac{1}{2}$时,$\frac{V}{n}$取得最大值$9\sqrt{2}$.

17. 解:a,c,b成等差数列,则$a+b=2c$. …………………………………………………… 1分

选择条件①,

由△ABC的周长为6,得$a+b+c=6$,又$a+b=2c$,则$c=2$,$a+b=4$. ………………………… 2分

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$,则$2ab+2ab\cos C=4^2-2^2=12$,即$ab(1+\cos C)=6$①.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，即 $ab\sin C=2\sqrt{3}$②. ………………………………………… 4 分

$\frac{②}{①}$得$\frac{\sin C}{1+\cos C}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 6 分

$\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{1+2\cos^2\frac{C}{2}-1}=\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0<C<\pi$，所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 8 分

则 $ab=4$，则 $a=b=c=2$，故△ABC 为等边三角形. ………………………………………… 10 分

选择条件②，

由 $a\sin B=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$，得 $c=\sqrt{3}$. ………………………………………… 3 分

$a+b=2c=2\sqrt{3}\geqslant 2\sqrt{ab}$，则 $ab\leqslant 3$. ………………………………………… 5 分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，则 $ab\sin C=2\sqrt{3}$，又 $\sin C\leqslant 1$，则 $ab\geqslant 2\sqrt{3}$，矛盾， ……………………… 8 分

故不存在这样的△ABC. ………………………………………… 10 分

选择条件③，

由 $ab=4$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$. ……………… 3 分

因为 $a+b=2c$，所以 c 不可能为最大边，故 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 4 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以 $c^2=(a+b)^2-2ab-ab$，$c^2=(2c)^2-3ab$，因此 $c^2=ab$. ………………………………………… 6 分

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，$(a-b)^2=0$，所以 $a=b$. ………………………………………… 8 分

△ABC 为等边三角形. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1) $y=f(t)\cdot g(t)=\begin{cases}-t^2+10t+2000, & 0\leqslant t<10,\\ \frac{100(-t^2+50t)}{t+10}, & 10\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$ $(t\in\mathbf{N})$. ………………………… 4 分

(2) 令 $h(t)=\begin{cases}-t^2+10t+2000, & 0\leqslant t<10,\\ \frac{100(-t^2+50t)}{t+10}, & 10\leqslant t\leqslant 30\end{cases}$ $(t\in\mathbf{N})$.

当 $0\leqslant t<10$ 且 $t\in\mathbf{N}$ 时，$h(t)=-t^2+10t+2000=-(t-5)^2+2025$，

故当 $t=5$ 时，$h(t)$取得最大值，即 $h(t)_{\max}=2025$； ………………………………………… 6 分

当 $10\leqslant t\leqslant 30$ 且 $t\in\mathbf{N}$ 时，

$h(t)=\frac{100(-t^2+50t)}{t+10}=\frac{100[-(t+10)^2+70(t+10)-600]}{t+10}=100[-(t+10)-\frac{600}{t+10}+70]$， ………… 8 分

因为函数 $y=x+\frac{600}{x}$ 在区间$(10,\sqrt{600})$上单调递增，在区间$(\sqrt{600},+\infty)$上单调递减，又当 $10\leqslant t\leqslant 30$ 且 $t\in\mathbf{N}$ 时，$h(14)=2100$，$h(15)=2100$，所以 $h(t)_{\max}=2100$. ………………………………………… 10 分

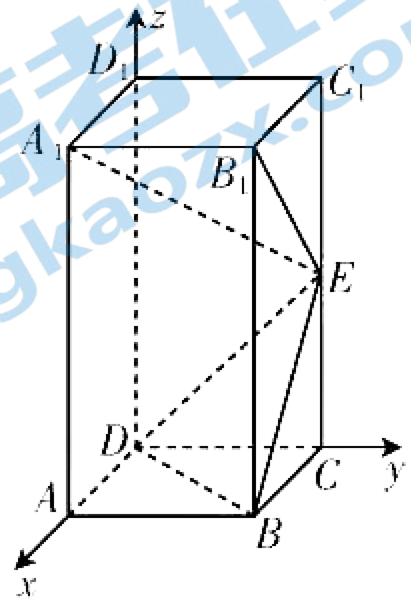
因为 $2025<2100$，因此，这种商品的日销售额的最大值为 2100 元. ………………………………………… 12 分

19. (1)证明：当 $AA_1=2$ 时，$B_1E=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{2}$，所以 $B_1E^2+BE^2=BB_1^2$，所以 $B_1E\perp BE$. ……………… 2 分

又 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，则 $A_1B_1\perp BE$. ………………………………………… 3 分

因为 $A_1B_1\cap B_1E=B_1$，所以 $BE\perp$ 平面 A_1B_1E. ………………………………………… 5 分

又 $BE\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 A_1B_1E. …………………………………………………………… 6 分



(2)解：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,3)$，$E(0,1,\frac{3}{2})$.

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,3)$. …………………………………………… 8 分

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\frac{3}{2}z=0.\end{cases}$

不妨令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=3$，得 $\boldsymbol{n}=(3,-3,2)$. …………………………………………………………… 10 分

故 A_1 到平面 BDE 的距离 $d=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}}{|\boldsymbol{n}|}|=\frac{9}{\sqrt{22}}=\frac{9\sqrt{22}}{22}$. …………………………………………… 12 分

20. 解：(1)函数 $f(x)$ 图象的两条对称轴间的最短距离是 $\frac{\pi}{2}$，所以最小正周期为 π，所以 $\omega=2$. ………… 2 分

因为 $f(x)\geqslant f(-\frac{\pi}{12})$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f(-\frac{\pi}{12})=-2$，

所以 $\omega=2$，$-\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由 $f(\frac{B}{2})=\sin(A-B)-\sqrt{3}\cos(A-B)$，可得 $2\sin(B-\frac{\pi}{3})=2\sin(A-B-\frac{\pi}{3})$，则 $A=2B$. ……… 7 分

因为△ABC 为锐角三角形，$A=2B$，

所以 $\begin{cases}0<2B<\frac{\pi}{2},\\ 0<B<\frac{\pi}{2},\\ 0<\pi-3B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 可得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$， ………………………………………………………………… 9 分

所以 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=\frac{3\sin B-4\sin^3 B}{\sin B}=3-4\sin^2 B=4\cos^2 B-1\in(1,2)$. …………………… 12 分

21. 证明：(1)由题意，$\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+4}{2a_{n-1}}=\frac{2}{a_{n-1}}+\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}=2(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{2})$， …………………………… 2 分

$\{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}=1$ 为首项，2 为公比的等比数列. ……………………………………………… 3 分

$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}=1\times 2^{n-1}$，则 $a_n=\frac{2}{2^n-1}$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)$a_n=\frac{2}{2^n-1}>\frac{2}{2^n}=(\frac{1}{2})^{n-1}$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2[1-(\frac{1}{2})^n]$. …………………………………………………………………………………………… 7 分

当 $n=1$ 时，$S_1<\frac{7}{2}$ 成立；当 $n\geqslant 2$ 时，$2^n>3$，故 $a_n=\frac{2}{2^n-1}<\frac{3}{2^n}$， ………………………………… 9 分

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<2+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{3}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{7}{2}-3\times(\frac{1}{2})^n<\frac{7}{2}$. ……………… 11 分

故 $2[1-(\frac{1}{2})^n]<S_n<\frac{7}{2}$. …………………………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

取 $x=1$，$f(1)=-a+1\geqslant 1$，不符合题意，舍去. ………………………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极大值，即最大值 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}$， ……………………………………………… 4 分

若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $\ln\frac{1}{a}\leqslant 0$，解得 $a\geqslant 1$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)证明：要证 $(\frac{\ln x}{x}+1)(e^{-x}+1)<\frac{2}{e}+1$，即证 $\frac{\ln x}{xe^x}+\frac{1}{e^x}+\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{e}$. ……………………………… 7 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $h'(x)<0$，解得 $x>e$. 故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. 当 $x=e$ 时，$h(x)$ 取得极大值，即最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$. 故 $h(x)=\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………………………………… 9 分

设 $F(x)=x\cdot e^{x-1}-\ln x-x$，则 $F'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}-\frac{1}{x}-1=e^{x-1}(1+x)-\frac{1+x}{x}=(1+x)(e^{x-1}-\frac{1}{x})$.

设 $\varphi(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(1)=e^{1-1}-1=0$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$.

故当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，

$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故当 $x=1$ 时，$F(x)$ 取得极小值，即最小值 $F(1)=0$，故 $F(x)\geqslant 0$，即 $x\cdot e^{x-1}-\ln x-x\geqslant 0$.

故 $\frac{\ln x}{x\cdot e^x}+\frac{1}{e^x}\leqslant\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立. ……………………………………………… 11 分

又 $h(x)=\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=e$ 时，等号成立. 两个等号不能同时成立，所以 $\frac{\ln x}{x\cdot e^x}+\frac{1}{e^x}+\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{e}$. 故 $(\frac{\ln x}{x}+1)(e^{-x}+1)<\frac{2}{e}+1$. ……………………………………………………………………………………… 12 分