高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式、立体几何、直线与圆、圆锥曲线。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=1\}$ 和 $B=\{(x,y)|y=1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(0,1)\}$

2. 已知直线 $l_1:ax+2y+3=0$ 和 $l_2:x+(a-1)y+1=0$，则“$a=2$”是“$l_1 /\!/ l_2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小等于

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

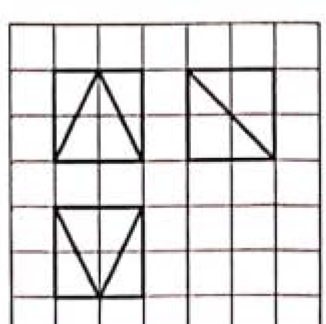
4. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A,B 两点. 若 $|AB|=|BF_2|$，则 $|AF_2|=$

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

5. 在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$ 成公比为 4 的等比数列，则 $k_3=$

A. 84　　B. 86　　C. 88　　D. 96

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为 1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{20}{3}$　　C. 6　　D. $\frac{17}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰变并逐渐消失. 放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$ (表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$ (T 为半衰期)). 已知碳-14的半衰期为5 730年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约(结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$)

A. 7 650年　　B. 8 890年

C. 9 082年　　D. 10 098年

8. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；

③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度；④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度.

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$ 恒成立，若 $f(-5)=3$，则 $f(3-x)<27$ 的解集为

A. $(-\infty,15)$　　B. $(-\infty,18)$　　C. $(15,+\infty)$　　D. $(18,+\infty)$

10. 人利用双耳可以判定声源在什么方位，听觉的这种特性叫做双耳定位效应(简称双耳效应). 根据双耳的时差，可以确定声源 P 必在以双耳为左右焦点的一条双曲线上. 又若声源 P 所在的双曲线与它的渐近线趋近，此时声源 P 对于测听者的方向偏角 α，就近似地由双曲线的渐近线与虚轴所在直线的夹角来确定. 一般地，甲测听者的左右两耳相距约为20 cm，声源 P 的声波传及甲的左、右两耳的时间差为 3×10^{-5} s，声速为334 m/s，则声源 P 对于甲的方向偏角 α 的正弦值约为

A. 0.004　　B. 0.04　　C. 0.005　　D. 0.05

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x\geq1,\\ x-1, x<1,\end{cases}$ 则满足 $f(-x)-f(x-1)>-1$ 的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,2)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为________.

14. 已知实数 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0,\\ x-y-1\geqslant 0,\\ 2x-6y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为__________.

15. 某中学组队到某村参加社会实践活动，村长让学生测量河流两岸 A 与 B 两点间的距离. 同学们各抒己见，但李明想到一种测量方法，同学们一致认为很好. 其方法是：在点 A 处垂直地面竖立一根竹竿，在竹竿上取一点 P，使 $AP=a$ 米，在 P 处测得从 P 看 B 的俯角为 α.

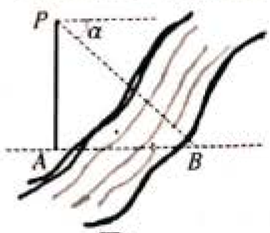


图1

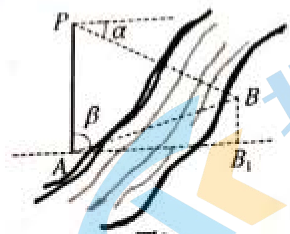


图2

①当 A 和 B 在同一水平面上时(如图 1)，测得 $AB=$__________米；

②当 A 和 B 不在同一水平面上(A 和 B_1 在同一水平面上)时(如图 2)，利用测角仪测得 $\angle PAB=\beta$，此时，可测得 $AB=$__________米. (本小题第一空 2 分，第二空 3 分)

16. 已知抛物线 $C:x^2=\frac{4}{3}y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，则 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. (本小题满分 12 分)

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，角 A 为锐角且 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)求 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$；

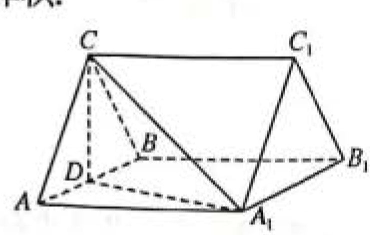
(2)若 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$c=2\sqrt{2}$，求 b.

19. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$CD\perp AB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$.

(1)求证：平面 $ABC\perp$平面 A_1CD；

(2)若平面 $ABC\perp$平面 AA_1B_1B，$AB=CB=2$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.



20.(本小题满分 12 分)

在$\triangle AOB$中,$OB=2\sqrt{3}$,$\angle OAB=60^\circ$. 以O为原点,$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴的正方向,建立平面直角坐标系xOy,设A在x轴的上方,C为$\triangle AOB$外接圆的圆心.

(1)求圆C的方程;

(2)求圆C在点B处的切线方程;

(3)是否存在点A,使得$|AB|=2$?若存在,求出点A的坐标;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知F_1,F_2分别是椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,$A,C$分别是椭圆$E$的左、右顶点,$D,B$分别是椭圆$E$的上、下顶点,若四边形$ABCD$的面积为$2\sqrt{2}$,$\triangle DF_1F_2$的面积为1.

(1)求椭圆E的方程;

(2)设平行于AB的动直线l与四边形$ABCD$的对边AD,BC分别交于点M,N,与椭圆交于点P,Q(在直线l上从上到下顺次分别为P,M,N,Q),求证:$|PM|=|NQ|$.

22.(本小题满分 12 分)

设函数$f(x)=xe^x-x$,$g(x)=\ln x+1$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间;

(2)证明:不等式$f(x)\geqslant g(x)$在区间$(0,+\infty)$上恒成立.

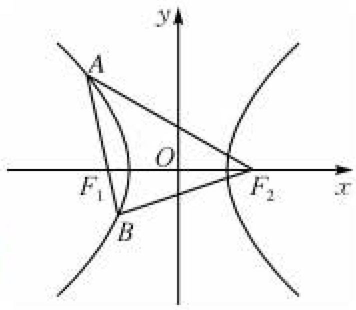
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　解方程组$\begin{cases}y=1,\\x+y=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$所以$A\cap B=\{(0,1)\}$. 故选 D.

2. A　当$a=2$时，可以推出$l_1/\!/l_2$；当$l_1/\!/l_2$时，可得$a=2$或$a=-1$，所以“$a=2$”是“$l_1/\!/l_2$”的充分不必要条件. 故选 A.

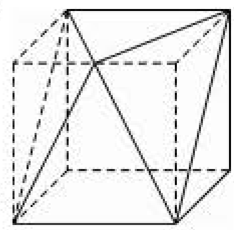
3. A　由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的大小为$30°$. 故选 A.

4. C　根据双曲线的定义，得$|AF_2|-|AF_1|=4$，$|BF_2|-|BF_1|=4$，两式相加得$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=8$，即$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=8$，又$|BF_2|=|AB|$，所以$|AF_2|=8$. 故选 C.



5. B　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d. 因为$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$成公比为 4 的等比数列，所以$a_2=4a_1$，所以$a_1+d=4a_1$，得$d=3a_1$. 所以$a_{k_3}=4^4a_1=256a_1$，所以$a_1+(k_3-1)d=256a_1$. 即$(k_3-1)\cdot 3a_1=255a_1$，解得$k_3=86$. 故选 B.

6. B　由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥(如图)，所以该几何体的体积为$2\times2\times2-2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{3}$. 故选 B.



7. C　由题意知$t=\dfrac{T\cdot\ln\dfrac{N_0}{N}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\times\ln\dfrac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\ln 3}{\ln 2}=5\,730\log_2 3\approx5\,730\times1.585=9\,082.05\approx9\,082$. 故选 C.

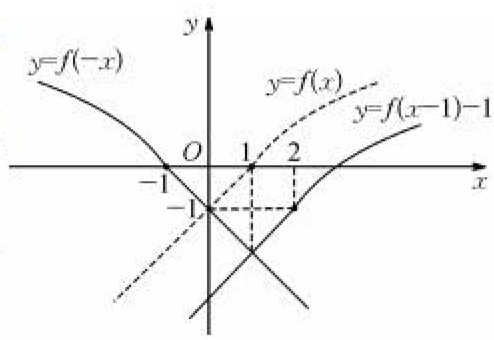
8. A　$y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为$\sin 4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$，所以①适合；因为$\sin 4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$，所以②适合；因为$\sin 4\left(x+\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$，所以③不适合；因为$\sin 4\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$，所以④不适合. 故选 A.

9. B　因为对任意$x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$恒成立，所以$f(-10)=f(-5)f(-5)=9$，$f(-15)=f(-10)f(-5)=27$，则由$f(3-x)<27$，得$f(3-x)<f(-15)$，又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数，所以$3-x>-15$，解得$x<18$. 故选 B.

10. D　设两耳所在双曲线的实轴长为$2a$，焦距为$2c$，虚轴长为$2b$，则$2a=3\times10^{-5}\times334=0.01\,002(\mathrm{m})$，$2c=0.2(\mathrm{m})$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{b}{a}$，所以$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{a}$，所以$\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{0.01\,002}{0.2}=0.0\,501\approx0.05$. 故选 D.

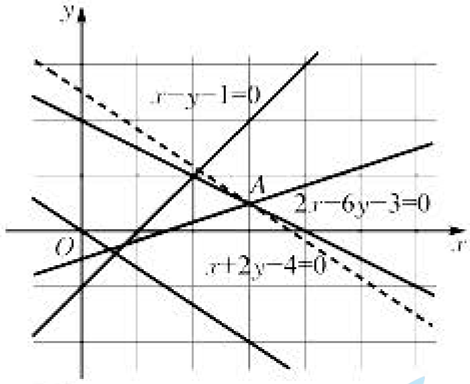
11. A　设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为R，则$\dfrac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，所以$R=3$，又$2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以$x^2+y^2+z^2=36$，所以$xy+yz+zx\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$，当且仅当$x=y=z=2\sqrt{3}$时，等号成立. 故选 A.

12. C　考查函数$y=f(-x)$和$y=f(x-1)-1$的图象，其中$y=f(-x)$与$y=f(x)$的图象关于y轴对称，将$y=f(x)$的图象右移 1 个单位长度，再下移 1 个单位长度，得到$y=f(x-1)-1$的图象，如图所示，由$(-x)-1=[(x-1)-1]-1$，解得$x=1$，所以满足$f(-x)>f(x-1)-1$的x的取值范围是$x<1$. 故选 C.



13. $2x-y-\mathrm{e}=0$　因为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，$f'(x)=\ln x+1$，则$f'(\mathrm{e})=2$，所以所求切线方程为$y-\mathrm{e}=2(x-\mathrm{e})$，即$2x-y-\mathrm{e}=0$.

14. $\frac{15}{2}$ 画出可行域(如图阴影部分)，当直线 $2x+3y=z$ 过点 $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$ 时，z 取得最大值，所以 $z_{max}=2\times3+3\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.



15. ①$\frac{a}{\tan\alpha}$ ②$\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$ ①$\angle PBA=\alpha$，由 $\frac{PA}{AB}=\tan\alpha$，得 $AB=\frac{a}{\tan\alpha}$；②$\angle APB=\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\angle PBA=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$，由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$，解得 $AB=\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$.

16. 3 由题意知抛物线 C 的焦点坐标为 $F\left(0,\frac{1}{3}\right)$，因为直线 l 与 C 有两个交点，所以 l 的存在斜率，所以设 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{3}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{3},\\ x^2=\frac{4}{3}y,\end{cases}$ 所以 $x^2-\frac{4}{3}kx-\frac{4}{9}=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{4}{3}k$，$x_1x_2=-\frac{4}{9}$，又 $|AF|=\frac{1}{3}+y_1$，$|BF|=\frac{1}{3}+y_2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(y_1+y_2)+y_1y_2=\frac{4}{9}(1+k^2)$，$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{2}{3}+y_1+y_2=\frac{4}{3}+k(x_1+x_2)=\frac{4}{3}(1+k^2)$，所以 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=3$.

17. 解：(1)因为 $a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$. …………………… 2 分

又 $a_1=1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列. …………………… 4 分

所以 $\frac{1}{a_n}=n$，所以 $a_n=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, …………………… 8 分

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. …………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$A$ 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, …………………… 2 分

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………… 4 分

所以 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan A\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}=3+2\sqrt{2}$. …………………… 6 分

(2)因为 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{1}{3}$, …………………… 8 分

则 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$, …………………… 10 分

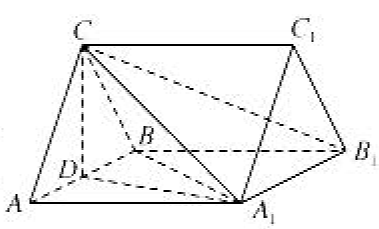
由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{b}{\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，解得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …………………… 12 分

19. (1)证明：因为 $CA=CB$，$CD\perp AB$，所以 D 为 AB 的中点，

连接 A_1B，由于 $AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$，故 $\triangle A_1AB$ 为等边三角形，

所以 $A_1D\perp AB$. …………………… 2 分

又因为 $CD\perp AB$，$A_1D, CD\subset$ 平面 A_1CD，$A_1D\cap CD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 A_1CD. … 4 分



又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 A_1CD. ………………………………………………………… 6 分

(2)解：法一：因为平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1B_1B=AB$，$CD\subset$ 平面 ABC，$CD\perp AB$，

所以 $CD\perp$ 平面 AA_1B_1B. ………………………………………………………………………………… 8 分

由 $CA=CB=AB=2$，得△ABC 是等边三角形，则 $CD=\sqrt{3}$；

由△A_1AB 是等边三角形，得 $S_{\triangle A_1AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，

所以 $V_{C-A_1AB}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1AB}\cdot CD=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$. ……………………………………………… 10 分

连接 B_1C，由于 ABB_1A_1 和 BCC_1B_1 都是平行四边形，所以 $S_{\triangle A_1AB}=S_{\triangle A_1B_1B}$，$S_{\triangle B_1BC}=S_{\triangle B_1C_1C}$，

所以 $V_{C-A_1AB}=V_{C-A_1B_1B}=V_{A_1-B_1BC}=V_{A_1-B_1C_1C}$，

于是 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=V_{C-A_1AB}+V_{A_1-B_1BC}+V_{A_1-B_1C_1C}=3V_{C-A_1AB}=3\times 1=3$. ……………………………… 12 分

法二：由(1)，得 $A_1D\perp AB$，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1B_1B=AB$，$A_1D\subset$ 平面 AA_1B_1B，

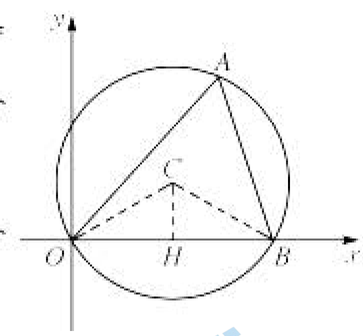
所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC. ……………………………………………………………………………………… 8 分

由△A_1AB 是边长为 2 的等边三角形，得 $A_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$. ……………………………………… 9 分

由 $CA=CB=AB=2$，得△ABC 是等边三角形，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

于是 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=A_1D\cdot S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$. ……………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)如图，设 OB 的中点为 H，连接 CH，则 $CH\perp OB$. 由正弦定理，得圆 C 的半径为 $R=\frac{1}{2}\times\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$. ……………………………………………………………… 2 分



由 $\angle OAB=60^\circ$，得 $\angle OCH=60^\circ$，所以 $|CH|=1$. 又 $|OH|=\sqrt{3}$，所以 $C(\sqrt{3},1)$.

所以圆 C 的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. ………………………………………………… 4 分

(2)直线 BC 的斜率为 $k_{BC}=\frac{1-0}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以圆 C 在点 B 处的切线的斜率为 $\sqrt{3}$，

故圆 C 在点 B 处的切线方程为 $y=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$，即切线方程为 $\sqrt{3}x-y-6=0$. ……………………… 6 分

(3)①当直线 AB 的斜率存在时，由 $B(2\sqrt{3},0)$，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$，即 $kx-y-2\sqrt{3}k=0$，

则圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|k\times\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$. ……………………………………… 7 分

所以 $|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(\sqrt{3}k+1)^2}{k^2+1}}=2$，

解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………………………………………………… 9 分

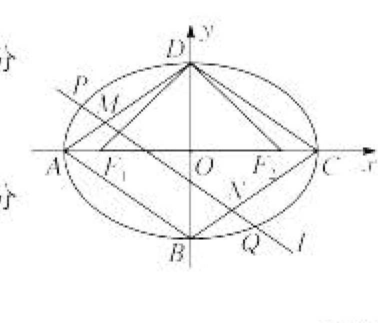
由 A 在 x 轴的上方及(2)，可得 $k<0$ 或 $k>\sqrt{3}$，因此 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 不适合题意，应舍去. ……………………… 10 分

②当直线 AB 的斜率不存在时，$AB\perp x$ 轴，此时 O,C,A 三点共线，显然 $|AB|=2$，此时 $A(2\sqrt{3},2)$. ………… 11 分

综上，存在点 $A(2\sqrt{3},2)$，使得 $|AB|=2$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2\sqrt{2}$； ①………………………………………… 1 分

因为△DF_1F_2 为等腰三角形，所以 $\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=1$. ②……………………………… 2 分



由①②，再结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=c=1$.

故椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$.

由 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(0,-1)$，得直线 AB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$. ……………………………………………… 5 分

则可设直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1)$. ……………………………………………………………… 6 分

由$\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $x^2-\sqrt{2}nx+n^2-1=0$.

则 $\Delta=2n^2-4(n^2-1)=4-2n^2>0$，且 $x_1+x_2=\sqrt{2}n$. ………………………………………………………… 8 分

直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1$，直线 BC 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-1$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_3=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$；………………………………………………………… 9 分

由$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-1, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_4=\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}$. ………………………………………………………… 10 分

于是 $x_3+x_4=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}n$.

所以 $x_1+x_2=x_3+x_4$，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}$.

从而 PQ 与 MN 的中点重合，所以 $|PM|=|NQ|$. ………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：函数 $f(x)=xe^x-x$ 的定义域是 **R**.

由 $f(x)=xe^x-x$，得 $f'(x)=e^x+xe^x-1=(1+x)e^x-1$. ………………………………………………………… 1 分

当 $x>0$ 时，$1+x>1$，$e^x>1$，所以 $(1+x)e^x>1$，所以 $(1+x)e^x-1>0$，即 $f'(x)>0$； ………………… 2 分

当 $x<0$ 时，$1+x<1$，$0<e^x<1$，所以由 $1+x<1$ 两边同时乘以正数 e^x，得 $(1+x)e^x<e^x<1$，即 $(1+x)e^x<1$，所以 $(1+x)e^x-1<0$，即 $f'(x)<0$. ………………………………………………………… 3 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ………………………………… 4 分

(2)证明："不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立"等价于"不等式 $xe^x-x\geqslant \ln x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立"，等价于"不等式 $xe^x-x-\ln x-1\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立".

令 $F(x)=xe^x-\ln x-x-1(x>0)$，则进一步转化为证明"不等式 $F(x)\geqslant 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立". …… 5 分

$F'(x)=(x+1)e^x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+1}{x}\cdot(xe^x-1)$.

令 $G(x)=xe^x-1$，则 $G'(x)=(x+1)e^x(x>0)$.

因为当 $x>0$ 时，$G'(x)=(x+1)e^x>0$.

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上最多有一个零点.

又因为 $G(0)=-1<0$，$G(1)=e-1>0$，所以存在唯一的 $c\in(0,1)$，使得 $G(c)=0$. ………………………… 7 分

且当 $x\in(0,c)$ 时，$G(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$G(x)>0$.

即当 $x\in(0,c)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$.

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 上单调递减，在区间 $(c,+\infty)$ 上单调递增.

从而 $F(x)\geqslant F(c)=ce^c-\ln c-c-1$. ………………………………………………………… 9 分

由 $G(c)=0$，得 $ce^c-1=0$，即 $ce^c=1$.

两边取对数得 $\ln c+c=0$. ………………………………………………………… 10 分

所以 $F(c)=ce^c-\ln c-c-1=(ce^c-1)-(\ln c+c)=0-0=0$. ………………………………………… 11 分

所以 $F(x)\geqslant F(c)=0$，即 $F(x)\geqslant 0$.

从而证得不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………………… 13 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〝精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。