2024 年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（三）

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知集合 $A=\{x|x^2\le 4\}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=($　　$)$

A．$(0,\ 2]$　　　　B．$[-2,\ 0)$

C．$(-\infty,\ -2]$　　　　D．$[-2,\ +\infty)$

2．若复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点关于 x 轴对称，且 $z_1=2-\mathrm{i}$，则复数 $\dfrac{z_1}{z_2}=$

(　　)

A．$-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　　　B．$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

C．$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　　　D．$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

3．某学校共 1000 人参加数学测验，考试成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(100,\ \sigma^2)$，若 $P(80\le\xi\le 100)=0.45$，则估计成绩在 120 分以上的学生人数为(　　)

A．25　　　　B．50

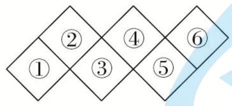
C．75　　　　D．100

4．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=0$，$f(x_2)=\sqrt{3}$，且$|x_1-x_2|$的最小值为 π，则 ω 的值为(　　)

A．$\dfrac{2}{3}$　　　　B．$\dfrac{1}{2}$

C．1　　　　D．2

5．用红、黄、蓝三种颜色给下图着色，要求有公共边的两块不着相同颜色．在所有着色方案中，①③⑤着相同颜色的有(　　)



A．96 种　　B.48 种

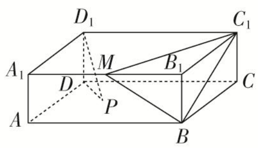
C．24 种　　D.12 种

6．已知奇函数 $f(x)$在 **R** 上是减函数，$g(x)=xf(x)$，若 $a=g(-\log_2 5.1)$，$b=g(3)$，$c=g(2^{0.8})$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$

C．$b<c<a$　　D．$b<a<c$

7．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$AA_1=1$，M 为 A_1B_1 的中点，P 为底面 $ABCD$ 上一点，若直线 D_1P 与平面 BMC_1 没有交点，则△D_1DP 面积的最小值为(　　)



A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

8．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，其一条渐近线方程为 $x+\sqrt{3}y=0$，右顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在其右支上，点 $B(3，1)$，△F_1AB 的面积为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则当$|PF_1|-|PB|$取得最大值时点 P 的坐标为(　　)

A．$\left(3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}，1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

B. $\left(3+\frac{\sqrt{6}}{2},\ 1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C. $\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$

D. $\left(\frac{6+5\sqrt{78}}{22},\ \frac{10+\sqrt{78}}{22}\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．若过点$(a，b)$可作曲线 $y=x^2-2x$ 的两条切线，则点$(a，b)$可以是(　　)

A．(0，0)　　B．(3，0)

C．(1，1)　　D．(4，3)

10．对于一个事件 E，用 $n(E)$表示事件 E 中样本点的个数．在一个古典概型的样本空间Ω和事件 A，B，C，D 中，$n(\Omega)=100$，$n(A)=60$，$n(B)=40$，$n(C)=20$，$n(D)=10$，$n(A\cup B)=100$，$n(A\cap C)=12$，$n(A\cup D)=70$，则(　　)

A．A 与 D 不互斥　　B.A 与 B 互为对立

C．A 与 C 相互独立　　D.B 与 C 相互独立

11．折扇在我国已有三四千年的历史，“扇”与“善”谐音，折扇也寓意“善良”“善行”．它以字画的形式集中体现了我国文化的方方面面，是运筹帷幄、决胜千里、大智大勇的象征(如图 1)．图 2 是一个圆台(上底面面积小于下底面面积)的侧面展开图(扇形的一部分)，若扇形的两个圆弧所在圆的半径分别是 1 和 3，且$\angle ABC=120°$，则该圆台的(　　)

图 1

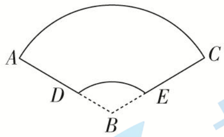


图 2

A．高为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B．表面积为$\frac{34\pi}{9}$

C．体积为$\frac{52\sqrt{2}\pi}{81}$

D．上底面面积、下底面面积和侧面积之比为 1∶9∶24

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的两个单位向量，若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，请写出一个符合题意的λ的值：________．

13．过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，点 A，B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1，B_1，$|A_1B_1|=10$，点 P 在抛物线的准线上．若 AP 是$\angle A_1AB$ 的角平分线，则点 P 到直线 l 的距离为________．

14．若$\left(\frac{1}{3x}+\sqrt{x}\right)^n$展开式的所有项的二项式系数和为 256，则展开式中系数最大的项的二项式系数为________．(用数字作答)

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=0$，且 $a_n>0(n\geq2)$，$a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，若$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n<m$ 恒成立，求整数 m 的最小值．

16．在①$2a=b+2c\cos B$；②$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$；③$\sqrt{3}\sin C=3-2\cos^2\frac{C}{2}$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答．

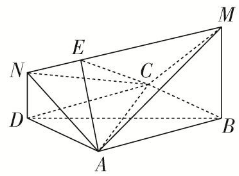
问题：在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足________．

(1)求角C的大小；

(2)若$c=2\sqrt{3}$，$\angle ABC$与$\angle BAC$的平分线交于点I，求$\triangle ABI$周长的最大值．

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分．

17. 如图，四边形$ABCD$是边长为2的菱形，且$\angle ABC=60°$，$BM\perp$平面$ABCD$，$BM\parallel DN$，$BM=2DN$，E是线段MN上任意一点．



(1)证明：平面$EAC\perp$平面$BMND$；

(2)若$\angle AEC$的最大值是$\frac{2\pi}{3}$，求三棱锥$M-NAC$的体积．

18.甲、乙两人组团参加答题挑战赛，规定：每一轮甲、乙各答一道题，若两人都答对，该团队得1分；只有一人答对，该团队得0分；两人都答错，该团队得-1分．假设甲、乙两人答对任何一道题的概率分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$.

(1)记X表示该团队一轮答题的得分，求X的分布列及数学期望$E(X)$；

(2)假设该团队连续答题n轮，各轮答题相互独立．记P_n表示“没有出现连续三轮每轮得1分”的概率，$P_n=aP_{n-1}+bP_{n-2}+cP_{n-3}(n\geq 4)$，求$a$，$b$，$c$；并证明答题轮数越多(轮数不少于3)，出现“连续三轮每轮得1分”的概率越大．

19．伯努利不等式，又称贝努利不等式，由数学家伯努利提出：对于实数$x>$

-1 且 $x\neq 0$，正整数 n 不小于 2，那么 $(1+x)^n\geq 1+nx$.研究发现，伯努利不等式可以推广，请证明以下问题：

(1)当 $\alpha\in[1,+\infty)$ 时，$(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x$ 对任意 $x>-1$ 恒成立；

(2)对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n<(n+1)^n$ 恒成立.